Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (87), 2014

УДК 512.542

Множества Фиттинга и инъекторы конечной группы

Н.Т. Воробьев, М.Г. Семенов

Пусть G – конечная π-разрешимая группа и $\mathscr{F}$ – локальное множество Фиттинга группы G такое, что множество всех простых делителей порядков подгрупп из $\mathscr{F}$ совпадает с π. Доказано, что в этом случае $\mathscr{F}$-инъектор группы G – это подгруппа $Z = W \cdot C_{D_p}(W / W_{F(p)})$, где Σ – холловская система G, $D = N_G(\Sigma)$, $D_p \in \Sigma \bigcap D$, W – $\mathscr{F}$-инъектор группы $O^p(G)$, $\Sigma \searrow W$ и G определяется полной приведенной H-функцией F.

Ключевые слова: конечная π-разрешимая группа, множество Фиттинга, $\mathscr{F}$-инъектор.

Let G be a π-soluble group and $\mathscr{F}$ be a local Fitting set of G such that the set of all prime divisors of orders of $\mathscr{F}$-subgroups coincides with π. It is proved that in this case $\mathscr{F}$-injector of G is a subgroup $Z = W \cdot C_{D_p}(W / W_{F(p)})$ where Σ is a Hall system of G, $D = N_G(\Sigma)$, $D_p \in \Sigma \bigcap D$, W is an $\mathscr{F}$-injector of $O^p(G)$, $\Sigma \searrow W$ and G is defined by full integrated H-function F.

Keywords: finite π-soluble group, Fitting set, $\mathscr{F}$-injector.

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы.

В теории разрешимых групп известен результат Гашюца [1] о том, что для любой разрешимой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп. Напомним, что $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой группы G называют [2, с. 280] такую $\mathfrak{F}$-подгруппу E, что из $E \le H \le G$, $K \trianglelefteq H$ и $H / K \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H = EK$. Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп) $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа группы G совпадает с холловой π-подгруппой G (в частности, с силовской p-подгруппой G) и поэтому в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп теорема Гашюца обобщает фундаментальные теоремы Силова и Холла.

В последующем Гашюцом было установлено [3], что в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы группы совпадают с её $\mathfrak{F}$-проекторами. При этом $\mathfrak{F}$-проектором группы G называют такую подгруппу F, что FN/N – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/N для любой нормальной подгруппы N из G.

В работе [4] были определены объекты, дуальные понятиям формации и проектора – классы Фиттинга и инъекторы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют [2, с. 274] классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Подгруппу V группы G называют $\mathfrak{F}$-инъектором G, если $V \bigcap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для каждой субнормальной подгруппы N группы G. Развивая силовскую теорию Гашюц, Фишер и Хартли доказали [4], что в каждой разрешимой группе G для любого разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов. Указанная теорема впервые была обобщена в работе Л.А. Шеметкова [5], где установлено, что для любого множества Фиттинга $\mathscr{F}$ конечной π-разрешимой группы G (π – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathscr{F}$) в G существует единственный класс сопряженных $\mathscr{F}$-инъекторов. Множеством Фиттинга группы G называют [5] такое множество подгрупп группы G, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений. Примечателен тот факт, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фиттинга $\mathscr{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \le G : H \in \mathfrak{F}\}$, которое называют следом класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, хотя обратное в общем случае неверно [2, пример VIII.2.2(b)]. Кроме того, для случая, когда множество Фиттинга $\mathscr{F} = Tr_{\mathsf{F}}(G)$, множества F-инъекторов и $\mathscr{F}$-инъекторов группы G совпадают, и поэтому, указанная выше теорема Гашюца-Фишера-Хартли [4] является следствием теоремы Л.А. Шеметкова.

