

## О ПАРАХ ЛОКЕТТА И ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Д. Ланцетова

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова*

## ON LOCKETT PAIRS AND LOCKETT CONJECTURE FOR $\sigma$ -LOCAL FITTING CLASSES

E.D. Lantsetova

*P.M. Masherov Vitebsk State University*

**Аннотация.** Для каждого непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  Локетт определил наименьший класс Фиттинга  $\mathfrak{F}^*$ , содержащий  $\mathfrak{F}$ , такой, что  $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$  для всех групп  $G$  и  $H$ , и класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , как пересечение всех непустых классов Фиттинга  $\mathfrak{X}$ , для которых  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ . Парой Локетта непустых классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  называют такую упорядоченную пару  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ , для которой справедливо равенство  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ . Если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{F}$  – класс Локетта, то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ . В настоящей работе в универсуме  $\mathfrak{S}$  всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда  $\mathfrak{F}$  обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для  $\mathfrak{F}$  подтверждена гипотеза Локетта.

**Ключевые слова:**  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга, пара Локетта, гипотеза Локетта.

**Для цитирования:** Ланцетова, Е.Д. О парах Локетта и гипотезе Локетта для  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга / Е.Д. Ланцетова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 76–82. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_76](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76) – EDN: WQAZZC

**Abstract.** For each nonempty Fitting class  $\mathfrak{F}$ , Lockett defined the smallest Fitting class  $\mathfrak{F}^*$  containing  $\mathfrak{F}$  such that  $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$  for all groups  $G$  and  $H$  and the Fitting class  $\mathfrak{F}$ , as the intersection of all nonempty Fitting classes  $\mathfrak{X}$  for which  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ . Lockett pair of nonempty Fitting classes  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$  is an ordered pair  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  such that  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ . If  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$  and  $\mathfrak{F}$  is a Lockett class, then  $\mathfrak{F}$  is said to satisfy Lockett conjecture in  $\mathfrak{H}$ . In the present paper, in the universe  $\mathfrak{S}$  of all finite soluble groups, the methods for constructing Lockett pairs are described for the case when  $\mathfrak{F}$  is a generalized local Fitting class, and, in particular, for  $\mathfrak{F}$  confirmed Lockett conjecture.

**Keywords:**  $\sigma$ -local Fitting class, Lockett pair, Lockett conjecture.

**For citation:** Lantsetova, E.D. On Lockett pairs and Lockett conjecture for  $\sigma$ -local Fitting classes / E.D. Lantsetova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 2 (51). – P. 76–82. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2022\\_2\\_51\\_76](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_2_51_76) (in Russian). – EDN: WQAZZC

### Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными и разрешимыми. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Классом групп называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой  $G$  и все группы изоморфные  $G$ . Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется классом Фиттинга, если  $\mathfrak{F}$  замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Если  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга, то в любой группе  $G$  существует наибольшая нормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа, которую называют  $\mathfrak{F}$ -радикалом  $G$  и обозначают  $G_{\mathfrak{F}}$ .

В теории конечных разрешимых групп многие известные результаты посвящены исследованию структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп при помощи операторов « $*$ » и « $*$ », которые были определены Локеттом [2]. Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  оператор « $*$ » сопоставляет наименьший класс Фиттинга  $\mathfrak{F}^*$ , содержащий  $\mathfrak{F}$  такой, что  $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$  для всех групп  $G$  и  $H$  и оператор « $*$ », сопоставляющий  $\mathfrak{F}$  класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_* = \bigcap \{ \mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \text{ – непустой класс Фиттинга и } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^* \}$ . Если  $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$ , то  $\mathfrak{F}$  называется классом Локетта.

Возможность применения операторов Локетта для изучения строения классов Фиттинга в терминах радикалов обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, семейство классов Локетта обширно, поскольку любой класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов или относительно подпрямых произведений, и любой класс Фишера [1, теорема X.1.25] являются классами Локетта. Во-вторых, Локеттом [2] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов групп под названием

**Гипотеза Локетта** [2, проблема стр. 135].  
Верно ли, что для каждого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  существует нормальный класс Фиттинга  $\mathfrak{X}$  такой, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$ ?

