УДК 621.373 : 535

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОЦЕССАМ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ

А. А. Коростелев и *В. Ф. Фатеев*

Выведены три формы ковариантных материальных уравнений электромагнитного поля в диэлектрических средах, движущихся в системах отсчета с произвольной метрикой. При этом одна из форм получена путем введения новых тензоров, характеризующих электромагнитные свойства среды: ковариантного и контравариантного тензоров поляризации. На основе приведенных уравнений вычислен частотный сдвиг и разность времени распространения встречных волн ускоренно движущегося и произвольно вращающегося в гравитационном поле кольцевого резонатора, заполненного движущейся невзаимной средой. Полученные зависимости обобщают и уточняют известные результаты, справедливые в отсутствие гравитационного поля. При этом гравитационный эффект наиболее просто измеряется в случае полностью увлекаемой среды.

Введение

Строгое описание процессов в кольцевом резонаторе, заполненном преломляющей средой, возможно лишь в рамках общей теории относительности. Однако методы, развитые в известных работах [1–6], учитывают лишь эффект вращения первого порядка и не позволяют рассчитать влияние гравитационных полей и линейных ускорений. Попытка учесть гравитационные эффекты [7, 8] дала ошибочный результат, поскольку использовались материальные соотношения, справедивые лишь для статических гравитационных полей и непригодные для описания вращающихся систем отсчета.

Ниже развиваются методы, позволяющие с высокой точностью рассчитать запаздывание и частотные сдвиги встречных волн в кольцевом резонаторе, заполненном движущейся средой и произвольно перемещающемся в постоянном гравитационном поле.

Электродинамика движущихся сред в системах отсчета с произвольной метрикой

Для описания электромагнитной волны в среде, движущейся в неинерциальной системе отсчета, необходимо определить форму материальных уравнений и уравнений Максвелла.

Ковариантные уравнения Максвелла для поля в диэлектрической среде, справедливые в произвольной системе отсчета, имеют вид [9, 10]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,H^{ik}\right)=0,\quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0, \tag{1}$$

где H^{ik} и F_{ik} — контравариантный и ковариантный тензоры электромагнитного поля; g — определитель четырехмерного метрического тензора.

Здесь и далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, греческие — 1, 2, 3.

Система уравнений (1) должна быть дополнена материальными уравнениями, выражающими связь между полями и индукциями. Для инерциальных систем известно несколько форм этих уравнений и основными из них являются уравнения Минковского, справедливые для изотропных сред,

$$\left.\begin{aligned} H_{ik}u_k &= \varepsilon F_{ik}u_k, \\ F_{ik}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k &= \mu\left(H_{ik}u_l + H_{kl}u_i + H_{li}u_k\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости покоящейся среды; u_k—4-вектор скорости среды, причем компоненты тензоров и векторов поля связаны по схеме

$$F_{ik} \to (\mathbf{E},\ \mathbf{B}),\quad H_{ik} \to (-\mathbf{D},\ \mathbf{H}). \tag{3}$$

В ряде случаев более удобны материальные соотношения в формулировке, предложенной Таммом [11],

$$F_{ik} = S_{il}S_{km}H^{lm} \quad \text{или} \quad H^{ik} = S^{il}S^{km}F_{lm}, \tag{4}$$

где S_{il} — тензор диэлектрической и магнитной проницаемости среды с ненулевыми компонентами

$$S_{00} = 1/\varepsilon\sqrt{\mu},\quad S_{\alpha\beta} = -\sqrt{\mu}, \tag{5}$$

причем

$$S_{il}S^{lk} = \delta_i^k, \tag{6}$$

δ_i^k — единичный тензор второго ранга. При описании поля в движущейся среде применение преобразований Лоренца к компонентам тензоров поля или среды дает одинаковые результаты.

