Доказательство. Допустим, что в группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга $F(G)$. Заметим, что

$$\Delta(G,A) \subseteq \overline{\Delta}(G,A) \subseteq \overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)$$

и на основании теоремы 4.1 $\Delta(G) = \overline{\Delta}(G,A)$.

Предположим, что подгруппа $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)$ отлична от подгруппы $\overline{\Delta}(G,A)$, тогда $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)/\overline{\Delta}(G,A) \neq 1$ и, вместе с тем, $K/\overline{\Delta}(G,A)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G/\overline{\Delta}(G,A)$, содержащейся в $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)/\overline{\Delta}(G,A)$. Так как факторгруппа $K/\overline{\Delta}(G,A)$ нильпотентна, то на основании леммы 3.5 заключаем, что K является p-нильпотентной подгруппой. Откуда следует, что $K \subseteq F(G)$. Но тогда

$$K \subseteq \overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A) \cap \overline{\Delta}_{F}(G,A),$$

что противоречит выбору подгруппы K. Следовательно, предположение не верно и $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)/\overline{\Delta}(G,A) = 1$, а, это влечет $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A) = \Delta(G,A)$.

Из теоремы 4.3 на основании леммы 3.4 получаем

4.3.1. Следствие. *Пусть G – разрешимая группа с группой операторов A такой, что* $(|G|,|A|)=1$. *Если $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A) \neq G$, то $\overline{\Delta}_{\overline{F}}(G,A)$ является нильпотентной подгруппой группы G.*

В случае тривиальности группы операторов A из теоремы 4.3 получаем

4.3.2. Следствие. *Если в разрешимой группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга, то их пересечение совпадает с подгруппой $\Delta(G)$.*

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

3. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

5. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

6. Thompson, J. G. Normal *p*-complements for finite groups / J. G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – № 1. – P. 43–46.

7. Gorenshtein, D. Finite groups / D. Gorenshtein. – New York : Harper and Row, 1968. – 572 p.

8. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

9. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI: 10.1142 / S1793557121500261.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 23.03.2022

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (132), 2022

УДК 519.872.5:681.142.2

Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть с одноместными буферами

В.В. Бураковский

Рассматривается симметричная кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа с N абонентскими станциями, на каждой из которых имеется одноместный буфер. При поступлении маркера подключается ординарная дисциплина обслуживания сообщений. Потоки поступающих сообщений предполагаются пуассоновскими, независимыми, одинаковой интенсивности λ. Получены уравнения, позволяющая вычислить стационарные вероятности, а также основные вероятностно-временные характеристики рассматриваемой локальной сети.
Ключевые слова: маркерная кольцевая локальная сеть, станция, сообщение, одноместный буфер, ординарная дисциплина обслуживания, стационарные вероятности состояний.

The symmetric token-passing ring local area network with N stations in which each station has a single buffer is studied. When a token arrives, the ordinary discipline is on. The message arrival streams are assumed to be independent Poisson processes with rates λ. Equations for the steady-state probabilities and main characteristics of the considered network are obtained.
Keywords: token-passing ring local area network, station, message, single buffer, ordinary service discipline, steady-state probabilities.

Введение. Среди различных классов компьютерных сетей в настоящее время большой интерес для автоматизации производства, функционирования фирм и учрежденческой деятельности представляют локальные вычислительные сети (ЛВС). Применение ЛВС с кольцевой топологией происходит во многих наукоемких отраслях машиностроения, к которым в частности относятся авиаприборостроение, ракетостроение и другие. Поэтому интерес представляет проблема повышения эффективности их применения.

