УДК 539.184.01

МНОГОЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КВАЗИЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

М. Д. Аносов

Показано, что между двумя квазиэнергетическими состояниями атома, находящегося в произвольном периодическом поле, можно индуцировать резонанс одновременно несколькими слабыми резонансными полями различных частот. Такой многочастотный резонанс принципиально отличается от многоквантового, при котором суммарная частота квантов равна частоте перехода: в многочастотном резонансе каждое поле в отдельности является резонансным и само по себе тоже способно вызывать переход. Такие резонансы возможны благодаря тому, что между двумя квазиэнергетическими состояниями имеется не одна частота перехода, а, вообще говоря, бесконечное их число. Дается простейшее теоретическое описание таких резонансов. Обсуждается возможность их экспериментального наблюдения.

Как было показано в работах [1, 2], квантовая система, находящаяся в периодическом по времени внешнем поле, описывается волновыми функциями нестационарных квазиэнергетических состояний (КЭС), которые в этом случае играют ту же роль, что и стационарные волновые функции в обычных ситуациях с независящим от времени гамильтонианом. Волновые функции КЭС образуют ортонормированный базис [3] и могут быть представлены в виде

$$|\Psi_j(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{E}_j t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\Psi_j^k\rangle e^{-ik\omega t}, \tag{1}$$

где квазиэнергия $\tilde{E}_j$ и Фурье-гармоники $|\psi_j^k\rangle$ не зависят от времени, $\omega = 2\pi/T$, T — период внешнего поля.

Если на атом, находящийся в некотором КЭС $|\psi_i(t)\rangle$, подействовать слабым дополнительным полем, то могут произойти переходы в другие КЭС $|\psi_j(t)\rangle$. В обычном стационарном случае переход между двумя состояниями возможен только тогда, когда частота поля ν совпадает с частотой перехода $\omega_{ij}=(E_i-E_j)/\hbar$. В противоположность этому переход между двумя КЭС возможен на бесконечном числе частот $\nu=\pm\tilde{\omega}_{ij}+n\omega$, где $\tilde{\omega}_{ij}=(\tilde{E}_i-\tilde{E}_j)/\hbar$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, нестационарный характер волновых функций КЭС позволяет наблюдать новое явление: квантовые переходы между двумя состояниями на нескольких резонансных частотах одновременно. Поскольку при этом переход из состояния $|\psi_i(t)\rangle$ в $|\psi_j(t)\rangle$ происходит по нескольким каналам, должна наблюдаться интерференция амплитуд перехода, обусловленных отдельными резонансными гармониками поля. В частности, вероятность перехода может оказаться равной нулю, хотя каждая из резонансных гармоник в отдельности переход вызывает. Покажем, что многочастотные резонансные переходы действительно возможны и приведем простейшее их теоретическое описание.

Пусть квантовая система с периодически зависящим от времени гамильтонианом $\hat{H}_0(t)$, состояния которой имеют вид (1), подвергается воздействию слабого дополнительного поля с частотой ν. Возмущенные волновые функции $|\Phi(t)\rangle$ удовлетворяют уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = [\hat{H}_0(t) + V(t)]\,|\Phi(t)\rangle, \tag{2}$$

где $V(t)$ — оператор взаимодействия квантовой системы со слабым полем. В самом общем случае его можно записать в виде

$$V(t) = V e^{i\nu t} + V^{+} e^{-i\nu t}. \tag{3}$$

Будем искать $|\Phi(t)\rangle$ в виде разложения по функциям (1)

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_j C_j\,|\Psi_j(t)\rangle. \tag{4}$$

Из формул (1)—(4) можно получить систему уравнений для коэффициентов разложения C_j

$$i\hbar\dot{C}_i = \sum_{j,\,n}\left\{V^n_{ij} e^{-i(n\omega-\tilde{\omega}_{ij}-\nu)t} + (V^{+}_{ij})^{-n} e^{i(n\omega+\tilde{\omega}_{ij}-\nu)t}\right\} C_j, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} V^n_{ij} &= \sum_k \langle\psi^k_i\,|\,V\,|\,\psi^{k+n}_j\rangle, \\ (V^{+}_{ij})^{-n} &= \sum_k \langle\psi^k_i\,|\,V^{+}\,|\,\psi^{k-n}_j\rangle = (V^n_{ji})^{*}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поскольку возмущение предполагается достаточно слабым, то в системе уравнений (5) можно оставить только медленно меняющиеся резонансные члены, которые появляются при условии