Напомним, что непустой класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называется *нормальным*, если для любой группы  $G$  ее  $\mathfrak{F}$ -радикал является максимальной из подгрупп  $G$ , принадлежащих  $\mathfrak{F}$ .

Класс  $\mathfrak{F}$  называют *наследственным*, если  $\mathfrak{F}$  замкнут относительно взятия подгрупп. Брайс и Косси [3] доказали справедливость гипотезы Локетта для всех локальных наследственных классов Фиттинга и установили, что любой класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{E}_*$ , где  $\mathfrak{E}_*$  – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Развитие и обобщение указанных результатов [3, раздел 5] привело к определению понятия пары Локетта.

Упорядоченная пара  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  называется *парой Локетта* или просто *L-парой*, если справедливо равенство

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$$

Заметим что, если  $\mathfrak{F}$  – класс Локетта,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  – L-пара, то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта, т. е. гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ . В частности, если  $\mathfrak{H}$  – класс всех разрешимых групп, т. е.  $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ , и  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  – L-пара, то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта.

Брайсом и Косси [3], [1, теорема X.6.12] было установлено, что если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – локальные наследственные классы Фиттинга, то  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  – L-пара. Построению L-пар для случая, когда  $\mathfrak{F}$  – локальный класс вида  $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$  или  $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_\pi$  ( $\mathfrak{X}$  – произвольный непустой класс Фиттинга) и  $\mathfrak{H}$  – класс Фиттинга, замкнутый относительно  $\mathfrak{F}$ -инъекторов специального вида, была посвящена работа Бейдлемана и Хаука [4], [1, теоремы X.6.8 и X.6.11]. Кроме того, Бризоном [5] было доказано, что классы Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  образуют L-пару и  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ , если  $\mathfrak{F}$  – локальный класс Фиттинга всех  $\pi$ -групп и  $\mathfrak{H}$  – класс Фиттинга, замкнутый

относительно холловых  $\pi$ -подгрупп. Дёрком и Хоуксом [1] было показано, что  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  является L-парой в случае, когда  $\mathfrak{F}$  либо локальный наследственный класс Фиттинга, либо класс Фиттинга, определяемый локально функцией, все значения которой постоянны, и  $\mathfrak{H}$  – локальный наследственный класс Фиттинга. Прогресс в данном направлении исследований был достигнут в работе Н.Т. Воробьева [6], где была подтверждена гипотеза Локетта для произвольного локального класса Фиттинга при помощи построения L-пары для случая, когда класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  локален и класс Фиттинга  $\mathfrak{H}$   $f$ -инъекторно замкнут ( $f$  – функция, определяющая локально  $\mathfrak{F}$ ). Заметим также, что в универсуме  $\mathfrak{S}^\pi$  всех  $\pi$ -разрешимых групп в работе [7] были построены L-пары для локального класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$ , состоящего из всех групп таких, холловы  $\pi$ -подгруппы которых нильпотентны.

Все это приводит к задаче нахождения новых семейств классов Фиттинга, специальным случаем которых является семейство локальных классов Фиттинга, для которых упорядоченная пара  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  является L-парой, в частности, описания классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$ , для которых  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .

В настоящей работе такая задача решена для случая  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга. Ориентиром для таких исследований является  $\sigma$ -метод, предложенный Скибой [8], для изучения строения групп и формаций [9]–[11], который был дуализирован для классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел,  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  и  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ . Символом  $\pi(n)$  обозначим множество всех простых делителей числа  $n$ ,  $\pi(G) = \pi(|G|)$  – множество всех простых делителей группы  $G$ . Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение  $\mathbb{P}$ , т. е.  $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ ,  $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ ;  $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$  и  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ . Если  $\mathfrak{F}$  – класс групп, то символом  $\sigma(\mathfrak{F})$  обозначают множество

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \cup \{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}.$$

Всякое отображение вида  $f : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$  называется  $\sigma$ -функцией Хартли или просто  $H_\sigma$ -функцией. Если  $f$  –  $H_\sigma$ -функция, то символом  $Supp(f)$  обозначают носитель  $f$ , т. е. множество всех  $\sigma_i$  таких, что  $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ .

Пусть  $LR_\sigma(f) = (G : G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$ , где  $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$  и  $\mathfrak{E}'_{\sigma_i}$  – классы всех  $\sigma_i$ -групп и всех  $\sigma'_i$ -групп

соответственно, символом  $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}, \mathfrak{E}_{\sigma_i}}$  обозначен  $\mathfrak{E}_{\sigma_i}, \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ -корадикал группы  $G$  – наименьшая нормальная подгруппа  $G$ , факторгруппа по которой  $\sigma_i$ -замкнута.

**Определение** [12]. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называется  $\sigma$ -локальным, если  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$  для некоторой  $H_{\sigma}$ -функции  $f$ . В частности, если  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , то  $\mathfrak{F}$  называют локальным классом Фиттинга.

### 1 Предварительные сведения

Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга. Напомним, что наибольшую нормальную  $\mathfrak{F}$ -подгруппу группы  $G$  называют  $\mathfrak{F}$ -радикалом  $G$  и обозначают  $G_{\mathfrak{F}}$ . Произведением  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$  классов групп  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  называют класс  $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F} \text{ и } G/N \in \mathfrak{H})$ ; произведением  $\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}$  классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  называют класс  $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ . Хорошо известно, что если  $\mathfrak{H}$  замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}$  [1, стр. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12 (a), (c)].

**Лемма 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – непустые классы Фиттинга. Тогда

- 1)  $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}}$  [1, теорема IX.1.12 (b)];
- 2) если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$ .

Класс Фиттинга, замкнутый относительно гомоморфных образов, называют радикальным гомоморфом. Радикальный гомоморф, являющийся замкнутым относительно подпрямых произведений, называют радикальной или фиттинговой формацией.

**Лемма 1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}$  [1, замечание IX.1.11];
- 2) если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M}$  – радикальный гомоморф, то  $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$  [4, лемма 5];
- 3) если  $\{\mathfrak{H}_i : i \in I\}$  – множество классов Фиттинга, то  $\bigcap_{i \in I} (\mathfrak{F}\diamond\mathfrak{H}_i) = \mathfrak{F}\diamond(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{H}_i)$  [6, лемма 4 (2)].

Мы будем использовать следующие свойства операторов Локетта, которые представляет

**Лемма 1.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга. Тогда

- 1)  $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F})_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F})^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$ , где  $\mathfrak{A}$  – класс всех абелевых групп [1, теорема X.1.15];
- 2) если  $\mathfrak{H}$  – непустой класс Фиттинга и  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{F}^*$  и  $\mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}_*$  [3, лемма 3.4, следствие 3.5].

Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга. Тогда подгруппа  $V$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -инъектором группы  $G$ , если  $V \cap N$  является максимальной подгруппой группы  $N$  среди подгрупп, входящих в  $\mathfrak{F}$  для любой субнормальной подгруппы  $N$  группы  $G$ .

**Лемма 1.4** [13, теорема 1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга. Тогда в группе  $G$  существует  $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены в  $G$ .

Напомним, что класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называется классом Фишера, если из того, что  $G \in \mathfrak{F}$ ,  $K \trianglelefteq G$ ,  $K \leq H \leq G$  и  $H/K$  –  $p$ -группа ( $p$  – простое число), следует  $H \in \mathfrak{F}$ .

**Лемма 1.5** [14, теорема 4.4]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фишера. Тогда  $\mathfrak{S}_*$  замкнут относительно взятия  $\mathfrak{F}$ -инъекторов.

Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – классы Фиттинга. Обозначим через  $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$  класс групп, который определяется следующим образом:  $G \in \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$ -инъектор группы  $G$  принадлежит  $\mathfrak{H}$ .

**Лемма 1.6** [1, теорема IX.2.3]. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – классы Фиттинга и  $\pi \subseteq \mathbb{P}$ . Тогда  $(\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi}) \uparrow (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_{\pi})$  – класс Фиттинга.

Операция замыкания  $D_0$  для класса групп  $\mathfrak{X}$  определяется как

$$D_0(\mathfrak{X}) = (G : G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r, \text{ где } H_i \in \mathfrak{X}).$$

**Лемма 1.7** [1, лемма X.1.36]. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – классы Фиттинга такие, что  $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}$  также является классом Фиттинга, и класс  $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$  является  $D_0$ -замкнутым. Тогда  $(\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$ , в частности,  $\mathfrak{F} \uparrow \mathfrak{H}^*$  – класс Локетта.