Третья тензорная формулировка материальных уравнений получается на основе известного представления о поляризации среды электрическим и магнитным полем [12]

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},\quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E},\quad \mathbf{M} = \chi\mathbf{H} \tag{8}$$

векторы электрической и магнитной поляризации; $\varkappa$ и χ — диэлектрическая и магнитная восприимчивости среды. В частном случае линейной поляризации

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\mathbf{E},\quad \mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\,\mathbf{H}.$$

Тензорное обобщение уравнений (7) имеет вид [13]

$$H_{ik} = F_{ik} + 4\pi M_{ik}, \tag{9}$$

где компоненты антисимметричного 4-тензора поляризации M_{ik} связаны с 3-векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ по схеме

$$M_{ik} \to (\mathbf{P},\ -\mathbf{M}). \tag{10}$$

Поскольку для волны, распространяющейся в произвольной системе отсчета вне материальной среды, справедливы соотношения [9, 10]

$$F_{ik} = g_{il}g_{km}H^{lm} \quad \text{или} \quad H^{ik} = g^{il}g^{km}F_{lm}, \tag{11}$$

для получения искомых ковариантных материальных уравнений поля в среде, находящейся в неинерциальной системе отсчета, необходимо попарно обобщить уравнения (2), (4) и (8), с одной стороны, и (11), с другой стороны. Для решения этой задачи установим соотношения между компонентами тензоров H^{ik} и F_{ik} и составляющими векторов поля в виде

$$\left.\begin{aligned} D^\alpha &= -\sqrt{-g_{00}}\,H^{0\alpha},\quad E_\alpha = F_{0\alpha}, \\ H_\alpha &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{\alpha\beta\delta}H^{\beta\delta},\quad B^\alpha = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\delta}F_{\beta\delta}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $e_{\alpha\beta\delta}$ — антисимметричный псевдотензор третьего ранга; γ — определитель трехмерного метрического тензора. Тогда ковариантные уравнения Максвелла (1) для систем отсчета с произвольной постоянной метрикой в векторном виде сохраняют традиционную форму

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Отсюда следует, что вся информация о метрике пространства—времени должна содержаться в форме материальных уравнений.

Воспользуемся также следующими соображениями. Первая и вторая пары векторных уравнений Максвелла (12) с нулевыми правыми частями с точностью до знака симметричны относительно электрического и магнитного полей **E** и **H** и соответствующих индукций **D** и **B**. Материальные уравнения (2), (4) и (8) в векторном виде также симметричны относительно тех же векторов. Естественно, что и более общие материальные уравнения, справедливые для неинерциальных систем отсчета, должны быть симметричны относительно векторов **E**, **H**, **D**, **B** и в частном случае инерциальных систем сводиться к формам (2), (4) и (8).

Среда, помещенная в электрическое поле, оказывает влияние лишь на результирующее поле **E**, а индукция остается без изменения [12]. Иначе говоря, среда воздействует лишь на компоненты $F_{0\alpha}$ ковариантного тензора поля. В силу симметрии основных уравнений электродинамики среда, помещенная в магнитное поле, оказывает влияние также лишь на компоненты $H^{\alpha\beta}$ контравариантного тензора H^{ik} (напряженность магнитного поля).

При этих условиях материальные соотношения, обобщающие уравнения Минковского (2), представляются в форме, полученной Хромых [6] для вращающихся систем с использованием схемы (3),

$$g_{il}g_{km}H^{lm}u^{k}=\varepsilon F_{ik}u^{k},\quad e_{iklm}g^{ks}g^{lt}F_{st}u^{m}=\mu e_{iklm}H^{kl}u^{m}. \tag{14}$$

При использовании связей (11) эти уравнения содержат полную информацию о метрике пространства—времени в любой рассматриваемой системе отсчета.

Подобным же образом получаем ковариантные материальные уравнения для электрического и магнитного полей, обобщающие уравнения Тамма (4) на среду, движущуюся в системе отсчета с произвольной метрикой,

$$\left.\begin{aligned} F_{0\alpha}&=S_0^{l}S_\alpha^{m}g_{li}g_{mk}H^{ik},\\ F_{\alpha\beta}&=g_{\alpha l}g_{\beta m}S_i^{l}S_k^{m}H^{ik},\\ \text{или}\qquad H^{0\alpha}&=g^{0l}g^{\alpha m}\bar{S}_l^{i}\bar{S}_m^{k}F_{ik},\\ H^{\alpha\beta}&=\bar{S}_l^{\alpha}\bar{S}_m^{\beta}g^{li}g^{mk}F_{ik},\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $S_i^k=\bar{g}^{kl}S_{il}$, $\bar{S}_i^k=\bar{g}_{il}S^{kl}$, причем метрический тензор с чертой соответствует инерциальному пространству. Ненулевые компоненты смешанных тензоров среды находятся с помощью соотношений (5) и (6) [7]

