

МАТРИЦЫ МЮЛЛЕРА И ДЖОНСА КВАЗИОДНОРОДНЫХ МАГНИТООПТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СРЕД

В. Д. Тронько, Г. П. Головач и Э. П. Колесникова

Определены матрицы Мюллера и Джонса, позволяющие описать состояние поляризации света для среды, обладающей одновременно двуупределением и эффектом Фарадея (ЭФ), с учетом конечных скоростей распространения световой и управляющей волн.

Введение

В высокочастотных и СВЧ модуляторах света необходимо учитывать конечность скорости распространения света в среде. При СВЧ модуляции на ферромагнитном резонансе в кристаллах возникают большое двуупределение [1] за счет приложенного постоянного поперечного магнитного поля и ЭФ за счет продольной компоненты намагниченности вещества. Кроме того, в настоящее время появилось ряд веществ, обладающих большим естественным двуупределением [2].

В этой работе определены матрицы, описывающие состояние поляризации проходящего монохроматического и «белого» света с учетом конечной скорости распространения его в вышеупомянутых средах.

§ 1. Матрицы Мюллера

Матрица Мюллера однородной магнитооптически активной среды, обладающей линейным и квадратичным магнитооптическими эффектами, имеет вид [3]

$$M(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{4a^2}{D^2}(1 - \cos Dz) & -\frac{2a}{D} \sin Dz & \frac{2ab}{D^2}(1 - \cos Dz) \\ 0 & \frac{2a}{D} \sin Dz & \cos Dz & -\frac{b}{D} \sin Dz \\ 0 & \frac{2ab}{D^2}(1 - \cos Dz) & \frac{b}{D} \sin Dz & 1 - \frac{b^2}{D^2}(1 - \cos Dz) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $D = \sqrt{4a + b^2}$, a — удельное вращение плоскости поляризации света в веществе, b — удельное двуупределение, z — толщина кристалла.

Вычисления с учетом конечности скорости распространения света в веществе будем проводить методом разбиения среды на бесконечно малые участки толщиной Δz [3]. Матрица m -го участка равна

$$M_m(\Delta z) = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_m & 0 \\ 0 & 2a_m & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \Delta z + 0(\Delta z)^2, \quad (2)$$

где a_m определяется выражением [3]

$$a_m = a_0 \cos \left[\omega t + \left(\frac{\omega}{c} - k \right) (m-1) \Delta z \right], \quad (3)$$

ω , k — круговая частота и волновой вектор управляющего сигнала, c — скорость распространения света в веществе (в дальнейших расчетах индекс m при a_m опустим).¹ Толщина слоев Δz настолько мала, что можно считать $a_m(\Delta z)$ величиной постоянной.

Матрица среды толщиной z в этом случае равна

$$M(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \prod_{m=\frac{z}{\Delta z}}^{m=1} M_m(\Delta z). \quad (4)$$

Если $M_m(\Delta z)$ можно записать в виде [2], то матрица $M(z)$ равенства (4) представляет собой мультипликативный интеграл, удовлетворяющий матричному дифференциальному уравнению [6]

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z)M(z) \quad (5)$$

с начальным условием

$$M(0) = I, \quad (6)$$

где

$$T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_0 \cos(\omega t + az) & 0 \\ 0 & 2a_0 \cos(\omega t + az) & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$\alpha = (\omega/c) - k$, $z = (m-1)\Delta z$ — текущая координата. Задача (5), (6) эквивалентна следующим задачам Коши (m_{ij} — элементы матрицы M):

$$\left. \begin{aligned} m'_{11} &= 0, \quad m_{11}(0) = 1; \quad m'_{12} = 0, \quad m_{12}(0) = 0; \quad m'_{13} = 0, \quad m_{13}(0) = 0, \\ m'_{14} &= 0, \quad m_{14}(0) = 0; \\ m'_{21} &= -2am_{31}, \quad m'_{31} = 2am_{21} - bm_{41}, \quad m'_{41} = bm_{31}, \\ m'_{21}(0) &= m_{31}(0) = m_{41}(0) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} m'_{22} &= -2am_{32}, \quad m_{22}(0) = 1; \\ m'_{32} &= 2am_{22} - bm_{42}, \quad m_{32}(0) = 0; \\ m'_{42} &= bm_{32}, \quad m_{42}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} m'_{23} &= -2am_{33}, \quad m_{23}(0) = 0; \\ m'_{33} &= 2am_{23} - bm_{43}, \quad m_{33}(0) = 1; \\ m'_{43} &= bm_{33}, \quad m_{43}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} m'_{24} &= -2am_{34}, \quad m_{24}(0) = 0; \\ m'_{34} &= 2am_{24} - bm_{44}, \quad m_{34}(0) = 0; \\ m'_{44} &= bm_{34}, \quad m_{44}(0) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из (8) находим $m_{11} = 1$, $m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0$. Полагая в (9) $x = bz$ и считая, что $b \gg a$, получим