Задача описания общего метода построения F-проектора для разрешимой насыщенной формации в разрешимой группе восходит к работам Дерка [6] и Дарси [7]. Вместе с тем, формула F-проектора группы G до сих пор известна лишь для случая, когда G – разрешимая группа, факторизуемая в виде $G = L \cdot F(G)$, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга G [8]. В связи с этим представляет интерес решение дуальной задачи – задачи нахождения формулы F-инъектора группы для произвольного локального класса Фиттинга F. Такая задача была решена Н.Т. Воробьевым и В.Н. Загурским [9] для случая π-разрешимой группы G, где π – множество всех простых делителей порядков групп из локального класса Фиттинга F. Используя результаты Л.А. Шеметкова об инъекторах для множеств Фиттинга, в настоящей работе найдена формула $\mathscr{F}$-инъектора для любого локального множества Фиттинга π-разрешимой группы, где $\pi = \bigcup\{\sigma(H) \mid H \le G \wedge H \in \mathscr{F}\}$ и $\sigma(H) = \{p : p \mid |H|\}$.

В определениях и обозначениях мы следуем [2].

1. Предварительные сведения. Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга. Символом $G_{\mathscr{F}}$ обозначают [2, с. 538] наибольшую из нормальных $\mathscr{F}$-подгрупп группы G. Такую подгруппу называют *$\mathscr{F}$-радикалом* группы G. Понятие *$\mathscr{F}$-инъектора* группы для её множества Фиттинга $\mathscr{F}$ определяется аналогично, как и понятие F-инъектора для класса Фиттинга F. Символом $\sigma(\mathscr{F})$ мы будем обозначать множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathscr{F}$.

Если $H \le G$, то $\mathscr{F}_H = \{S \le H : S \in \mathscr{F}\}$ является множеством Фиттинга группы G и, очевидно, является множеством Фиттинга группы H. Следуя [2], мы будем обозначать $\mathscr{F}_H$ во многих случаях просто символом $\mathscr{F}$.

Холловской системой π-разрешимой группы G [10] называется такое множество Σ холловских подгрупп из G, что выполняются следующие условия: 1) для всякого множества простых чисел ρ из π $G_\rho \in \sum$, а также $G_{\rho\cup\pi'} \in \sum$; 2) если $H, K \in \sum$, то $HK = KH$. Если R подгруппа группы G, то через $\sum \bigcap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \bigcap R \mid \forall S \in \sum\}$. Если $\sum \bigcap R$ – холловская система группы R, то говорят, что Σ *редуцирует* холловскую систему $\sum_R$ подгруппы R и обозначают $\sum \square R$.

Подгруппа $N_G(\sum) = \{g \in G \mid H = H^g, \forall H \in \sum\}$ называется *нормализатором* холловской системы Σ. Подгруппа A π-разрешимой группы называется *π-связной* [11], если либо A – π-подгруппа, либо A содержит холловскую π'-подгруппу группы G.

Лемма 1.1 [11, с. 56]. *Пусть H – π-связная подгруппа π-разрешимой группы G. Подгруппа H пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холловская система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H.*

Подгруппа A группы G называется *p-нормально погруженной* [2] в G, если для простого числа p силовская p-подгруппа A_p группы A будет силовской p-подгруппой некоторой нормальной в G подгруппы. Подгруппу A группы G назовем *π-нормально погруженной* в G, если A p-нормально погружена в G для любого p из π. Если для любого простого делителя p порядка группы A эта подгруппа является p-нормально погруженной в G, то A называется *нормально погруженной* в G.

2. Локальные множества Фиттинга. Локальный метод для изучения структуры классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [12]. Для этой цели в [12] используются отображения вида f : P → {классы Фиттинга}. Такие отображения называют *функциями Хартли* [13]. При этом если класс Фиттинга $\mathsf{F} = \bigcap_p f(p)\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ для некоторой функции Хартли f, то его называют *локальным* [13]. По аналогии с функциями Хартли в теории классов Фиттинга мы определим H-функции для некоторой группы G.

Определение 2.1. *Локальной функцией Хартли* или *H-функцией группы G* назовем отображение $f:\mathsf{P}\rightarrow\{$*множества Фиттинга группы* $G\}$.