$$S_0^0=-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\mu}},\quad S_\alpha^\beta=-\sqrt{\mu};\quad \bar{S}_0^0=-\varepsilon\sqrt{\mu},\quad \bar{S}_\alpha^\beta=-\frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Нетрудно показать, что для статических гравитационных полей ($g_{0\alpha}=0$) уравнения (15) попарно объединяются

$$F_{ik}=g_{is}g_{kt}S_l^{s}S_m^{t}H^{lm}\quad\text{или}\quad H^{ik}=g^{is}g^{kt}\bar{S}_s^{l}\bar{S}_t^{m}F_{lm}. \tag{16}$$

Компоненты тензоров поля в движущейся среде определяются с помощью преобразований Лоренца.

Следуя Тамму [11], первую пару соотношений (15) обобщим на случай анизотропных сред

$$F_{0\alpha} = S^{lm}_{0\alpha} g_{li} g_{mk} H^{ik}, \quad F_{\alpha\beta} = g_{\alpha l} g_{\beta m} S^{lm}_{ik} H^{ik} \tag{17}$$

или (для статических гравитационных полей)

$$F_{ik} = S^{lm}_{ik} g_{ls} g_{mt} H^{st}, \tag{18}$$

где S^{lm}_{ik} — тензор четвертого ранга диэлектрической и магнитной проницаемости среды. Компоненты этого тензора находятся из условия, что в инерциальной системе последние соотношения, записанные в трехмерной форме, эквивалентны уравнениям [11]

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta,$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей анизотропной среды.

Для обобщения уравнений (9) введем в рассмотрение ко- и контравариантный антисимметричные тензоры поляризации среды

$$\begin{gathered}
Q^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{P^1}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{P^2}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{P^3}{\sqrt{-g_{00}}} \\ \frac{P^1}{\sqrt{-g_{00}}} & 0 & \frac{M_3}{\sqrt{-g}} & -\frac{M_2}{\sqrt{-g}} \\ \frac{P^2}{\sqrt{-g_{00}}} & -\frac{M_3}{\sqrt{-g}} & 0 & \frac{M_1}{\sqrt{-g}} \\ \frac{P^3}{\sqrt{-g_{00}}} & \frac{M_2}{\sqrt{-g}} & -\frac{M_1}{\sqrt{-g}} & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & \sqrt{\gamma} M^3 & -\sqrt{\gamma} M^2 \\ -P_2 & -\sqrt{\gamma} M^3 & 0 & \sqrt{\gamma} M^1 \\ -P_3 & \sqrt{\gamma} M^2 & -\sqrt{\gamma} M^1 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{19}$$

компоненты которых связаны в соответствии с формулами (8) с компонентами тензоров электромагнитного поля F_{ik} и H^{ik} соотношениями

$$\left.\begin{aligned} P_\alpha &= \varkappa E_\alpha, \quad P^\alpha = \varkappa E^\alpha, \\ M_\alpha &= \chi H_\alpha, \quad M^\alpha = \chi H^\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Легко видеть, что в инерциальной системе ковариантные тензоры Q_{ik} и P_{ik} совпадают с тензором M_{ik} (10). С помощью этих тензоров на основе проведенных выше рассуждений получаем обобщенные ковариантные материальные соотношения для поля в покоящейся изотропной среде

$$\left.\begin{aligned} F_{0\alpha} + 4\pi P_{0\alpha} &= g_{0i} g_{\alpha k} H^{ik}, \\ H^{\alpha\beta} - 4\pi Q^{\alpha\beta} &= g^{\alpha i} g^{\beta k} F_{ik}, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} H^{0\alpha} &= g^{0i} g^{\alpha k} (F_{ik} + 4\pi P_{ik}), \\ F_{\alpha\beta} &= g_{\alpha i} g_{\beta k} (H^{ik} - 4\pi Q^{ik}), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где первые уравнения каждой пары определяют электрическое поле, вторые — магнитное. Для статических гравитационных полей эти уравнения упрощаются

$$F_{ik} + 4\pi P_{ik} = g_{il} g_{km} H^{lm} \quad \text{или} \quad F_{ik} = g_{il} g_{km} (H^{lm} - 4\pi Q^{lm}). \tag{22}$$

