

## АППАРАТНЫЙ КОНТУР НЕИДЕАЛЬНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ—ПЕРО. I

В. В. Дунаев, А. Г. Жиглинский и В. В. Кучинский

Впервые рассчитано распределение яркости в интерференционной картине эталона Фабри—Перо при совместном влиянии на нее неравномерного освещения интерферометра, непараллельности зеркал и размера выходной диафрагмы, вырезающей центральное пятно интерференционной картины. Задача решена для зеркал круглой и прямоугольной формы.

Целью настоящей работы является расчет результата совместного влияния на аппаратную функцию интерферометра Фабри—Перо (ИФП) неравномерной освещенности зеркал (или эквивалентное этому в ряде случаев влияние зонной чувствительности ФЭУ), наклона зеркал и выходной диафрагмы, выделяющей центральное пятно интерференционной картины. Оценки показывают, что влияние каждого из этих факторов является значительным и соизмеримым. Различные частные случаи этой задачи (и в предположении равномерной освещенности зеркал ИФП) исследованы в работах [1-7]. Рассматриваемая задача соответствует такому реальному случаю, когда влияние на аппаратный контур ошибок в изготовлении зеркал ИФП значительно меньше, чем влияние на аппаратный контур разъюстировки интерферометра.

Неидеальный ИФП целесообразно представить как совокупность элементарных идеальных интерферометров [1-7] разной толщины. Припишем каждому элементарному ИФП весовую функцию, пропорциональную величине освещенности поверхности  $s$  ИФП в данной точке  $\Phi(s)$ . Тогда нормированную на максимальное значение (при отсутствии наклона зеркал и равномерной освещенности) яркость интерференционной картины можно записать, используя результаты [1], в виде

$$I(\gamma) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \int_s \cos [2\pi\psi(s, \gamma)] \Phi(s) ds \right\} \left[ \int_s \Phi(s) ds \right]^{-1}, \quad (1)$$

здесь  $\gamma = 2t/\lambda$ ,  $t$  — толщина ИФП,  $\lambda$  — длина световой волны.

Интегрирование ведется по поверхности  $s$  зеркал ИФП. Считается, что световой поток падает нормально к поверхности зеркал. Остальные предположения, принятые при написании (1), аналогичны тем, при которых проводилось рассмотрение в работах [1, 2, 4-7]. Влияние на аппаратную функцию круглой диафрагмы с радиусом  $\rho$ , расположенной в фокусе объектива камеры ИФП с фокусным расстоянием  $F$ , можно легко учесть, интегрируя (1) по частоте ( $\gamma = 2t\nu/c$ ) в пределах от  $\nu - \theta\nu_{\text{эт}}$  до  $\nu + \theta\nu_{\text{эт}}$ , где  $\nu$  — частота световой волны,  $\nu_{\text{эт}}$  — постоянная эталона,  $\theta$  — спектральная полуширина диафрагмы, выраженная в долях порядка  $\theta = \frac{1}{4} \frac{\nu}{\nu_{\text{эт}}} \left( \frac{\rho}{F} \right)^2$  [1, 4].

Для характеристики степени отклонения пластин ИФП от параллельности удобно использовать параметр  $\beta = 2a/\lambda$ , где  $a$  — амплитуда клина (рис. 1), который определяет дополнительную разность хода в до-



лях порядка, добавляющуюся к величине  $\gamma$ . Результирующий фазовый сдвиг  $\psi(\gamma, \beta, s)$  в (1) отсюда равен

$$\psi(\gamma, \beta, s) = \pi\gamma + \pi\beta r \cos \varphi, \quad (2)$$

полярная координата  $r$  нормирована на радиус круглого зеркала. Интеграл в (1) при фазовом сдвиге (2) может быть вычислен для широкого класса функций освещенности интерферометра  $\Phi(s)$  с использованием интегралов от функции Бесселя  $J_0(z)$  нулевого порядка. Так, для независимых от угла  $\varphi$  распределений освещенности

$$I(\gamma, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n\gamma \int_0^1 r\Phi(r) J_0(2\pi\beta r) dr \right\} \left[ \int_0^1 r\Phi(r) dr \right]^{-1}. \quad (3)$$

Практически любое распределение освещенности  $\Phi(r)$  для ИФП с круглыми зеркалами можно представить в виде линейных комбинаций функций Бесселя первого рода  $J_\mu(z)$  порядка  $\mu$  или параболических функций типа  $(1-r^2)^\mu$ .