Определение 2.2. *Произведением* $\mathscr{F}\circ\mathsf{X}$ множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G и класса Фиттинга X назовем множество подгрупп $\{H\leq G: H/H_{\mathscr{F}}\in\mathsf{X}\}$.

Аналог известных свойств произведений классов Фиттинга [2, теорема IX.1.12] для множеств Фиттинга представляет

Лемма 2.3. *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G, X – класс Фиттинга и $H\leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) произведение $\mathscr{F}\circ\mathsf{X}$ является множеством Фиттинга группы G;

2) $(H/H_{\mathscr{F}})_{\mathsf{X}}=H_{\mathscr{F}\circ\mathsf{X}}/H_{\mathscr{F}}$;

3) если X_1 и X_2 – классы Фиттинга, то $(\mathscr{F}\circ\mathsf{X}_1)\circ\mathsf{X}_2=\mathscr{F}\circ(\mathsf{X}_1\mathsf{X}_2)$.

Справедливость леммы легко установить, следуя доказательству теоремы IX.1.12 [2].

В дальнейшем мы будем использовать также следующие простейшие свойства произведения множества Фиттинга группы *G* и класса Фиттинга.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ – множества Фиттинга группы G. Тогда:*

1) если X является одновременно классом Фиттинга и гомоморфом, то из включения $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2$ следует $\mathscr{F}_1\circ\mathsf{X}\subseteq\mathscr{F}_2\circ\mathsf{X}$;

2) если X – формация Фиттинга, то $(\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2)\circ\mathsf{X}=\mathscr{F}_1\circ\mathsf{X}\cap\mathscr{F}_2\circ\mathsf{X}$;

3) если X_1 и X_2 – классы Фиттинга, то $\mathscr{F}\circ(\mathsf{X}_1\cap\mathsf{X}_2)=\mathscr{F}\circ\mathsf{X}_1\cap\mathscr{F}\circ\mathsf{X}_2$.

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Определение 2.5. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы *G* назовем *локальным*, если $\mathscr{F}=\bigcap_p f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ для некоторой *H*-функции *f* группы *G*. В данном случае *f* назовем *H*-функцией $\mathscr{F}$.

Определение 2.6. Пусть *f* – *H*-функция множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы *G*. Тогда *f* назовем: 1) *внутренней*, если $f(p)\subseteq\mathscr{F}$ для каждого простого *p*; 2) *полной*, если $f(p)\circ\mathsf{N}_p=f(p)$ для всех простых *p*.

Следуя доказательству леммы 3 [14], нетрудно показать, что справедлива

Лемма 2.7. *Каждое локальное множество Фиттинга группы G определяется полной внутренней H-функцией.*

Известно [14, лемма 2], что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера. Мы установим справедливость аналогичного утверждения и в теории множеств Фиттинга.

Определение 2.8 [2, с. 554]. Множество Фиттинга группы *G* называется *множеством Фишера*, если из того, что $L\leq G$, $K\trianglelefteq L\in\mathscr{F}$ и *H/K* – *p*-подгруппа *L/K* (*p* – простое число), всегда следует $H\in\mathscr{F}$.

Теорема 2.9. *Каждое локальное множество Фиттинга группы G является множеством Фишера G.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}=\bigcap_p f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ для некоторой *H*-функции *f*. Покажем, что произведение $f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ является множеством Фишера *G* для произвольного простого *p*.

Пусть $L\leq G$, $K\trianglelefteq L\in f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ и *H/K* – *q*-подгруппа *L/K*. Рассмотрим два следующих случая:

1. $q\neq p$.

В этом случае $H/K\in\mathsf{E}_{p'}$. Из того, что $f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$ является множеством Фиттинга, следует $K\in f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$. Значит, $H\in(f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'})\circ\mathsf{E}_{p'}=f(p)\circ\mathsf{N}_p\mathsf{E}_{p'}$.

2. $q=p$.

