УДК 535.2

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Соколов, Д. В. Гальцов и *В. И. Петухов*

Методом разложения по спиновым сферическим гармоникам получены формулы для электромагнитного поля заряда, движущегося по окружности. Исследовано распределение излучения релятивистской частицы по мультиполям. Найдена связь между мультипольным и угловым распределениями излучения.

Введение

В последнее время синхротронное излучение (СИ), возникающее при движении релятивистских заряженных частиц в магнитном поле, находит все более широкое применение в целом ряде областей экспериментальной физики [1–3]. Помимо прямого использования СИ для измерения параметров пучков в накопителях, важное значение приобрели явления, представляющие собой косвенные проявления СИ, такие как радиационная стабилизация орбит и самополяризация спинов частиц. Наконец, все шире начинает применяться СИ в экспериментах, где требуются интенсивные потоки в области вакуумного ультрафиолета и рентгеновского излучения. Весьма важной для этих исследований является возможность точного теоретического представления спектра, поляризации и других параметров СИ. Как известно, впервые формула, описывающая спектр СИ, была получена одним из авторов и Иваненко [4], годом позже этот результат повторил Швингер [5]. Позднее теория СИ была детально разработана, и ее изложение можно найти в ряде монографий и учебников [1, 6].

Следует отметить, что эта теория, ставшая традиционной, несколько отличается от принятого в оптике подхода. В настоящей работе дается анализ СИ в терминах мультипольного разложения, являющегося стандартным в атомной и молекулярной спектроскопии. Распределение излучения по мультиполям, с точки зрения квантовой теории, можно считать «дополнительным» к угловому распределению. Как известно, удобство использования мультипольного разложения для описания излучения нерелятивистских систем связано с его быстрой сходимостью, так как излучение высших мультиполей в этом случае сильно подавлено. Для релятивистских частиц существенным является излучение именно высших мультиполей, причем ввиду «квазиклассичности» излучения, как будет показано ниже, возникает простая взаимосвязь между угловым и мультипольным распределениями, которая отсутствует в случае нерелятивистских излучающих систем.

Мультипольный анализ излучения осуществляется путем разложения полей излучения по сферическим гармоникам в сферической системе координат. Удобная техника построения решений уравнений Максвелла в сферических координатах была разработана в последнее время в связи с решением задач на излучение в теории гравитации [7, 8]. Наиболее просто разделение переменных в уравнениях Максвелла достигается с помощью так называемого формализма Ньюмена—Пенроуза [9]. Мы рассматриваем, однако, излучение в плоском пространстве, что позволяет сформулировать и использовать упрощенный вариант этого формализма. Полученные нами решения уравнений Максвелла для заряда, движущегося по окружности, являются точными и справедливы, в частности на малых расстояниях от заряда. Точное выражение, описывающее мультипольный состав излучения, далее подвергается упрощению с учетом преимущественного излучения высших мультиполей. Вычислены также мультипольные параметры Стокса, описывающие поляризацию излучения.

Уравнения Максвелла в формализме нулевого репера

Для решения уравнений Максвелла в сферических координатах построим упрощенный вариант формализма нулевого репера [9]. Введем комплексное векторное поле

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, и рассмотрим проекции вектора $\mathbf{F}$ на единичный вектор в радиальном направлении $F_r = (\mathbf{e}_r \mathbf{F})$, а также комплексные проекции

$$F_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_\theta \pm i F_\varphi), \quad F_\theta = (\mathbf{F}\mathbf{e}_\theta), \quad E_\varphi = (\mathbf{F}\mathbf{e}_\varphi), \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат. В результате преобразования полной системы уравнений Максвелла (включая однородные уравнения, не содержащие плотности заряда и тока) получим систему 4 уравнений для 3 комплексных функций F_r и $F_\pm$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) F_r + \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\theta\right) F_+ = 4\pi(\rho + J_r),\\
&\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) F_r + \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\theta\right) F_- = 4\pi(\rho - J_r),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) F_- - \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) F_r = 4\pi J_+,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) F_+ + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) F_r = 4\pi J_-,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где ρ — плотность заряда, J_r, $J_\pm$ — проекции плотности тока на выбранные орты. Между уравнениями системы (3) имеется одно линейное дифференциальное соотношение, связанное с законом сохранения тока.