Удобно провести расчеты для

$$\Phi(r) = c_1 + c_2(1-r^2)^{\mu/2} J_\mu(b\sqrt{1-r^2}), \quad (4)$$

$c_1, c_2, b$  — параметры, с помощью которых можно подогнать функцию  $\Phi(r)$  под существующую ситуацию.

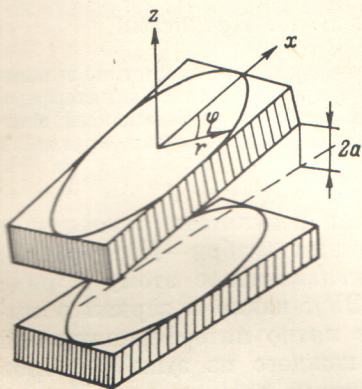


Рис. 1. К выбору системы координат.

Введем функцию  $\Lambda_\mu(z)$ , определяемую равенствами

$$\Lambda_\mu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\mu \Gamma(\mu+1) J_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+k)k!} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Функции  $\Lambda_\mu(z)$ , через которые выражаются результаты наших расчетов, затабулированы в [8]. При распределении освещенности (4) получается следующее выражение распределения яркости в интерференционной картине:

$$I(\gamma, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \times \left\{ 1 + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n\gamma \left[ c_1 \Lambda_1(2\pi n\beta) + c_2 \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \Lambda_{\mu+1} \sqrt{(2\pi n\beta)^2 + b^2} \frac{1}{\Gamma(\mu+2)} \right]}{c_1 + c_2 \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \frac{\Lambda_{\mu+1}(b)}{\Gamma(\mu+2)}} \right\}. \quad (6)$$

Так как  $|\Lambda_\mu(z)| \leq 1$ , то появление  $\Lambda_\mu(z)$  под знаком суммы (т. е. введение разбюстировки), вообще говоря, улучшает сходимость ряда. Для частного случая равномерной освещенности  $c_1=1, c_2=0$  выражение (6) совпадает с полученным ранее результатом [2]. При пропускании интерференционной картины (6) через круглую выходную диафрагму получаем

$$I(\gamma, \beta, \theta) = \frac{1-R}{1+R} \times \left\{ 1 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n\gamma \Lambda_{1/2}(2\pi n\theta) \left[ c_1 \Lambda_1(2\pi n\beta) + c_2 \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \frac{\Lambda_{\mu+1} \sqrt{(2\pi n\beta)^2 + b^2}}{\Gamma(\mu+2)} \right]}{c_1 + c_2 \left(\frac{b}{2}\right)^\mu \frac{\Lambda_{\mu+1}(b)}{\Gamma(\mu+2)}} \right\}. \quad (7)$$



В частном случае  $\beta \rightarrow 0$  приходим к известному распределению яркости для идеального ИФП с круглой выходной диафрагмой [1, 4].

При рассмотрении прямоугольных пластин, расположенных под углом друг к другу (такая ситуация реализуется, когда апертура установки ограничивается диспергирующим элементом), удобнее использовать декартовы координаты. В этом случае фазовый сдвиг  $\phi(\gamma, \beta, x, y) = \pi\gamma + \pi\beta x$ . Для функции освещенности  $\Phi(x, y) = c_1 + c_2(x^2 + y^2)$  аппаратная функция ИФП с прямоугольными пластинами, расположенными под углом, и с круглой диафрагмой, вырезающей центральное пятно интерференционной картины, оказывается равной

$$I(\gamma, \beta, \theta) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n \gamma \Lambda_{1/2}(2\pi n \beta) \left[ \Lambda_{1/2}(2\pi n \beta) \left( c_1 + \frac{4}{3} c_2 \right) + \frac{2c_2}{(2\pi n \beta)^2} (\Delta^{-2/3}(2\pi n \beta) - \Lambda_{1/2}(2\pi n \beta)) \right]}{c_1 + \frac{2}{3} c_2} \right\}. \quad (8)$$