Мы будем использовать следующую классификацию  $H_{\sigma}$ -функций  $\sigma$ -локального класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  [12]. Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$  для  $H_{\sigma}$ -функции  $f$  и  $\Pi = \text{Supp}(f)$ . Тогда  $H_{\sigma}$ -функция  $f$  называется:

- 1) приведенной, если  $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$ ;
- 2) полной в случае, когда  $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$ ;
- 3) полной приведенной, если  $f$  является одновременно полной и приведенной  $H_{\sigma}$ -функцией.

**Лемма 1.8** [12, лемма 3.2]. Каждый  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  определяется полной приведенной  $H_{\sigma}$ -функцией.

**Лемма 1.9.** Справедливы следующие утверждения:

- 1) каждый  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга является классом Фишера [12, лемма 3.3 (2)];

2) каждый  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  является классом Локетта [12, следствие 3.4].

Класс групп  $\mathfrak{X}$  называется *формацией*, если  $\mathfrak{X}$  замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

**Лемма 1.10** [15, теорема 1.1]. *Любой наследственный класс Фиттинга является формацией.*

## 2 Основные результаты

Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$  для некоторой  $H_{\sigma}$ -функции  $f$  и  $\Pi = Supp(f)$ . Класс Фиттинга  $\mathfrak{H}$  назовем  *$f$ -инъекторно замкнутым*, если  $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$  для каждого  $\sigma_i \in \Pi$ .

Случаи  $f$ -инъекторной замкнутости класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$  представляют следующие

**Примеры 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ , где  $f$  – приведенная  $H_{\sigma}$ -функция и  $\Pi = Supp(f)$ . Тогда класс Фиттинга  $\mathfrak{H}$  является  $f$ -инъекторно замкнутым в каждом из следующих случаев:

- 1)  $f(\sigma_i)$  – наследственный класс Фиттинга для всех  $\sigma_i \in \Pi$ ,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_*$  – наименьший нормальный класс Фиттинга;
- 2)  $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ , причем  $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $\mathfrak{Y}$  – наследственный класс Фиттинга;
- 3)  $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  или  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ ;
- 4)  $f(\sigma_i)$  – нормальный класс Фиттинга для всех  $\sigma_i \in \Pi$ ,  $\mathfrak{H}$  – произвольный класс Фиттинга;
- 5)  $\mathfrak{H}$  – наследственный класс Фиттинга.

Поскольку в случае 1)  $f(\sigma_i)$  – наследственный класс Фиттинга,  $f(\sigma_i)$  является классом Фишера для всех  $\sigma_i \in \Pi$ . Следовательно, по лемме 1.5 класс  $\mathfrak{H} \subseteq f(\sigma_i) \uparrow \mathfrak{H}$  для каждого  $\sigma_i \in \Pi$  и  $\mathfrak{H}$  –  $f$ -инъекторно замкнутый класс Фиттинга.

Проверим  $f$ -инъекторную замкнутость класса  $\mathfrak{H}$  в случае 2). Пусть  $G \in \mathfrak{H}$ . Тогда ввиду разрешимости группы  $G$  по лемме 1.4 в  $G$  существует  $f(\sigma_i)$ -инъектор  $V$  для  $\sigma_i \in \Pi$ . Так как  $\mathfrak{X} \subseteq f(\sigma_i)$ , то по утверждению 2) леммы 1.1  $G_{\mathfrak{X}} \leq G_{f(\sigma_i)}$  и по определению  $f(\sigma_i)$ -инъектора  $G_{f(\sigma_i)} \leq V$ . Поскольку  $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ ,  $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ . Ввиду того, что класс Фиттинга  $\mathfrak{Y}$  наследственен и  $V/G_{\mathfrak{X}} \leq G/G_{\mathfrak{X}}$ ,  $V/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ . Так как  $G_{\mathfrak{X}} \leq V$ ,  $G_{\mathfrak{X}} \leq V$ . Следовательно,  $V/G_{\mathfrak{X}}/V_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \cong V/V_{\mathfrak{X}}$ . Отсюда  $V/V_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ , поскольку по лемме 1.10 класс  $\mathfrak{Y}$  – формация. Таким образом,  $V \in \mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$  и класс  $\mathfrak{H}$   $f$ -инъекторно замкнут.