Удобство использования комплексного векторного поля $\mathbf{F}$ состоит в возможности получения различных уравнений для проекций $F_\pm$. Отметим, что в силу поперечности электромагнитного поля для полного описания поля излучения в волновой зоне достаточно знать одну из этих функций, например F_-. Действительно, на большом расстоянии от источника для расходящихся волн выполняются соотношения $E_\theta = H_\varphi$, $E_\varphi = -H_\theta$, используя которые, из формулы (2) найдем, что $F_- = \sqrt{2}(E_\theta - iE_\varphi)$. С помощью системы (3) нетрудно вывести уравнение, которому удовлетворяет функция F_-. Для этого подействуем на второе уравнение из системы (3) оператором $\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, а на третье уравнение — оператором $-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r}$, затем полученные уравнения вычтем одно из другого. В результате будем иметь следующее дифференциальное уравнение для функции $\psi = r^2 F_-$:

$$\left.\begin{aligned}&\left[-r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2r\frac{\partial}{\partial t}+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\times\right.\\&\qquad\left.\times\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2i\cos\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}-1\right)\right]\psi=4\pi J,\\&J=r^4\left[\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(\rho-J_r)-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}-\frac{3}{r}\right)J_+\right].\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Разделение переменных в уравнении (4) позволяет представить решение уравнения (4) в следующем виде:

$$\psi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}e^{-i\omega t}{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,R^l_\omega(r)\,d\omega,\tag{5}$$

где ${}_{-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)$ — спиновые сферические функции [7], удовлетворяющие уравнению

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+l(l+1)-1-\frac{(m-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)=0\tag{6}$$

и связанные с обычными сферическими функциями $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ соотношением

$${}_{-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi).\tag{7}$$

Нетрудно проверить, что система функций ${}_{-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)$ удовлетворяет таким же соотношениям ортогональности и полноты, что и система функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Радиальная функция $R^l_\omega(r)$ подчиняется дифференциальному уравнению с комплексными коэффициентами

$$\left\{r^2\frac{d^2}{dr^2}+[\omega^2r^2-2i\omega r-l(l+1)]\right\}R^l_\omega(r)=J_{l\omega}(r),\tag{8}$$

где

$$J_{l\omega}(r)=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta e^{i\omega t}{}_{-1}Y^*_{lm}(\theta,\varphi)\,J.\tag{9}$$

Запаздывающее решение уравнения (8) может быть представлено в следующем виде:

$$R^l_\omega(r)=\left[\vec{R}_{l\omega}(r)\int\limits_0^r\vec{R}_{l\omega}(r')\,J_{l\omega}(r')\frac{dr'}{W}+\vec{R}_{l\omega}(r)\int\limits_r^\infty\vec{R}_{l\omega}(r')\,J_{l\omega}(r')\frac{dr'}{W}\right]\frac{m}{|m|},\tag{10}$$

где $\vec{R}_{l\omega}(r)$ и $\vec{R}_{l\omega}(r)$ — два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения, первое из которых регулярно в точке $r=0$, а второе представляет при $r\to\infty$ расходящуюся волну, W — вронскиан, составленный из этих решений. Решения однородного уравнения выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию, либо (эквивалентным образом) через функции Бесселя и Ханкеля

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_{l\omega}(r)&=(-1)^l\,2i\frac{(l-1)!}{(2l+1)!}(2i\omega r)^{l+1}e^{-i\omega r}\Phi(l+2,\ 2l+2;\ 2i\omega r)=\\&=-(-i)^l\frac{2\sqrt{2\pi\omega}}{l(l+1)}re^{-i\omega r}\frac{d}{dr}\left[\sqrt{r}e^{i\omega r}J_{l+1/2}(\omega r)\right],\\\vec{R}_{l\omega}(r)&=\frac{(l+1)!}{4i\,(2l+1)!}(2i\omega r)^{l+1}e^{-i\omega r}\Phi(l+2;\ 2l+2;\ 2i\omega r)+\\&+(-1)^{l+1}\frac{(2l)!}{2i\,(l+1)!}(2i\omega r)^{-l}\,\Phi(-l+1;\ -2l;\ 2i\omega r)=\\&=\frac{i^l\sqrt{2\pi\omega}}{4}re^{-i\omega r}\frac{d}{dr}\left[\sqrt{r}e^{i\omega r}H^{(1)}_{l+1/2}(\omega r)\right],\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