Поставленная задача решена в общем виде для наиболее интересных вариантов выбора освещенности  $\Phi(x)$ . Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, не исследованные подробно в предыдущих работах. Для случая, когда возможно принимать во внимание только наклон пластин ( $\theta=0$ ), получим из формулы (7) (круглые пластины с равномерной освещенностью)

$$I(\gamma, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n \gamma \Lambda_1(2\pi n \beta) \right\}. \quad (9)$$

Отсюда максимальное значение нормированной яркости интерференционной картины для круглых зеркал

$$I_{\max} = I(0, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \Lambda_1(2\pi n \beta) \right\}. \quad (10)$$

Для практически интересных малых значений  $\beta \ll 1$  справедлива простая оценка снизу для  $I_{\max}$

$$I_{\max} = \frac{1}{\eta} \left[ \sqrt{(1+R)^2 + 4\eta} - (1+R) \right] - \frac{1-R}{1+R}, \quad \text{где } \eta = \left[ \frac{\pi \beta (1+R)}{1-R} \right]^2. \quad (10')$$

Заменяя при  $\beta \ll 1$  суммирование в (10) интегрированием по  $n$ , можно получить для  $I_{\max}$  оценку сверху

$$I_{\max} = \frac{2}{\eta} (\sqrt{1+\eta} - 1). \quad (10'')$$

При  $R=0.85 \div 0.95$  отличие оценок (10') и (10'') от точного значения (10) не превышает 8% для  $\beta \leq 0.1$ . Как известно из экспериментальных наблюдений, наличие клина слабо влияет на значение минимальной яркости интерференционной картины. Действительно, полагая  $\beta \leq 0.1$ , из (9) получаем

$$I_{\min} = I(1/2, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-R)^n \Lambda_1(2\pi n \beta) \right] \approx \left( \frac{1-R}{1+R} \right)^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\pi \beta}{1+R} \right)^2 3R \right\}. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) позволяют просто вычислить пропускание в максимуме и минимуме и контрастность ИФП с круглыми зеркалами, накло-



ненными относительно друг друга. Для ИФП с зеркалами прямоугольной формы из (8) в частном случае  $\theta=0$ ,  $c_2=0$  получим

$$I(\gamma, \beta) = \frac{1-R}{1+R} \frac{1}{2\pi\beta} [G(\pi\gamma + \pi\beta) - G(\pi\gamma - \pi\beta)] \quad (12)$$

[мы ввели здесь определение  $G(z) = \text{arctg}(1 + R \text{tg } z)$ ]. Можно показать, что эта формула эквивалентна аналогичному результату работы [3] для зеркал прямоугольной формы при наличии клина.

Заметим, что результат свертки с прямоугольной функцией спектрального пропускания [т. е. учет диафрагм для ИФП с круглыми зеркалами, формула (7) с  $\beta=0$ ] и выражение для яркости интерференционной картины ИФП с прямоугольными пластинами при наличии клина (12) даются одной и той же функцией типа (12). Таким образом, физически ИФП с прямоугольными пластинами, наклоненными под углом друг к другу (угол наклона  $\alpha = \beta\lambda/D$ , где  $D$  — длина пластины в направлении наклона), эквивалентен идеальному ИФП с круглой выходной диафрагмой. Наклон пластин для ИФП с зеркалами прямоугольной формы на угол  $\alpha$  эквивалентен свертке с прямоугольной функцией спектрального пропускания  $\Omega(\nu)$  [ $\Omega(\nu_0 - \nu) = 0$  при  $\nu < \nu_0 - \beta\nu_{\text{эп.}}$ ,  $\nu > \nu_0 + \beta\nu_{\text{эп.}}$  и  $\Omega(\nu_0 - \nu) = 1$  для  $\nu_0 - \beta\nu_{\text{эп.}} \leq \nu \leq \nu_0 + \beta\nu_{\text{эп.}}$ ], т. е. эквивалентен действию на идеальный ИФП круглой диафрагмы со спектральной полушириной  $\beta\nu_{\text{эп.}}$ .