Уравнения (14), (15) и (21), обобщающие три формы материальных соотношений для инерциальных систем отсчета (2), (4) и (9) совместно с уравнениями Максвелла (13) и соотношениями (12), полностью описывают распространение электромагнитных волн в диэлектрических средах, движущихся в системах отсчета с произвольной постоянной метрикой. Выбор той или иной формы материальных уравнений зависит от условий решения конкретной электродинамической задачи.

Частота и время распространения световой волны в кольцевом резонаторе со средой

Полученные выше соотношения позволят определить время распространения и частоту световой волны в изотропной среде, движущейся во вращающемся кольцевом резонаторе, который ускоренно перемещается в постоянном гравитационном поле.

Собственное время распространения светового луча, измеренное покоящимися в данной системе отсчета часами, определяется по формуле [9, 10]

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dt, \tag{23}$$

где $dt=(n^*/c)\, d\sigma$ — координатное время, n^* — эффективный показатель преломления; $d\sigma = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$ — пространственный элемент длины.

Для определения n^* и $d\sigma$ в системе отсчета, связанной с резонатором, необходимо найти метрический тензор этой системы и получить материальные уравнения в нековариантном виде.

Метрический тензор в исходной невращающейся системе отсчета $oxyz$, находящейся в гравитационном поле вращающегося тела массы m, имеет компоненты [9]

$$g_{00} = -\left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right), \quad g_{0\alpha} = -\frac{2k}{c^3\rho^3}[\rho \mathbf{N}], \quad g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1-\dfrac{2\varphi}{c^2}, & \alpha=\beta, \\ 0, & \alpha\neq\beta, \end{cases}$$

где $\varphi = -km/\rho$ — потенциал гравитационного поля, k — гравитационная постоянная, ρ — расстояние от центра тела до рассматриваемой точки, $\mathbf{N}$ — момент импульса тела.

Последовательно переходя к равномерно движущейся, ускоренной, а затем к вращающейся системе координат, находим компоненты метрического тензора в произвольно движущейся системе отсчета, связанной с резонатором,

$$g_{00} = -\left[1+\frac{1}{c^2}(2\varphi + 2\mathbf{aR}) - \mathbf{G}^2\right], \quad g_{0\alpha} = G_\alpha, \quad g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1-\dfrac{2\varphi}{c^2}, & \alpha=\beta, \\ 0, & \alpha\neq\beta, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{2\varphi}{c^2}\right)[\mathbf{\Omega R}] - \frac{4\varphi}{c^3}\mathbf{W} - \frac{2k}{c^3\rho^3}[\rho\mathbf{N}];$$

$\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{W}$ — угловая скорость, линейное ускорение и скорость перемещения системы отсчета в гравитационном поле соответственно; $\mathbf{R}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки относительно начала системы.

Используя известные соотношения для компонентов 4-вектора скорости [9], с помощью тензора (24) из ковариантных уравнений (14) получаем векторные материальные соотношения для поля в среде, движущейся относительно резонатора

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\left[\frac{\mathbf{V}}{c}(\mathbf{H}+[\mathbf{GD}])\right] &= \varepsilon\left(\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{-g_{00}}} + \left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathbf{B}\right]\right) - \frac{[\mathbf{HG}]}{g_{00}}, \\ \mathbf{B} + \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\left[(\mathbf{E}+[\mathbf{BG}])\frac{\mathbf{V}}{c}\right] &= \mu\left(\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{-g_{00}}} + \left[\mathbf{D}\frac{\mathbf{V}}{c}\right]\right) - \frac{[\mathbf{GE}]}{g_{00}}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

причем V^2, $\Omega^2 R^2 \ll \varphi$. Аналогичные результаты получаются при использовании уравнений (15). В отсутствие гравитационных полей и вращений полученные уравнения совпадают с векторной формой уравнений Минковского (2).