при этом вронскиан равен

$$W = \bar{R}_{l\omega}(r)\frac{d\bar{R}_{l\omega}(r)}{dr} - \bar{R}_{l\omega}(r)\frac{d\bar{R}_{l\omega}(r)}{dr} = 2i\omega. \tag{12}$$

Радиальные функции (11) имеют при $r \to \infty$ следующий вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}_{l\omega}(r) &\sim \frac{e^{-i\omega r}}{\omega r} + \frac{4\omega r}{l(l+1)}(-1)^{l+1}e^{i\omega r}, \\ \bar{R}_{l\omega}(r) &\sim \omega r e^{i\omega r}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Мультипольное разложение интенсивности и мультипольные параметры Стокса синхротронного излучения

Рассчитаем излучение, возникающее при движении частицы с зарядом e по круговой траектории радиуса r_0 с угловой скоростью ω_0 в плоскости, ортогональной полярной оси. Подставляя явный вид соответствующих плотностей заряда и тока в (9), получим

$$J_{l\omega}(r) = \frac{4\pi e}{\sqrt{2}}\delta(\omega - m\omega_0)\left\{\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[(\omega^2 r_0^2 - l(l+1))\,Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \omega\omega_0 r_0^2\frac{\partial}{\partial\theta}Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0)\right] - i\omega_0 r^2_{0-1}Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0)\frac{d}{dr}\right\} r^3\delta(r - r_0). \tag{14}$$

Далее используем явные выражения для радиальных функций (11) и, ограничиваясь случаем $r > r_0$, с помощью формулы (10) найдем

$$R^l_\omega(r) = -\frac{R^{\bar{R}_{l\omega}(r)}_{l\omega}}{\omega}\frac{4\pi e\sqrt{\pi\omega}}{[l(l+1)]^{3/2}}\frac{m}{|m|}(-i)^{l+1}\delta(\omega - m\omega_0)\left\{e^{-i\omega r}\frac{d}{dr}\left[\sqrt{r}e^{i\omega r}J_{l+1/2}(\omega r)\right]\times\right.$$
$$\times\left[(\omega^2 r_0^2 - l(l+1))\,Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0) + \omega_0\omega r^2\frac{\partial}{\partial\theta}Y^*_{lm}(\pi/2,\ \theta)\right] + i\omega_0 r^2\left[mY^*_{lm}(\pi/2,\ 0) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\theta}Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0)\right]\frac{d}{dr}\left[e^{-i\omega r}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}e^{i\omega r}J_{l+1/2}(\omega r)\right)\right]\right\}_{r=r_0}. \tag{15}$$

После ряда преобразований получим разложение комплексного поля F_- (5) по спиновым сферическим гармоникам

$$F_- = 4\pi e\sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{e^{-im\omega_0 t}R^{\bar{R}_{l\omega}(r)}_{lm\omega_0}}{r^2 m}\,{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\frac{m}{\sqrt{|m|\,l(l+1)}}\times$$
$$\times\left[Y^*_{lm}(\pi/2,\ 0)\frac{d}{dr}\left(\sqrt{r}J_{l+1/2}(\omega r)\right) - i\omega_0\frac{\partial}{\partial\theta}Y^*_{lm}(\pi/2)\,0(\sqrt{r}J_{l+1/2}(\omega r)\right]_{r=r_0}. \tag{16}$$

Входящие в (16) значения сферических функций и их производных в точке $\theta = \pi/2$ могут быть записаны в явном виде [10]

$$\left.\begin{aligned} Y_{lm}(\pi/2,\ 0) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)}}\frac{(l+m-1)!\,2^{1-l}}{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-m}{2}+1\right)}\cos\frac{\pi}{2}(l+m), \\ \frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)}{(l+m)!}}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l-m+1}{2}\right)}2^{m+2}\sin\frac{\pi}{2}(l+m), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Подставляя (16) в (2) и выделяя поля с поляризацией вдоль ортов $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, найдем