Пусть $P \in Syl_p(H)$. Заметим, что $L / L_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} \in \mathrm{E}_{p'}$. Следовательно, $P \le L_{f(p)\circ \mathrm{N}_p}$. Тогда $[K, P] \le K \bigcap L_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} = K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p}$. Значит, $K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P \le KP = H$. Ввиду того, что $K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} \in \mathrm{N}_p$, имеем $K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P \in f(p) \circ \mathrm{N}_p \mathrm{N}_p = f(p) \circ \mathrm{N}_p$. Так как $K / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} \in \mathrm{E}_{p'}$, то

$$H / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P = KP / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P = KK_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P \cong$$
$$\cong K / K \bigcap K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} P = K / K_{f(p)\circ \mathrm{N}_p} (K \bigcap P) \in \mathrm{E}_{p'}$$

Значит, $H \in f(p) \circ \mathrm{N}_p \mathrm{E}_{p'}$.

Итак, мы показали, что для любого простого *p* множество Фиттинга $f(p) \circ \mathrm{N}_p \mathrm{E}_{p'}$ является множеством Фишера. Следовательно, $\mathscr{F}$ является множеством Фишера. Теорема доказана.

3. Перестановочные множества Фиттинга. В настоящем разделе мы расширим результаты Локета [15] о перестановочных разрешимых классах Фиттинга на случай перестановочного множества Фиттинга π-разрешимой группы *G*.

Пусть Σ – холловская система π-разрешимой группы *G*. Подгруппа *A* называется Σ-*перестановочной* [2, с. 230], если *A* перестановочна со всякой подгруппой из Σ. Если *A* перестановочна с некоторой холловской системой группы *G*, то она называется *системно перестановочной*. Через $A \perp \Sigma$ обозначим Σ-перестановочность подгруппы *A*.

Определение 3.1. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы *G* назовем *перестановочным*, если $\mathscr{F}$-инъектор каждой подгруппы *H* группы *G* является системно перестановочной подгруппой в *H*.

Следуя доказательству теоремы 4.5 [15] легко показать, что справедлива

Лемма 3.2. *Всякое множество Фишера* $\mathscr{F}$ $\sigma(\mathscr{F})$*-разрешимой группы G является перестановочным.*

Лемма 3.3. *Пусть G –* π*-разрешимая группа,* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга группы G,* $\pi = \sigma(\mathscr{F})$, $N \trianglelefteq G$ *и G/N является* π'*-группой или нильпотентной* π*-группой. Если максимальная* $\mathscr{F}$*-подгруппа V группы G содержит* $\mathscr{F}$*-инъектор W группы N, то V –* $\mathscr{F}$*-инъектор группы G.*

Доказательство вытекает из теоремы 2.1 [5] и следствия 1 [16].

Лемма 3.4 [5, теорема 2.3]. *Пусть* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* $\sigma(\mathscr{F})$*-разрешимой группы G и V –* $\mathscr{F}$*-инъектор группы G. Если* $V \le H \le G$, *то V также является* $\mathscr{F}$*-инъектором группы H.*

Определение 3.5 [2, с. 241]. Пусть *G* – группа и $U \le G$. Тогда *U* называют *пронормальной* в *G* (обозначают $U \,\mathrm{pr}\, G$) если подгруппы *U* и U^g сопряжены в $< U, U^g >$ для всех элементов $g \in G$.

Лемма 3.6. *Пусть* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* $\sigma(\mathscr{F})$*-разрешимой группы G и N – нормальная подгруппа G. Тогда* $\mathscr{F}$*-инъектор V группы N является пронормальной подгруппой в G.*

Непосредственной проверкой легко убедиться, что справедливы следующие леммы.

Лемма 3.7. *Пусть G –* π*-разрешимая группа и* ρ *– такое множество простых чисел, что либо* $\rho \subseteq \pi$, *либо* $\pi' \subseteq \rho$. *Если* $G = G_1 G_2$, *то существуют такие холловские* ρ*-подгруппы H, H*$_1$ *и H*$_2$ *соответственно в группах G, G*$_1$ *и G*$_2$*, что* $H = H_1 H_2$.