$$\nu \approx n\omega - \tilde{\omega}_{ij} \tag{7а}$$

или

$$\nu \approx n\omega + \tilde{\omega}_{ij}. \tag{7б}$$

Предположим для определенности, что выполняется условие (7а). В этом случае система (5) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_i &= V^n_{ij} e^{-i\delta t} C_j, \\ i\hbar\dot{C}_j &= (V^n_{ij})^{*} e^{i\delta t} C_i, \\ i\hbar\dot{C}_l &= 0,\ l \neq i,\ j, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\delta = n\omega - \tilde{\omega}_{ij} - \nu. \tag{9}$$

Такая система уравнений встречается при описании резонанса между обычными стационарными состояниями. Воспользовавшись известными результатами [4], получим выражение для вероятности перехода из квазиэнергетического состояния $|\Psi_i(t)\rangle$ в $|\Psi_j(t)\rangle$ под действием слабого поля с частотой ν

$$P_{i\to j}(\nu) = |C_j(t)|^2 = \frac{4\,|V^n_{ij}|^2}{\hbar^2\left[\delta^2 + 4\dfrac{|V^n_{ij}|^2}{\hbar^2}\right]} \sin^2\left\{\frac{t}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{4\,|V^n_{ij}|^2}{\hbar^2}}\right\}. \tag{10}$$

Пусть теперь слабое поле имеет резонансные гармоники с частотами ν_1 и ν_2

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &\approx n_1\omega - \tilde{\omega}_{ij}, \\ \nu_2 &\approx n_2\omega - \tilde{\omega}_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В этом случае вместо (8) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_i &= \left\{V^{n_1}_{ij} e^{-i\delta_1 t} + V^{n_2}_{ij} e^{-i\delta_2 t}\right\} C_j, \\ i\hbar\dot{C}_j &= \left\{(V^{n_1}_{ij})^{*} e^{i\delta_1 t} + (V^{n_2}_{ij})^{*} e^{i\delta_2 t}\right\} C_i, \\ i\hbar\dot{C}_l &= 0,\ l \neq i,\ j, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= n_1\omega - \tilde{\omega}_{ij} - \nu_1,\\ \delta_2 &= n_2\omega - \tilde{\omega}_{ij} - \nu_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для произвольных δ_1 и δ_2 решение системы (12) нельзя выразить в конечном виде через известные функции, но для целей настоящей работы достаточно рассмотреть случай $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. При этом система уравнений (12) имеет тот же вид, что и (8), а вероятность перехода при одновременном действии двух резонансных гармоник равна

$$P_{i\to j}(\nu_1, \nu_2) = \frac{4\left|V_{ij}^{n_1} + V_{ij}^{n_2}\right|^2}{\hbar^2\left[\delta^2 + \frac{4\left|V_{ij}^{n_1} + V_{ij}^{n_2}\right|^2}{\hbar^2}\right]} \sin^2\left\{\frac{t}{2}\sqrt{\delta^2 + \frac{4\left|V_{ij}^{n_1} + V_{ij}^{n_2}\right|^2}{\hbar^2}}\right\}. \tag{14}$$

Интересной особенностью многочастотных резонансов является зависимость вероятности перехода не только от амплитуды, поляризации и частоты отдельных гармоник, но и от их начальных фаз. Рассмотрим простейшую ситуацию, которую легко осуществить на опыте: спин $1/2$ находится в магнитном поле

$$H(t) = H_0 + H_1 \cos \omega t, \tag{15}$$

направленном вдоль оси z, а слабое поле, вызывающее переходы, имеет две резонансные гармоники, осциллирующие вдоль оси x,

$$h(t) = h_1 \cos(\nu_1 t + \varphi_1) + h_2 \cos(\nu_2 t + \varphi_2). \tag{16}$$