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{e^{-im\omega_0 t}\bar{R}^{\bar{R}_{l\omega}(r)}_{lm\omega_0}}{r^2 m\omega_0}\,{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\,G_i,\quad i = \theta,\ \varphi, \\ G_\theta &= 4\pi\sqrt{2\pi\omega_0}\frac{m}{[|m|\,l(l+1)]^{1/2}}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\frac{d}{dr}\left[\sqrt{r}J_{l+1/2}(\omega r)\right]_{r=r_0}, \\ G_\varphi &= 4\pi\sqrt{2\pi\omega_0}\frac{m\omega_0}{[|m|\,l(l+1)]^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\sqrt{r_0}\,J_{l+1/2}(\omega r_0). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из этих формул видно, что θ-компонента поляризации — отвечает четным значениям разности $l-m$, а φ-компонента — нечетным. Если учесть, что при инверсии координат

$$ {}_{-1}Y_{lm}(\pi-\theta,\ \varphi+\pi)=(-1)^{l+1}{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\ \varphi), \tag{19}$$

нетрудно прийти к заключению, что в излучение четных гармоник циклотронной частоты ($m=0,\ 2,\ 4,\ \ldots$) с поляризацией вдоль $\mathbf{e}_\theta$ дают вклад нечетные мультиполи, а с поляризацией вдоль $\mathbf{e}_\varphi$ — четные; в то время как для нечетных гармоник циклотронной частоты ($m=1,\ 3,\ \ldots$) поляризация вдоль $\mathbf{e}_\theta$ соответствует четным мультиполям, а поляризация вдоль $\mathbf{e}_\varphi$ — нечетным.

Введем мультипольные параметры Стокса I_{lm}, $\mathcal{J}^\lambda_{lm}$, $\lambda=1,\ 2,\ 3$, исходя из соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta E_iE_j=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(I_{lm}\frac{\delta_{ij}}{2}+\sum_{\lambda=1}^{3}\mathcal{J}^\lambda_{lm}\sigma^\lambda_{ij}\right),\quad i,\ j=\theta,\ \varphi=1,\ 2 \tag{20}$$

где σ^λ_{ij} — матрицы Паули. Полная интенсивность излучения при этом равна

$$I=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,(E^2_\theta+E^2_\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}I_{lm}. \tag{21}$$

Подставляя разложение (18) в (20) и учитывая отмеченные особенности распределения по четности, найдем

$$\mathcal{J}^1_{lm}=\mathcal{J}^2_{lm}=0, \tag{22}$$

что свидетельствует об отсутствии круговой поляризации проинтегрированного по углам излучения мультиполя с заданными l и m. Отличные от нуля параметры Стокса имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
I_{lm}&=\frac{4\pi^2e^2\omega_0m}{l(l+1)}\left\{\left(Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)\right)^2\left[\frac{d}{dr}\left((\sqrt{r}J_{l+1/2}(\omega r)\right)\right]^2_{r=r_0}+\right.\\
&\left.+\,\omega_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\right]^2r_0J^2_{l+1/2}(\omega r_0)\right\}.\\
\mathcal{J}^3_{lm}&=\frac{2\pi^2e^2\omega_0m}{l(l+1)}\left\{[Y_{lm}(\pi/2,\ 0)]^2\left[\frac{d}{dr}(\sqrt{r}J_{l+1/2}(\omega r)\right]^2_{r=r_0}-\right.\\
&\left.-\,\omega_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\right]^2r_0J^2_{l+1/2}(\omega r_0)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Мультипольное разложение излучения нерелятивистской частицы $\omega_0r_0\ll1$ быстро сходится

$$\left.\begin{aligned}
I_{lm}&=\frac{8\pi e^2(\omega_0r_0)^{2l}}{l(l+1)}\left[\frac{\omega_02^lm^{l+1}l\,!}{(2l+1)\,!}\right]^2\left\{(l+1)^2\,[Y_{lm}(\pi/2,\ 0)]^2+\omega_0^2r_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\right]^2\right\},\\
\mathcal{J}^3_{lm}&=\frac{4\pi e^2(\omega_0r_0)^{2l}}{l(l+1)}\left[\frac{\omega_02^lm^{l+1}l\,!}{(2l+1)\,!}\right]^2\left\{(l+1)^2\,[Y_{lm}(\pi/2,\ 0)]^2-\omega_0^2r_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\pi/2,\ 0)\right]^2\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

В случае ультрарелятивистского движения основной вклад в излучение дают мультиполи с $m\gg1$, $l\gg1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать известное [10] асимптотическое разложение бесселевых функций при больших значениях индекса в терминах функций Мак-Дональда $K_{1/3}$. Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\psi^2=2\frac{l-m}{m}\gamma^2,\quad y=\frac{2}{3}m\gamma^{-3},\quad z=\frac{3}{2}y\,(1+\psi^2)^{3/2};\\
&\gamma=[1-\omega_0^2r_0^2]^{-1/2},
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