Лемма 3.8. *Пусть Σ – холловская система* π*-разрешимой группы G. Если Σ редуцируется в пронормальную* π*-связную подгруппу H, то* $N_G(\Sigma)$ *нормализует подгруппу H и* $\Sigma \square\ N_G(H)$.

Лемма 3.9. *Пусть* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π*-разрешимой группы G для* $\pi = \sigma(\mathscr{F})$, *V –* $\mathscr{F}$*-инъектор группы G и V –* π*-связная подгруппа, причем холловская система Σ группы G редуцируется в V. Пусть* $K \trianglelefteq G$ *и G/K является* π'*-группой или нильпотентной* π*-группой. Тогда если* $\mathscr{F}$ *– перестановочное множество Фиттинга, то* $V \le N_G(\Sigma)(V \bigcap K)$.

4. Формула инъектора. Лемма 4.1 [17, лемма 7]. *Пусть локальное множество Фиттинга $\mathcal{F}$ π-разрешимой группы G, где $\pi = \sigma(\mathcal{F})$ с полной приведенной H-функцией F группы G и K – $\mathcal{F}$-подгруппа G. Если S является p-подгруппой G, то $K \cdot C_S(K / K_{F(p)}) \in \mathcal{F}$. В случае, когда $K \trianglelefteq G$, $K \le H \le G$ и $H \in \mathcal{F}$, выполняется включение $C_S(H / H_{F(p)}) \le C_S(K / K_{F(p)})$.*

Основной результат работы представляет

Теорема 4.2. *Пусть $\pi = \sigma(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ – локальное множество Фиттинга π-разрешимой группы G определяемое полной приведенной H-функцией F. Если Σ – холловская система G, $D = N_G(\Sigma)$ и $D_p \in \Sigma \bigcap D$, W – $\mathcal{F}$-инъектор группы $O^p(G)$ и $\Sigma \square W$, то для $p \in \pi$ подгруппа $Z = W \cdot C_{D_p}(W / W_{F(p)})$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы G и $\Sigma \square Z$, а для $p \in \pi'$ подгруппа W – $\mathcal{F}$-инъектор группы G.*

Доказательство. Пусть $p \notin \pi$ и V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, содержащий подгруппу W. Тогда $V / W = V / V \bigcap O^p(G) \cong VO^p(G) / O^p(G) \in \mathrm{N}_p$ и из $p \notin \pi = \sigma(\mathcal{F})$ следует $V = W$.

Пусть $p \in \pi$. Легко видеть, что W – π-связная подгруппа. Так как по лемме 3.6 $W \operatorname{pr} G$ и $\Sigma \square W$, то ввиду леммы 3.8 $D \le N_G(W)$. Если $d \in D$, то $W = W^d$. Из $W_{F(p)} \trianglelefteq W$ следует $(W_{F(p)})^d \trianglelefteq W^d = W$. Так как F(p) – множество Фиттинга группы G, то $(W_{F(p)})^d \in F(p)$. Тогда, из определения F(p)-радикала вытекает $(W_{F(p)})^d \le W_{F(p)}$ для любого элемента $d \in D$. Значит, $(W_{F(p)})^{d^{-1}} \le W_{F(p)}$ и $W_{F(p)} = (W_{F(p)})^d$. Значит, $D \le N_G(W_{F(p)})$. Отсюда получаем $(wW_{F(p)})^d \in W / W_{F(p)}$ для любого элемента $w \in W$. Следовательно, $D \le N_G(W / W_{F(p)})$. Обозначим $Y = C_{D_p}(W / W_{F(p)})$. Ввиду леммы 4.1, $Z = WY \in \mathcal{F}$.