Протокол маркерного доступа [1, с. 101] является одной из самых эффективных схем, обеспечивающих связь между станциями в кольцевой сети передачи данных. При помощи этого протокола происходит подключение подавляющего числа пользователей высокоскоростного, беспроводного и телефонного Интернета. Кольцевая ЛВС (КЛВС) [2, с. 121] с маркерным доступом относится к протоколам детерминированного множественного доступа циклического типа. Она представляет собой совокупность абонентских станций (АС), соединенных последовательно двухточечными линиями. АС получают право на передачу данных при получении специального служебного кадра – маркера, циркулирующего по кольцу. Функционирование сети происходит в соответствии со стандартом ANSI/IEEE 802.5 [3, с. 23]. При поступлении маркера на АС случайным образом подключается ординарная (ordinary) дисциплина обслуживания сообщений [4, с. 10]. Математическими моделями КЛВС с маркерным доступом являются системы массового обслуживания [5, с. 64]. Адекватность математических моделей, описывающих КЛВС с ординарной дисциплиной обслуживания стоящих в буфере АС сообщений, проверялась при помощи разработанных имитационных моделей [6, с. 19]. Основные вероятностно-временные характеристики, полученные с помощью стационарных вероятностей состояний рассматриваемой сети, необходимы для анализа эффективности и оптимизации функционирования КЛВС [7, с. 9]. Приводится процедура определения стационарных вероятностей состояний для ординарной (ordinary) дисциплины обслуживания на АС [8, с. 39].

Описание математической модели. Рассмотрим симметричную КЛВС с протоколом маркерного доступа (стандарт ANSI/IEEE 802.5). На каждой из абонентских станций (АС) КЛВС имеется одноместный буфер. Дисциплина обслуживания сообщений на каждой АС – ординарная. Данная дисциплина предусматривает, что маркер уходит с АС после обслуживания не более 1 сообщения, находящегося в буфере на момент поступления маркера на АС.

Всего в сети имеется конечное число N АС. Поступающие на каждую станцию сообщения образуют простейший поток интенсивности λ. Обозначим через a время приема сообщения на АС – адресате, $\Delta = N\delta + a$ – время передачи сообщения по кольцу. Если с АС передаются l сообщений, то время передачи маркера на следующую АС – $\delta + l\Delta$, $0 \le l \le 1$.

С момента прихода маркера на АС и до окончания обслуживания (до момента ухода маркера) в буфер станции не могут поступать сообщения, поскольку он занят. При поступлении сообщения на АС, буфер которой полностью занят, или на АС, где уже находится маркер, происходит его потеря. Будем изучать процесс передачи сообщений для произвольной АС, поскольку имеется очевидная симметрия этих процессов на всех АС КЛВС.

Стационарные вероятности и вероятностно-временные характеристики. В момент поступления маркера на АС она может находиться всегда в одном из 2 состояний: свободном, когда на АС нет сообщений, с вероятностью p_0 и занятом с вероятностью p_1 в противном случае. Будем рассматривать поведение КЛВС в моменты поступления маркера на АС.

Обозначим через ν_k число сообщений, имеющихся на АС в момент t_k получения этой станцией k-го маркера, $k \in N$; ξ_k – число сообщений, поступивших в рассматриваемую АС за время $\theta_k = t_{k+1} - t_k$. Тогда имеет место соотношение $\nu_{k+1} = \xi_k$, где $\nu_k, \xi_k \in \{0,1\}$. Рассмотрим времена обращения маркера по кольцу. Если $\nu_k = 1$, то $\theta_k = \Delta + T_k$, где T_k – интервал времени между моментом отправки k-го маркера на очередную АС и моментом t_{k+1} получения следующего маркера; $\Delta = N\Delta + a$ – интервал времени между моментом отправки сообщения и моментом получения квитанции о приеме сообщения. T_k – случайная величина, равная $N\delta + \eta_k\Delta$, где η_k – количество сообщений, которые передавались в КЛВС за время обращения k-го маркера по кольцу. Если $\nu_k = 0$, то $\theta_k = T_k$.