$$\left. \begin{aligned} m'_{22} &= -\varepsilon m_{32} \cos \left(\omega t + \frac{\alpha x}{b} \right), \\ m'_{32} &= \varepsilon m_{22} \cos \left(\omega t + \frac{\alpha x}{b} \right) - m_{42}, \\ m'_{42} &= m_{32}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

¹ Решение проводится для случая квазизнородной среды при учете условия $\omega \ll \nu$, где ν — частота падающего на среду света. Подробнее см. в работе [3].

где $\varepsilon = 2a/b \ll 1$ — малый параметр. Тогда приближенное решение системы (12) ищем в виде [7]

$$\left. \begin{aligned} m_{22}^* &= m_{220} + \varepsilon m_{221}, \\ m_{32}^* &= m_{320} + \varepsilon m_{321}, \\ m_{42}^* &= m_{420} + \varepsilon m_{421}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение (12), а также используя начальные условия

$$m_{220}(0) = 1, \quad m_{320}(0) = m_{321}(0) = m_{221}(0) = m_{420}(0) = m_{421}(0) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} m_{220} &= 1, \quad m_{221} = m_{320} = m_{420} = 0, \\ m_{321} &= \frac{ab \sin \omega t \cos bz + b^2 \cos \omega t \sin bz - ab \sin(\omega t + az)}{b^2 - a^2}, \\ m_{421} &= \frac{ab \sin \omega t \sin bz - b^2 \cos \omega t \cos bz + b^2 \cos(\omega t + az)}{b^2 - a^2} \quad (b \neq |a|). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} m_{22}^* &= 1, \quad m_{32}^* = \frac{2a_0}{b^2 - a^2} [b \cos \omega t \sin bz + a \sin \omega t \cos bz - a \sin(\omega t + az)], \\ m_{42}^* &= \frac{2a_0}{b^2 - a^2} [b \cos(\omega t + az) - b \cos \omega t \cos bz + a \sin \omega t \sin bz] \quad (b \neq |a|). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Аналогично решаем задачи (10), (11). Имеем

$$\left. \begin{aligned} m_{23}^* &= \frac{2a_0}{b^2 - a^2} [a \sin(\omega t + az) \cos bz - b \cos(\omega t + az) \sin bz - a \sin \omega t], \\ m_{33}^* &= \cos bz, \quad m_{43}^* = \sin bz \quad (b \neq |a|), \\ m_{34}^* &= -\sin bz, \quad m_{44}^* = \cos bz, \\ m_{24}^* &= \frac{2a_0}{b^2 - a^2} [b \cos \omega t - b \cos bz \cos(\omega t + az) - a \sin bz \sin(\omega t + az)]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

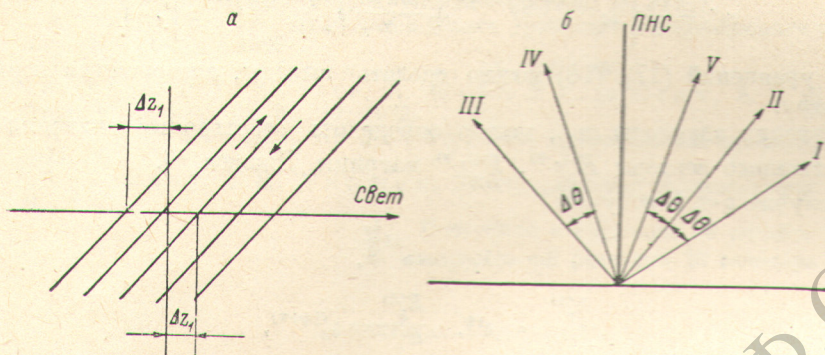
Когда выполняется условие синхронизма скоростей распространения управляющей и оптической электромагнитных волн в кристалле $\omega/c = k$, то матрица Мюллера будет такой же, как и при распространении волн в однородной среде $\omega/c = k = 0$ [2]. Действительно, на всем пути распространения оптического фронта волны при выполнении условия синхронизма параметры вещества остаются неизменными.