Пусть V – $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа в G такая, что $Z \subseteq V$. Так как $p \in \pi$ и $W \subseteq V$, то по лемме 3.3 $V \in Inj_{\mathcal{F}}(G)$. Следовательно, $\Sigma \square V^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Докажем, что $W \trianglelefteq V^g$. Так как по лемме VIII.2.6 [2] $V \bigcap O^p(G) \in Inj_{\mathcal{F}}(O^p(G))$ и $W \in Inj_{\mathcal{F}}(O^p(G))$, то ввиду выбора V, получаем $W = V \bigcap O^p(G) \trianglelefteq V$. Но тогда из $W^g \trianglelefteq V^g$ и $\Sigma \square V^g$ вытекает, что $\Sigma \square W^g$. Следовательно, учитывая $\Sigma \square W$ и $W \operatorname{pr} G$, по лемме 1.1 $W = W^g$ и поэтому $W \trianglelefteq V^g$.

Покажем $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le V^g$. По лемме VIII.2.7 [2] $V^g \in Inj_{\mathcal{F}}(G)$. Тогда, ввиду леммы 4.1, $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \in \mathcal{F}$. Так как V^g – $\mathcal{F}$-инъектор группы G, то $V^g \cdot C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) = V^g$ и $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le V^g$.

Установим, что $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le Y$. Рассмотрим группу V^g. Из леммы 4.1, ввиду $W \trianglelefteq V^g$, вытекает, что $C_{D_p \cap V^g}(V^g / V^g_{F(p)}) \le C_{D_p \cap V^g}(W^g / W^g_{F(p)})$. Так как $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le V^g$, то $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le C_{D_p \cap V^g}(V^g / V^g_{F(p)})$. Тогда, учитывая $C_{D_p \cap V^g}(W^g / W^g_{F(p)}) \le Y$, имеем $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le Y$.

Проверим, что $V^g \bigcap D_p = C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$. Учитывая изоморфизм

$$(V^g \bigcap D_p)V^g_{F(p)} / V^g_{F(p)} \cong V^g \bigcap D_p / V^g \bigcap D_p \bigcap V^g_{F(p)},$$

$a = \left| V^g \bigcap D_p : V^g_{F(p)} \bigcap D_p \right| = \left| (V^g \bigcap D_p)V^g_{F(p)} : V^g_{F(p)} \right|$. Очевидно, что a является p-числом. Кроме того, выполняется равенство $a = \dfrac{\left|V^g \bigcap D_p\right|}{\left|V^g_{F(p)} \bigcap D_p\right|} = \dfrac{\left|V^g\right|\left|D_p\right|}{\left|V^g D_p\right|} : \dfrac{\left|V^g_{F(p)}\right|\left|D_p\right|}{\left|V^g_{F(p)} D_p\right|} = \dfrac{\left|V^g\right|}{\left|V^g_{F(p)}\right|} \cdot \dfrac{\left|V^g_{F(p)} D_p\right|}{\left|V^g D_p\right|}$.

Следовательно, $a \cdot \dfrac{\left|V^g D_p\right|}{\left|V^g_{F(p)} D_p\right|} = \dfrac{\left|V^g\right|}{\left|V^g_{F(p)}\right|}$. Так как $V^g \in \mathscr{F}$ и F является полной локальной H-функцией группы G, то $\dfrac{\left|V^g\right|}{\left|V^g_{F(p)}\right|}$ является p'-числом. Следовательно, a – p'-число и $a = 1$. Значит, $V^g \bigcap D_p = V^g_{F(p)} \bigcap D_p$ и, ввиду $V^g_{F(p)} \trianglelefteq V^g$, получаем $V^g_{F(p)} \bigcap D_p \le C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$. Тогда $V^g \bigcap D_p \le C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$. Так как $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le V^g$, то $V^g \bigcap D_p = C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$.