В случае 3) если  $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$ , класс  $\mathfrak{H}$   $f$ -инъекторно замкнут ввиду

того, что каждый  $f(\sigma_i)$ -инъектор группы  $G \in \mathfrak{H}$  является  $f(\sigma_i)$ -подгруппой и, следовательно,  $\mathfrak{H}$ -подгруппой. Если же  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$  для каждого  $\sigma_i \in \Pi$ , поскольку  $H_{\sigma}$ -функция  $f$  класса  $\mathfrak{F}$  приведенная и  $\mathfrak{H}$   $f$ -инъекторно замкнут по указанному выше.

Напомним, что класс  $\mathfrak{X}$  называют *нормальным* [16], если для любой группы  $G$  ее  $\mathfrak{X}$ -инъектор является нормальной подгруппой  $G$ . Поэтому если  $G \in \mathfrak{H}$  и  $V$   $f(\sigma_i)$ -инъектор  $G$ , то  $V \in \mathfrak{H}$  и в случае 4) класс  $\mathfrak{H}$   $f$ -инъекторно замкнут.

Случай 5) тривиален.

Следующая теорема описывает построения  $L$ -пар для случая, когда  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга.

**Теорема 2.2.** *Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(F)$  –  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной  $H_{\sigma}$ -функцией  $F$  и  $\mathfrak{H}$  – класс Фиттинга. Если  $\mathfrak{H}$  –  $F$ -инъекторно замкнутый класс, то  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой.*

*Доказательство.* Так как  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ , то по утверждению 2) леммы 1.3  $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{H}_*$ . Кроме того, по утверждению 1) леммы 1.3

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Следовательно,  $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $G$  – группа из  $\mathfrak{H}$ . По лемме 1.4 в  $G$  существует  $F(\sigma_i)$ -инъектор  $V$ , где  $\sigma_i \in Supp(F) = \Pi$ . Из того, что  $V \in F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$  и  $F$  – приведенная  $H_{\sigma}$ -функция класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , вытекает  $V \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ .

Докажем справедливость равенства

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Вначале покажем, что

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Если  $G \in (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ , то ввиду утверждения 2) леммы 1.2 следует  $G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ . Следовательно,  $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i} \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  и по утверждению 2) леммы 1.3

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq (((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*)^*.$$

Так как класс Фиттинга  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  – локален, то по утверждению 2) леммы 1.9  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  является классом Локетта. Кроме того, ввиду утверждения 1) леммы 1.3  $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  и поэтому  $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  также является классом Локетта. Используя утверждение 1) леммы 1.1 и тот факт, что  $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  и  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  – классы Локетта, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 & ((G \times H)_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / (G \times H)_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})^* = \\
 & = (G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H / H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i}}^* = \\
 & = (G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i}}^* \times (H / H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})_{\mathfrak{S}_{\sigma_i}}^* = \\
 & = G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} = \\
 & = G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} = \\
 & = G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / (G \times H)_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$(G \times H)_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}^* \mathfrak{S}_{\sigma_i} = G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \times H_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \mathfrak{S}_{\sigma_i}$$

для всех групп  $G$  и  $H$ . Следовательно,  
 $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$   
 – класс Локетта и справедливо включение  
 $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $G$  – группа минимального порядка из класса  
 $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \setminus ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ .

По утверждению 2) леммы 1.1  $G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \leq G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ .

Если  $G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$  – нефраттиниевый фактор группы  $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ , то в ней существует такая максимальная подгруппа  $M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ , что

$$G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} = (G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}) (M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}).$$

По утверждению 1) леммы 1.3

$$G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \leq Z(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})$$

и, следовательно,  $M / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$  – нормальная подгруппа группы  $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}$ . По индукции

$M \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ . Поскольку

$$((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*,$$

$$G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Следовательно,  $G = G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} M \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ , что невозможно.

Пусть  $G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \subseteq \Phi(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*})$ . Из того, что  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  – насыщенная формация и

$$G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} / \Phi(G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*}) \in \mathfrak{S}_{\sigma_i},$$

следует  $G / G_{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma_i}$  и  $G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ .

Применяя утверждение 1) леммы 1.3, имеем

$$G \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Полученное противоречие завершает доказательство равенства:  $((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$ .