К расчету яркости интерференционной картины по формуле (13)

$f(s)$	$\chi_1(z)$	$\chi_2(z)$
Круглые зеркала		
$(1-r^2)^{\mu/2} J_{\mu}(b\sqrt{1-r^2})$	$\Delta_1(z)$	$\frac{(b/2)^{\mu} \Delta_{\mu+1}(\sqrt{z^2+b^2})}{\Gamma(\mu+2)}$
$(1-r^2)^{\mu}$	$\Delta_1(z)$	$\frac{\Delta_{\mu+1}(z)}{\mu+1}$
$\cos(2\pi hx)$	$\Delta_1(z)$	$\frac{1}{2} [\Delta_1(h+z) + \Delta_1(h-z)]$
$\cos(2\pi hy)$	$\Delta_1(z)$	$\Delta_1(\sqrt{h^2+z^2})$
$(1-x^2)$	$\Delta_1(z)$	$\frac{3}{4} \Delta_2(z)$
$(1-y^2)$	$\Delta_1(z)$	$\Delta_1(z) - \frac{1}{4} \Delta_2(z)$
Прямоугольные зеркала		
$x^2 + y^2$	$\Delta_{1/2}(z)$	$\Delta_{1/2}(n\beta) \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{(n\beta)^2} \right) +$ $+ \Delta_{-1/2}(n\beta) \frac{2}{(n\beta)^2}$

Можно отметить еще один частный случай неравномерной освещенности ИФП с круглыми пластинами при наличии клина, когда  $\Phi(r) = c_1 + c_2(1-r^2)^{\mu}$  при  $\mu = -1/2$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ . Для этого варианта получим, что интенсивность снова задается формулой (12), т. е. ИФП с круглыми пластинами, расположенными под углом друг к другу, и имеющий возрастающую освещенности от центра к краям по закону  $(1-r^2)^{-1/2}$ , эквивалентен



идеальному ИФП, свернутому с прямоугольной функцией спектрального пропускания.

Запишем наши конечные результаты для аппаратного контура ИФП с круглыми и прямоугольными зеркалами в общем виде

$$I(\gamma, \beta, \theta) = \frac{1-R}{1+R} \left\{ 1 + \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos 2\pi n \gamma \Delta_{1/2} (2\pi n \theta) [c_1 \chi_1 (2\pi n \beta) + c_2 \chi_2 (2\pi n \beta)]}{c_1 \chi_1 (0) + c_2 \chi_2 (0)} \right\}, \quad (13)$$

вид функций  $\chi_1(z)$ ,  $\chi_2(z)$  зависит от формы пластин и от выбора функции освещенности  $\Phi(s) = c_1 + c_2 f(s)$ . В таблице приведены различные варианты задания  $f(x)$  (причем предполагается, что ось  $x$  в декартовых координатах идет вдоль направления наклона пластин) и даны соответствующие выбранному виду  $f(s)$  выражения для  $\chi_1(2\pi n \beta)$  и  $\chi_2(2\pi n \beta)$ . Подставляя  $\chi_1, \chi_2$  в общую формулу (13), можно рассчитать аппаратный контур для интересующего нас варианта.