Пусть $F_k(T)$ – функция распределения случайной величины T_k. Тогда

$$P(\xi_k = 0 \mid \nu_k = 0) = P(\xi_k = 0 \mid \nu_k = 1) = q_0^k;$$

$$P(\xi_k = 1 \mid \nu_k = 0) = P(\xi_k = 1 \mid \nu_k = 1) = q_1^k;$$

$$q_0^k = \int_{N\delta}^{N\delta+(N-1)\Delta} e^{-\lambda T} dF_k(T); q_1^k = 1 - q_0^k.$$

Полагая случайные величины $\xi_k, k \in N,$ независимыми в совокупности, получаем, что процесс изменения состояний АС в моменты поступления маркера является марковским и

$$p_0 = q_0;\, p_1 = 1 - p_0,$$

где

$$p_u = \lim_{k\to\infty} P(\nu_k = u), \lim_{k\to\infty} F_k(T) = F(T),$$

$$q_u = \lim_{k\to\infty} q_u^k, u \in \{0,1\}.$$

Пусть α_j – случайная величина, принимающая значение 0, если в момент поступления маркера на j-ую по счету от рассматриваемой АС там нет сообщений, и значение 1 в противном случае. Тогда $\eta = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j$ – количество сообщений, которые передавались за время обращения маркера по кольцу. Поскольку все АС в КЛВС имеют одинаковые параметры, будем считать, что вероятности p_0 для всех АС одинаковы. Предполагая независимость α_j в совокупности, получим, что η – биномиальная случайная величина, причем

$$P(\eta = m) = C_{N-1}^m (1 - p_o)^m p_o^{N-m-1}.$$

Отсюда следует, что

$$P(T = N\delta + m\Delta) = C_{N-1}^m (1 - p_o)^m p_o^{N-m-1}, 0 \le m \le N-1.$$

Таким образом, по формуле полной вероятности имеем

$$q_o = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\lambda(N\delta + m\Delta)} C_{N-1}^m (1 - p_o)^m p_o^{N-m-1}.$$

Применяя формулу бинома Ньютона, получим

$$q_o = e^{-\lambda N\delta}(p_o + e^{-\lambda\Delta}(1-p_o))^{N-1}.$$

Так как $p_o = q_o$, то получим уравнение $p_o = e^{-\lambda N\delta}(p_o + e^{-\lambda\Delta}(1-p_o))^{N-1}$ для определения вероятности p_o, которая является единственным корнем, находящимся в пределах

$$e^{-\lambda(N\delta+(N-1)\Delta)} < p_o < e^{-\lambda N\Delta}.$$

Время обращения маркера по кольцу является случайной величиной, которая принимает значения $N\delta + m\Delta$ с вероятностями g_m, которые вычисляются по формулам:

$$g_o = p_o^N;\ g_m = g_{om} + g_{1m} = C_N^m(1-p_o)^m p_o^{N-m}, 1 \le m \le N,$$

$$g_{om} = p_o C_{N-1}^m (1-p_o)^m p_o^{N-m-1} = C_{N-1}^m (1-p_o)^m p_o^{N-m},$$

$$g_{1m} = (1-p_o) C_{N-1}^m (1-p_o)^{m-1} p_o^{N-m} = C_{N-1}^{m-1}(1-p_o)^m p_o^{N-m}.$$

Получены следующие основные вероятностно-временные характеристики функционирования рассматриваемой КЛВС:

1. Среднее время задержки сообщения на АС

$$\tau = \frac{g_o N\delta}{1-e^{-\lambda N\delta}} + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{g_{om}(N\delta + m\Delta)}{1-e^{-\lambda(N\delta+m\Delta)}} + \frac{g_{1m}(N\delta+(m-1)\Delta)}{1-e^{-\lambda(N\delta+(m-1)\Delta)}}\right) - \frac{1}{\lambda}.$$

2. Вероятность потери сообщения на АС

$$PL = 1 - \frac{1-U}{\lambda TL},$$

где

$$U = g_o e^{-\lambda N\delta} + \sum_{m=1}^{N}(g_{om} e^{-\lambda(N\delta+m\Delta)} + g_{1m} e^{-\lambda(N\delta+(m-1)\Delta)}),$$

$$TL = N\delta + \Delta\sum_{m=1}^{N} m g_m.$$

Здесь TL – среднее время обращения маркера по кольцу.