Далее, используя утверждение 1) леммы 1.3 и утверждение 1) леммы 1.2, получаем

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Следовательно,  $V \in ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  и поэтому

$$G \in F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Итак, справедливо включение

$$\mathfrak{H} \subseteq F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Так как  $H_{\sigma_i}$ -функция является полной, то по лемме 1.6 класс групп  $F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*$  является классом Фиттинга. Более того, по лемме 1.7 имеет место равенство:

$$F(\sigma_i) \uparrow ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^* = (F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*.$$

Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.3

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H}_* & \subseteq ((F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})^*)_* = \\
 & = (F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})_*
 \end{aligned}$$

и имеет место включение

$$(F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})_* \subseteq F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}.$$

Итак, нами установлено включение

$$\mathfrak{H}_* \subseteq F(\sigma_i) \uparrow (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}$$

для всех  $\sigma_i \in \Pi$ . Следовательно, для каждого  $\sigma_i \in \Pi$  имеет место  $F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ .

Используя утверждение 2) леммы 1.2 и ассоциативный закон умножения классов Фиттинга, получаем  $(F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma_i} \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}$ . Значит,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} (F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma_i}) & \subseteq \\
 \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\sigma_i})).
 \end{aligned}$$

Ввиду того, что  $F$  – полная  $H_{\sigma}$ -функция, определяющая класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , следует

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} (F(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}_*) \mathfrak{S}_{\sigma_i}) & = \\
 = \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} F(\sigma_i) \mathfrak{S}_{\sigma_i}) \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}) & = \\
 = \mathfrak{F} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\sigma_i}).
 \end{aligned}$$

Тогда, используя утверждение 3) леммы 1.2

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i}) \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\Pi}.$$

Так как по утверждению 1) леммы 1.2  $\mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi}$ , то  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \mathfrak{S}_{\Pi}$ . Кроме того, очевидно,  $\mathfrak{S}_{\Pi} \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \mathfrak{S}_{\Pi} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ . Следовательно,  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$  и справедливо равенство  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$ , т. е.  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой.  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(F)$  –  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной  $H_{\sigma}$ -функцией  $F$  и  $\mathfrak{H}$  – класс Фиттинга. Тогда если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .

*Доказательство.* Если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то ввиду случая 3) из примеров 2.1 класс  $\mathfrak{H}$   $F$ -инъекторно замкнут. По теореме 2.2 справедливо равенство  $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$ . Поскольку по утверждению 2) леммы 1.9  $\mathfrak{F}$  является классом Локетта,  $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$  и  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .  $\square$

### 3 Следствия

Из теорем 2.2 и 2.3 получаем следующие следствия.

**Следствие 3.1.** Любой  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта, т. е.  $\mathfrak{F}_\sigma = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_\sigma$ .

Доказательство утверждения вытекает непосредственно из теоремы 2.3 в случае, если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ .

В случае, когда  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$  – минимальное разбиение множества  $\mathbb{P}$ , получаем

**Следствие 3.2** (Воробьев [6, теорема]). Если  $F$  – полная приведенная  $H$ -функция класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $F$ -инъекторно замкнутый класс Фиттинга, то пара  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой. В частности, если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .

**Следствие 3.3** (Брайс, Косси [3, теорема 4.17]). Если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – локальные наследственные классы Фиттинга, то пара  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой. В частности, если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .

**Следствие 3.4** (Бризон [5, предложение 6.5]). Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга и  $\pi \subseteq \mathbb{P}$ . Если  $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $\mathfrak{S}_\pi$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{F}$ .

*Доказательство.* Поскольку класс Фиттинга  $\mathfrak{S}_\pi$  определяется локально  $H$ -функцией  $F$  такой, что

$$F(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

и  $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$ , класс  $\mathfrak{F}$   $F$ -инъекторно замкнут (см. пример 2.1.3). Следовательно,  $\mathfrak{S}_\pi$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{F}$  для минимального разбиения  $\sigma$  множества  $\mathbb{P}$ .