По теореме 2.9 локальное множество Фиттинга $\mathscr{F}$ является множеством Фишера и, значит, ввиду леммы 3.2, $\mathscr{F}$ – перестановочное множество Фиттинга. Следовательно, для $\mathscr{F}$-инъектора V^g группы G выполняются все условия леммы 3.9 и поэтому $V^g \le D(V^g \bigcap O^p(G))$. Учитывая $W = V \bigcap O^p(G)$ и $W = W^g$, получаем $W = V^g \bigcap O^p(G)$. Значит, $V^g \le WD$.

Покажем, что $V^g \le WD_p$. Так как $W \trianglelefteq V^g \le N_G(W)$, $W \trianglelefteq N_G(W)$, $D \le N_G(W)$, то $V^g / W \le WD / W$. Теперь из $W = V^g \bigcap O^p(G)$ и $V^g / V^g \bigcap O^p(G) \cong V^g O^p(G) / O^p(G)$ следует $V^g / W \in \mathrm{N}_p$. По лемме 3.7 выполняется $WD_p / W = (W_p D_p) W / W = (WD)_p W / W \in Syl_p(WD / W)$.

Следовательно, $(V^g / W)^{wdW} \le WD_p / W$ для некоторого элемента $wdW \in WD / W$, где $w \in W$ и $d \in D$. Так как V^g – π-связная группа, $\sum \square\ V^g$, и, ввиду леммы 3.6, $V^g \,\mathrm{pr}\, G$, то по лемме 3.8 $D \le N_G(V^g)$. Значит, $V^g / W = (V^g / W)^{wdW} \le WD_p / W$ и поэтому $V^g \le WD_p$.

Учитывая $V^g \le WD_p$ и $V^g \bigcap D_p = C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$, получаем $V^g \le V^g \bigcap WD_p = W(V^g \bigcap D_p) = W \cdot C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)})$. Тогда из $C_{D_p}(V^g / V^g_{F(p)}) \le Y$ следует $V^g \le WY$. Ввиду выбора V, получаем $V^g \le WY \le V$. Таким образом, $V^g = WY = V$ и $\sum \square\ V$. Теорема доказана.

Литература

1. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. –1963. – Bd. 80, № 4. – P. 300–305.

2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin. – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

3. Gaschütz, W. Selected topics in the theory of soluble groups. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Austral. Math. Soc. / W. Gaschütz. – Canberra, 1969.

4. Fischer, B. Injektoren endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. –1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.

5. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков – Конечные группы. – Минск : Наука и техника, 1975. - С. 207–212.

6. Doerk, K. Zur Theorie der Formationen endlichen auflösbaren Gruppen / K. Doerk // J. Algebra. – 1969. – Vol. 13, № 3. – P. 345–373.

7. D’arcy, P. F-Abnormality and the theory of finite solvable groups / P. D’arcy // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28. – P. 342–361.

8. Воробьев, Н.Т. О построении некоторых классов формаций / Н.Т. Воробьев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп : сб. науч. тр. / Ин-т математики АН БССР, Труды Гомельского семинара ; под ред. В.И. Сергиенко. – Минск : Наука и техника, 1984. – С. 39–47.

9. Загурский, В.Н. Инъекторы локальных классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2010. – № 4 (58). – С. 17–20.

10. Гольберг, П.А. Холловские θ-базы конечных групп / П.А. Гольберг // Известия высших учебных заведений. – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.

11. Сементовский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Весн. Віцебс. дзярж. ун-та. – 2000. – № 3. – С. 55–59.

12. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

13. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журн. – 1996. – Том 37, № 6. – С. 1296–1302.

14. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

15. Lockett, F.P. On the Theory of Fitting Classes of finite and soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 103–115.

16. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных π-разрешимых групп для произведений и пересечений классов Фиттинга / В.Г. Сементовский // Весн. Віцебс. дзярж. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 79–84.

17. D'arcy, P. Locally defined fitting classes / P. D'arcy // J. Austral. Math. Soc. – 1975. – Vol. 20, Series A. – P. 25–32.

Витебский государственный
университет им. П.М. Машерова

Поступила в редакцию 15.09.2014