3. Коэффициент загрузки АС

$$\rho = 1 - p_o.$$

4. Среднее число сообщений, обслуженных за время обращения маркера по кольцу

$$ES = \sum_{m=1}^{N} m g_m.$$

5. Среднее время обращения маркера по кольцу

$$TL = N\delta + \Delta ES.$$

6. Пропускная способность КЛВС

$$PRS = N\lambda.$$

7. Вероятность того, что все АС свободны

$$P_o = p_o^N.$$

8. Вероятность того, что все АС заняты

$$PZ = p_1^N.$$

9. Среднее время передачи маркера между соседними АС

$$TM = p_o\delta + p_1(\delta + \Delta).$$

Заключение. В результате проведенных исследований разработана математическая модель симметричной кольцевой локальной сети с протоколом маркерного доступа, на каждой станции которой имеется одноместный буфер. Обслуживание сообщений происходит по ординарной дисциплине. Предложенная модель основана на описании процесса функционирования симметричной маркерной кольцевой ЛВС при помощи систем M|G|1|1. Показано, что стационарные вероятности состояний рассматриваемой сети определяются из уравнений, которые зависят от числа АС в КЛВС и исходных параметров сети, а также ординарной дисциплины обслуживания сообщений. На основе анализа периодов занятости получены формулы для вычисления основных характеристик функционирования сети. Разработаны программы и проведены расчеты, позволяющие построить графики зависимости средних времен задержки сообщений на АС и их вероятностей потери от интенсивностей поступления сообщений. Локальные сети такого типа [9, с. 109], [10, с. 131] очень широко используются в настоящее время и проблемы их оптимизации, эффективности работы являются актуальными.

Литература

1. Takagi, H. Analysis of polling systems / H. Takagi. – Cambridge, M.A. : MIT Press, 1986. – 198 p.

2. Бакс, В. Кольцевые локальные сети с маркерным доступом и их производительность / В. Бакс // ТИИЭР. – 1989. – № 2. – С. 121–142.

3. Token-passing ring access method and physical layer specification : ANSI/IEEE 802.5 Standard-1985. – Superseding 802.5-1985 ; ANSI approved 25.01.1990 ; published 29.12.1989. – Cambridge : IEEE Press, 1985. – 89 p.

4. Бураковский, В. В. Локальные вычислительные сети: курс лекций / В. В. Бураковский, В. О. Родченко. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2008. – 78 с.

5. Бураковский, В. В. Маркерная кольцевая локальная сеть с конечными буферами и ординарным обслуживанием сообщений / В. В. Бураковский // Сборник научных трудов. – 1998. – Вып. 1 : Аэрокосмическое приборостроение России. Сер. 2, Авионика. – С. 63–67.

6. Бураковский, В. В. Имитационная модель КЛВС с бесконечными буферами и вентильным обслуживанием / В. В. Бураковский // Materiály IX mezinárodní vědecko-praktická conference «Efektivní nástroje moderních věd–2013», Praha, 27 dubna – 05 květn 2013 roku. – Praha : Publishing House «Education and Science» s.r.o., 2013. – Díl 40 : Matematika. – P. 19–22.

7. Бураковский, В. В. Кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа / В. В. Бураковский, Г. А. Медведев // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 9–16.

8. Бураковский, В. В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания / В. В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 39–41.

9. Бураковский, В. В. Маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания с сокращением / В. В. Бураковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 109–113.

10. Бураковский, В. В. Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть с конечными буферами и дисциплиной Бернулли обслуживания сообщений / В. В. Бураковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2020. – № 3 (120). – С. 131–134.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 26.01.2022