получим

$$I_{lm}=\frac{4e^2m}{3\pi^2\gamma^3}\,\frac{1+\psi^2}{\psi}\left[\psi^2K^2_{1/3}(z)\sin^2\frac{\pi}{2}(l-m)+(1+\psi^2)\,K^2_{2/3}(z)\cos^2\frac{\pi}{2}(l-m)\right],\tag{26}$$

$$\mathcal{I}^3_{lm}=\frac{2e^2m}{3\pi^2\gamma^3}\,\frac{1+\psi^2}{\psi}\left[\psi^2K^2_{1/3}(z)\sin^2\frac{\pi}{2}(l-m)-(1-\psi^2)\,K^2_{2/3}(z)\cos^2\frac{\pi}{2}(l-m)\right].\tag{27}$$

Ввиду быстрого убывания функций Мак-Дональда при больших значениях аргумента, ясно, что эффективная область значений m простирается до γ^3, а область изменения числа l ограничена неравенством

$$\frac{l-m}{m}\leqslant\gamma^{-2}.\tag{28}$$

Покажем, что существует тесная связь между угловым распределением излучения ультрарелятивистской частицы, усредненным по азимутальному углу, и распределением по l. С этой целью вычислим среднее значение $\cos^2\theta$ по спиновым сферическим гармоникам при $l\gg 1$, $|m|\gg 1$

$$\langle\cos^2\theta\rangle=2\pi\int\limits_0^\pi |{}_{-1}Y_{lm}(\theta,\,0)|^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta=\frac{\psi^2}{2\gamma^2}.\tag{29}$$

Мы видим, что при фиксированном значении номера гармоники m излучение мультиполя с заданным l [т. е. согласно (25) с заданным ψ^2] отвечает вполне определенному среднему углу излучения по отношению к плоскости орбиты, причем зависимость $\langle\cos^2\theta\rangle$ от l является монотонной. Учитывая квазинепрерывность распределения по l и m при больших значениях этих чисел, можно привести мультипольные разложения (26), (27) к виду, формально идентичному с соответствующими угловыми распределениями [1], переходя от суммирования по l и m к интегрированию по ψ и y:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}I_{lm}=\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty d\psi\,\frac{dI}{d\psi dy};\quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\mathcal{I}^3_{lm}=\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty d\psi\,\frac{d\mathcal{I}^2}{d\psi dy}.\tag{30}$$

Подставляя (26) и (27) в (30) и учитывая (25), найдем

$$\frac{dI}{d\psi dy}=\left(\frac{3ey\gamma^2}{2\pi}\right)^2(1+\psi^2)\left[\psi^2K^2_{1/3}(z)+(1+\psi^2)\,K^2_{2/3}(z)\right],\tag{31}$$

$$\frac{d\mathcal{I}^3}{d\psi dy}=\left(\frac{3ey\gamma^2}{2\pi}\right)^2\frac{1+\psi^2}{2}\left[\psi^2K^2_{1/3}(z)-(1+\psi^2)\,K^2_{2/3}(z)\right].\tag{32}$$

Интегрирование (31) по ψ и y приводит к известному [1] выражению для полной интенсивности синхротронного излучения, которое здесь приводить не будем.

Литература

[1] Синхротронное излучение. Сб. статей под редакцией А. А. Соколова и И. М. Тернова. «Наука», М., 1966.

[2] Синхротронное излучение в исследовании твердых тел. Сб. статей под редакцией А. А. Соколова. «Мир», М., 1970.

[3] Г. Н. Кулипанов, А. Н. Скринский. Усп. физ. наук, *122*, 369, 1977.

[4] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. ДАН СССР, *59*, 1551, 1948.

[5] J. Schwinger. Phys. Rev., *75*, 1912, 1949.

[6] В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, М., 1973.

[7] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman et al. J. Math. Phys., *8*, 2155, 1967.

[8] S. Teukolsky. Appl. J., *185*, 635, 1973.

[9] E. T. Newman, R. Penrose. J. Math. Phys., *3*, 566, 1972.

[10] Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. «Наука», М., 1965.

Поступило в Редакцию 11 октября 1977 г.