Легко показать, что волновые функции КЭС имеют вид

$$\left.\begin{aligned}|\Psi_1(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{2}\omega_0 t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega t} J_k\left(\frac{\omega_1}{2\omega}\right)|+1/2\rangle,\\ |\Psi_2(t)\rangle &= e^{\frac{i}{2}\omega_0 t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega t} J_{-k}\left(\frac{\omega_1}{2\omega}\right)|-1/2\rangle,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$, $\omega_1 = \gamma H_1$, γ — гиромагнитная постоянная, $J_k(\omega_1/2\omega)$ — функции Бесселя первого рода, а $|+{}^1/_2\rangle$ и $|-{}^1/_2\rangle$ — собственные векторы проекции спина на ось z. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}|\psi_1^k\rangle &= J_k\left(\frac{\omega_1}{2\omega}\right)|+1/2\rangle,\\ |\psi_2^k\rangle &= J_{-k}\left(\frac{\omega_1}{2\omega}\right)|-1/2\rangle,\\ \tilde{\omega}_{21} &= \omega_0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Оператор взаимодействия $V(t)$ атома с полем $h(t)$ можно представить в виде

$$V(t) = \gamma\left(h_1 e^{i\varphi_1} e^{i\nu_1 t} + h_2 e^{i\varphi_2} e^{i\nu_2 t} + \text{к. с.}\right)\hat{S}_x, \tag{19}$$

где $\hat{S}_x$ — оператор проекции спина на ось x. Принимая во внимание (18) и (6), легко теперь записать выражения для $V_{ij}^{n_1}$ и $V_{ij}^{n_2}$ из формулы (14)

$$\left.\begin{aligned}V_{12}^{n_1} &= \hbar\gamma\frac{h_1}{2} J_{-n_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) e^{i\varphi_1},\\ V_{12}^{n_2} &= \hbar\gamma\frac{h_2}{2} J_{-n_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) e^{i\varphi_2}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Здесь использовано известное свойство функций Бесселя [5]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(x) = J_n(2x). \tag{21}$$

Подставляя (20) в (14), получим окончательно

$$P_{1\to 2}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\gamma^2 \left| h_1 J_{-n_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + h_2 J_{-n_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \right|^2}{\delta^2 + \gamma^2 \left| h_1 J_{-n_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + h_2 J_{-n_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \right|^2} \times$$

$$\times \sin^2 \left\{ \frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 \left| h_1 J_{-n_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + h_2 J_{-n_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \right|^2} \right\}. \quad (22)$$

Отсюда видно, что при $h_1 J_{-n_1}(\omega_1/\omega) \approx h_2 J_{-n_2}(\omega_1/\omega)$ вероятность перехода между КЭС существенно зависит от разности начальных фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$ резонансных гармоник и, как было сказано выше, может равняться нулю, хотя каждая из резонансных гармоник может вызывать переход.

Основная формула (14), а следовательно и (22), получена в предположении, что расстройки $\delta_1 = n_1\omega - \tilde{\omega}_{ij} - \nu_1$ и $\delta_2 = n_2\omega - \tilde{\omega}_{ij} - \nu_2$ одинаковы. Если же δ_1 и δ_2 отличаются на достаточно малую величину, то можно применять прежние формулы, но считать, что разность фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$ медленно изменяется со временем с частотой $(\delta_2-\delta_1)$. Это приведет, как видно из (22), к биениям в вероятности перехода с частотой $(\delta_1-\delta_2)$.

Для обнаружения многочастотных резонансов можно использовать ячейку с парами оптически ориентированных атомов. Луч накачки должен быть направлен вдоль оси z. Если слабое поле, индуцирующее переходы между КЭС отсутствует, то магнитные моменты атомов будут ориентированы вдоль оси z и поглощение света накачки минимально. Интенсивность прошедшего через ячейку луча накачки будет постоянна. При наличии переходов проекция магнитного момента на ось z будет изменяться, как это видно из (22), что приведет к биениям в интенсивности прошедшего через ячейку луча накачки.

Литература

[1] Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, *51*, 1492, 1966.
[2] В. И. Ритус. ЖЭТФ, *51*, 1544, 1966.
[3] Я. Б. Зельдович. Усп. физ. наук, *110*, 139, 1973.
[4] Ф. Бертен. Основы квантовой электроники, 25. «Мир», М., 1971.
[5] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 994. ГИФМЛ, М., 1963.

Поступило в Редакцию 13 декабря 1978 г.