В целях получения простых и обозримых конечных выражений распространение встречных световых волн в резонаторе рассмотрим раздельно для случая покоящихся и движущихся невзаимных сред.

Ограничиваясь плоскими монохроматическими волнами, для которых уравнения Максвелла имеют вид [12]

$$\mathbf{D} = [\mathbf{H}\mathbf{n}^*_{1,\,2}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n}^*_{1,\,2}\mathbf{E}], \tag{26}$$

и решая эти уравнения совместно с системой (25) для неподвижной (полностью увлекаемой) среды ($\mathbf{V} = 0$), находим

$$n^*_{1,\,2} = \frac{n_{1,\,2}}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{e}_{1,\,2}}{g_{00}}, \tag{27}$$

где $n_{1,\,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,\,2}\mu_{1,\,2}}$, $\mathbf{e}_{1,2}$ — единичный вектор в направлении распространения световой волны; индексы 1 и 2 соответствуют прямой и обратной волне.

Поскольку при $\mathbf{aR}$, $c^2\,\mathbf{G}^2 \ll \varphi$ пространственный элемент длины

$$d\sigma = \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) dR \tag{28}$$

$\left(dR = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\right)$ для встречных волн одинаков, взаимное запаздывание встречных лучей кольцевого резонатора, определяемое интегрированием соотношения (23) с учетом (27) по замкнутому контуру, составляет

$$\Delta\tau = \frac{4\mathbf{\Omega S}}{c^2}\left(1 - \frac{4\varphi}{c^2}\right) - (n_2 - n_1)\left[\frac{l}{c}\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) - \frac{l^2}{c^3}\left(g_l + \frac{a_l}{2}\right)\right] - \\ - \frac{4km}{c^4}\oint\limits_L \frac{\mathbf{W}d\mathbf{R}}{\rho} - \frac{2k\mathbf{N}}{c^4}\oint\limits_L \frac{[\rho d\mathbf{R}]}{\rho^3}, \tag{29}$$

где l — длина невзаимного элемента, L — длина контура, S — площадь резонатора; a_l и g_l — проекции активного и гравитационного ускорений на направление лучей в невзаимном элементе.

Сдвиг частот встречных лучей в кольцевом резонаторе с периметром L находим приравниванием набега фазы при обходе волнами его контура

$$\omega_1 \oint\limits_L d\tau_1 = \omega_2 \oint\limits_L d\tau_2. \tag{30}$$

Полагая, что $n_2 - n_1 < 10^{-3}$, $L \ll \rho$, g_l, $a_l < 10^2$ м/с², и пренебрегая членами, не превышающими 10^{-17} в поле Земли, в результате интегрирования этого соотношения с использованием формул (23), (27) и (28) получаем

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{\frac{4\mathbf{\Omega S}}{c}\left(1 - \frac{4\varphi}{c^2}\right) + l\,(n_2 - n_1)\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)}{L + l\,(n_0 - 1) + d\,(n_a - 1)}, \tag{31}$$

где ω_0 — частота лучей резонатора в отсутствие невзаимности среды, вращений и гравитационных полей; n_a и d — коэффициент преломления и длина части контура, заполненной активной средой; $n_0 = 0.5\,(n_1 + n_2)$.

Таким образом, влияние гравитационного поля на сдвиг частот встречных волн кольцевого резонатора зависит от его угловой скорости и наличия в контуре прибора невзаимных элементов. При этом наибольший эффект вызывает гравитационное поле Солнца, поскольку его потенциал в пятнадцать раз превосходит потенциал Земли у ее поверхности. Влияние ускорения пренебрежимо мало.

Удерживая члены порядка φ/c^2, $\Omega R/c$, V/c и пренебрегая ускоренным перемещением резонатора, материальные уравнения поля в движущейся среде (25) представим в упрощенном виде

$$\mathbf{D}=\varepsilon\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right)\mathbf{E}+[\mathbf{H}\mathscr{G}];\quad \mathbf{B}=\mu\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right)\mathbf{H}+[\mathscr{G}\mathbf{E}], \tag{32}$$

где

$$\mathscr{G}-=\left(1-\frac{4\varphi}{c^2}\right)\frac{[\mathbf{\Omega R}]}{c}-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\mathbf{V}.$$