**Следствие 3.5** (Дерк, Хоукс [1, предложение X.6.10]). Пусть  $I$  – множество индексов и каждому  $i \in I$  соответствует некоторое множество простых чисел  $\pi_i$  и класс Фиттинга  $\mathfrak{X}_i$ . Пусть  $I$  – бесконечное множество такое, что для каждого конечного подмножества  $\tau$  класс Фиттинга  $\mathfrak{S}_\tau$  содержится в конечном числе классов  $\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}$ . Тогда если  $\mathfrak{H}$  – локальный наследственный класс Фиттинга и для любого  $i \in I$  класс Фиттинга  $\mathfrak{X}_i$  либо наследственен, либо  $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$  для некоторого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ , то пара классов Фиттинга  $(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой.

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{M} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'}$  и  $\mathfrak{X}_i$  – наследственный класс Фиттинга для всех  $i \in I$ . Легко видеть, что произведение наследст-

венных классов  $\mathfrak{X}_i$ ,  $\mathfrak{S}_{\pi_i}$  и  $\mathfrak{S}_{\pi_i'}$  – наследственный класс Фиттинга и поэтому  $\mathfrak{M}$  – наследственный класс Фиттинга. Следовательно, по теореме [17] класс  $\mathfrak{M}$  локален. Так как класс  $\mathfrak{H}$  наследственен, то по следствию 1 [18]  $\mathfrak{H}$   $F$ -инъекторно замкнут для  $H$ -функции  $F$  такой, что  $F(p) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i'} \cap (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{X}_j \mathfrak{S}_{\pi_j})$  для  $p \in \pi_i$ .

Если  $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{F}$  для всех  $i \in I$ , то по следствию 2 [18] класс  $\mathfrak{M}$  локален и  $\mathfrak{H}$   $F$ -инъекторно замкнут для  $H$ -функции  $F$  такой, что  $F(p) = \mathfrak{F} \mathfrak{S}_{\pi_i}$  для  $p \in \pi_i$ . Таким образом, в каждом случае по теореме 2.2  $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H})$  –  $L$ -пара.  $\square$

**Следствие 3.6** (Дерк, Хоукс [1, следствие X.6.11]). Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – классы Фиттинга и  $\mathfrak{N}$  – наследственный. Тогда пара  $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$  является  $L$ -парой, где  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп. В частности,  $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$  удовлетворяет гипотезе Локетта в  $\mathfrak{H}$ .

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2.2 при минимальном разбиении  $\sigma$  множества  $\mathbb{P}$ , поскольку класс  $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$  – локальный, определяемый  $H$ -функцией  $F$  такой, что  $F(p) = \mathfrak{F}$  для всех  $p \in \mathbb{P}$  и класс  $\mathfrak{H}$   $F$ -инъекторно замкнут.

### Заключение

В настоящей работе в универсуме  $\mathfrak{S}$  всех конечных разрешимых групп описаны методы построения пар Локетта для случая, когда  $\mathfrak{F}$  обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, для  $\mathfrak{F}$  подтверждена гипотеза Локетта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Lockett, F.P. The Fitting class  $\mathfrak{F}^*$  / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – P. 131–136.
3. Bryce, R.A. A problem in the Theory of Normal Fitting Classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141. – P. 99–110.
4. Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett – Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – P. 161–167.
5. Brison, O.J. Hall operators for Fitting classes / O.J. Brison // Arch. Math. (Basel). – 1979. – Vol. 33, № 1. – P. 1–9.
6. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
7. Lujin Zhu. On Lockett Pairs and Lockett Conjecture for  $\pi$ -Soluble Fitting Classes / Lujin Zhu, Nanying Yang, N.T. Vorob'ev // Bull. Malays. Sci. Soc. (2). – 2013. – Vol. 36, № 3. – P. 825–832.

8. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
9. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
10. Skiba, A.N. Some characterizations of finite  $\sigma$ -soluble  $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
11. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
12. Guo, W. On  $\sigma$ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.
13. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
14. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck // J. Algebra. – 1979. – Vol. 53, № 3. – P. 395–401.
15. Bryce, R.A. Subgroup closed Fitting classes are formations / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1982. – Vol. 91, № 2. – P. 225–258.
16. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Vol. 118. – P. 1–8.
17. Воробьев, Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 3–8.
18. Hauck, P. A characterization of dominant local Fitting classes / P. Hauck, V.N. Zahursky // J. Algebra. – 2012. – Vol. 358. – P. 27–32.

Поступила в редакцию 03.02.2022.

**Информация об авторах**

Ланцетова Екатерина Дмитриевна – аспирантка