Можно предположить интегральную форму задания контура, которая может оказаться более удобной для использования при расчете. При параболической зависимости освещенности зеркал ИФП от радиуса  $f(s) = x^2 + y^2 = r^2$ , например, результат запишется с использованием интегрального оператора

$$\hat{A}\psi \equiv \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-1}^1 [G(\pi\beta x + \pi\gamma + \pi\theta) - G(\pi\beta x + \pi\gamma - \pi\theta)] dx.$$

Тогда распределение яркости проходящего через

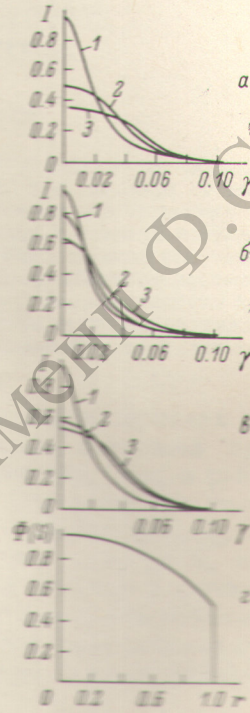


Рис. 2.

а-г — влияние на аппаратный контур ИФП степени наклона пластин  $\beta$ , полуширины диафрагмы  $\theta$  и неравномерной освещенности при  $R=0.9$ . з — вид распределения освещенности ИФП, для которого рассчитан рисунок, в. Цифры на рисунке соответствуют следующим значениям параметров: а — 1 —  $\beta=0$ , 2 —  $\beta=0.04$ , 3 —  $\beta=0.06$  при  $\theta=0$ ,  $c_2=0$ ; б — 1 —  $\theta=0$ , 2 —  $\theta=0.01$ , 3 —  $\theta=0.03$  при  $\beta=0$ ,  $c_2=0$ ; в — 1 —  $\beta=0$ ,  $c_2=0$ , 2 —  $c_2=-0.5$ , 3 —  $c_2=0$  при  $\beta=0.04$ , г — 0.

ИФП света при наклоненных пластинках и последующем дифрактировании интерференционной картины круглой диафрагмой дается формулой

$$I(\gamma, \beta, \theta) = \frac{1-R}{1+R} (c_1 \hat{A}\psi_1 + c_2 \hat{A}\psi_2) / (c_1 N_1 + c_2 N_2), \quad (14)$$

где  $N_i = \int_{-1}^1 \psi_i(x) dx$ . Для круглых пластин  $\psi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\psi_2 = \frac{(2x^2+1)\sqrt{1-x^2}}{3}$ ; для пластин прямоугольной формы  $\psi_1=1$ ,  $\psi_2(x) = x^2 + 1/3$ .

Рис. 2 построен с помощью полученных в работе формул и иллюстрирует степень влияния каждого из параметров  $\beta$ ,  $\theta$  и неравномерной освещенности на вид аппаратного контура. Из рис. 2 видно, что влияние каждого из этих факторов является значительным и соизмеримым.

Предложенные формулы могут быть использованы для теоретических и практических расчетов для применяемых в спектроскопии высокой разрешающей силы ИФП. Для расчета аппаратного контура при различном выборе  $\beta$ ,  $\theta$  и функции освещенности у авторов есть программы для ЭВМ.

Авторы благодарны Э. Н. Фафуриной за ценные советы.



## Литература

- [1] R. J. Chabbal. J. Rech. Centre Nat. Rech. Sci. Lab. Belovue (Paris), 24, 138, 1953.
- [2] R. V. Hill. Opt. Acta, 10, 141, 1963.
- [3] М. Хащан. Изв. вузов, физика, № 9, 64, 73, 1967.
- [4] Р. И. Семенов, Э. Е. Фрадкин, М. П. Чайка. Опт. и спектр, 7, 785, 1959.
- [5] J. V. Ramsay. Appl. Opt., 8, 569, 1969.
- [6] F. Bayer-Helms. Zs. angewandte physik., 15, 418, 1963.
- [7] G. Hernandez. Appl. Opt., 5, 1745, 1966; 9, 1591, 1970.
- [8] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. М., 1968.

Поступило в Редакцию 6 июля 1976 г.  
В окончательной редакции 15 сентября 1977 г.

---

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф.СКОРИН