Решая эти уравнения совместно с уравнениями Максвелла (26), для встречных волн получаем

$$n^*_{1,2}=n_{1,2}\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right)+\left(1-\frac{4\varphi}{c^2}\right)\frac{[\mathbf{\Omega R}]\,\mathbf{e}_{1,2}}{c}-\frac{n^2_{1,2}-1}{c}\mathbf{V}\mathbf{e}_{1,2}, \tag{33}$$

откуда в соответствии с формулами (23) и (28) разность времен обхода контура резонатора встречными лучами

$$\Delta\tau=\frac{4\mathbf{\Omega S}}{c^2}\left(1-\frac{4\varphi}{c^2}\right)-\frac{n_1^2+n_2^2-2}{c^2}\oint\limits_L \mathbf{V}d\mathbf{R}. \tag{34}$$

Представляет интерес вычисление этой разности для двух частных случаев относительного движения резонатора и среды, полностью заполняющей его контур: контур вращается, среда покоится в гравитационном поле ($\Omega\neq 0$, $\mathbf{V}=-[\mathbf{\Omega R}]$)

$$\Delta\tau=\frac{4\mathbf{\Omega S}}{c^2}\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2}-\frac{4\varphi}{c^2}\right); \tag{35}$$

интерферометр не вращается, среда движется относительно него со скоростью $\mathbf{V}=[\mathbf{\Omega R}]$ (случай, обратный первому)

$$\Delta\tau=-\frac{4\mathbf{\Omega S}}{c^2}\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2}-1\right), \tag{36}$$

т. е. разность хода встречных лучей в этом случае не зависит от потенциала гравитационного поля.

Относительные разности частот встречных лучей, соответствующие запаздываниям (34)—(36), как и в случае полностью увлекаемой среды, определяются из выражения (30).

Соотношения (29), (31), (35) и (36) обобщают известные результаты [1-6], вычисленные без учета гравитационного поля и невзаимности среды и с точностью до членов, содержащих φ/c^2, согласуются с экспериментами, проведенными в оптическом [14-18] и радиодиапазоне волн [19].

Гравитационные эффекты в кольцевом оптическом резонаторе экспериментально наиболее просто измеряются в случае полностью увлекаемой среды, так как для поля Солнца у поверхности Земли $\varphi/c^2\approx 10^{-8}$.

Авторы благодарны Л. Э. Гуревичу и О. В. Константинову за полезные замечания, высказанные при обсуждении полученных результатов.

Литература

[1] E. J. Post, A. Yildiz. Phys. Rev. Lett., *15*, 177, 1965.
[2] A. Yildiz, C. H. Tang. Phys. Rev., *146*, 947, 1966.
[3] E. J. Post. Rev. Mod. Phys., *39*, 475, 1967.
[4] C. V. Heer. Phys. Rev., *134*, A799, 1964.
[5] К. Шиодзава. ТИИЭР, *61*, 38, 1973.
[6] А. М. Хромых. ЖЭТФ, *50*, 281, 1966.
[7] А. М. Волков, В. А. Киселев. ЖЭТФ, *57*, 1353, 1969.
[8] А. М. Волков, В. А. Киселев. ЖЭТФ, *58*, 1857, 1970.
[9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. «Наука», 1967.
[10] К. Мёллер. Теория относительности. Атомиздат, М., 1975.

[11] И. Е. Тамм. Журнал русского физико-химического общества (часть физическая), *56*, 248, 1924.
[12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
[13] В. Пановский, М. Филипс. Классическая электродинамика. Физматгиз, 1963.
[14] P. Harzer. Astron. Nachr., *199*, 10, 1914.
[15] B. Pogany. Ann. Phys., *85*, 244, 1928.
[16] A. Dufour, F. Prunier. J. Phys. Radium, *8*, Ser. *3*, 153, 1942.
[17] W. Kantor. J. Opt. Soc. Am., *52*, 978, 1962.
[18] C. V. Heer, J. A. Little, J. R. Bupp. Ann. de l'Institut Henri Poincare, *8*, 311, 1968.
[19] И. Л. Берштейн. ДАН СССР, *75*, 635, 1950.

Поступило в Редакцию 21 апреля 1977 г.