Однако для магнитооптически активной среды при выполнении условия $b = |a|$ возможно изменение угла поворота плоскости поляризации проходящего света в более высокой степени, чем при условии выполнения синхронизма скоростей. Действительно, в этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} m_{32}^* &= \frac{a_0}{a} [az \cos(\omega t + az) + \cos \omega t \sin az], \\ m_{23}^* &= -\frac{a_0}{a} [az \cos \omega t + \cos(\omega t + az) \sin az] \quad (b = |a|), \\ m_{42}^* &= \frac{a_0}{|a|} [az \sin(\omega t + az) - \sin \omega t \sin az], \\ m_{24}^* &= \frac{a_0}{|a|} [-az \sin \omega t + \cos \omega t - \cos az \cos(\omega t + az)]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Независимо от степени выполнения условия синхронизма скоростей первые составляющие элементов матриц Мюллера растут как $a_0 z$, вторые половины правых частей по z ограничены и достигают максимальных значений при выполнении условия синхронизма, т. е. $b = |a| \rightarrow 0$ ($b > a_0$). При выполнении условия $b = |a|$ происходит параметрическое взаимодействие распространяющихся в среде электромагнитных волн с увеличением угла поворота плоскости поляризации света, проходящего через среду, с расстоянием z .

В качестве примера можно рассмотреть магнитооптическую среду с удельным коэффициентом угла поворота плоскости поляризации a , меняющейся по закону $a = a_0 \operatorname{sgn}(\sin kz)$. Тогда магнитооптически активную среду можно представить в виде слоев $\Delta z_1 = \pi/k$, в которых угол поворота плоскости поляризации меняется от $+a_0 \Delta z_1$ до $-a_0 \Delta z_1$ (см. рисунок, а). Такая модель подобна ферритмагнитному кристаллу со 180-градусными доменами. Проходя первый участок, свет повернет плоскость поляри-



ПНС — плоскость наибольшей скорости, относительно которой происходит зеркальный поворот при сдвиге фаз, равном 180° .

зации относительно начального положения I на угол $\Delta\theta = a_0 \Delta z_1$ (положение II на рисунке, б).

При выполнении условия $b = k$ сдвиг по фазе между собственными волнами света составит 180° , что соответствует положению III угла плоскости поляризации. Во втором слое плоскость поляризации повернется на $\Delta\theta = -a_0 \Delta z_1$ (положение IV) относительно положения (III) и, получив сдвиг по фазе $bz = \pi$, займет положение V . При прохождении N слоев, где $N = z/\Delta z_1$ изменение угла поворота плоскости поляризации возрастает до величины $Na_0 \Delta z_1 = a_0 z$.

Данная упрощенная модель справедлива и для бегущей управляющей волны с $\omega \neq 0$.

В качестве экспериментального подтверждения вышеуказанного эффекта можно назвать работу [9].

§ 2 Матрицы Джонса

Аналогично вышеприведенному решению с теми же самыми ограничениями находятся элементы матрицы Джонса для когерентного излучения²

$$\left. \begin{aligned} m_{11}^* &= e^{-i \frac{bz}{2}}, & m_{22}^* &= e^{i \frac{bz}{2}}, \\ m_{12}^* &= \frac{2a_0 b}{b^2 - a^2} \left[\left(\frac{a}{b} \cos \frac{bz}{2} \sin \frac{az}{2} - \sin \frac{bz}{2} \cos \frac{az}{2} \right) \times \right. \\ &\times \cos \left(\omega t + \frac{az}{2} \right) + i \left(\frac{a}{b} \cos \frac{az}{2} \sin \frac{bz}{2} - \cos \frac{bz}{2} \sin \frac{az}{2} \right) \sin \left(\omega t + \frac{az}{2} \right) \left. \right], \\ m_{21}^* &= \frac{2a_0 b}{b^2 - a^2} \left[\left(\sin \frac{bz}{2} \cos \frac{az}{2} - \frac{a}{b} \cos \frac{bz}{2} \sin \frac{az}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{az}{2} \right) + \right. \\ &+ i \left(\frac{a}{b} \sin \frac{bz}{2} \cos \frac{az}{2} - \cos \frac{bz}{2} \sin \frac{az}{2} \right) \sin \left(\omega t + \frac{az}{2} \right) \left. \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Причем элементы m_{12}^* и m_{21}^* должны иметь порядок ϵ .

² Матрицу Джонса также удается найти, сведя ряды матрицанта вида [8]

$$M(z) = I + \int_0^z T(z) dz + \int_0^z T(z) dz \int_0^z T(z) dz + \dots, \text{ где } T(z) \text{ — матрица Джонса, соответствующая матрице Мюллера (7).}$$

При выполнении условия $b = |\alpha|$ из (17) имеем

$$\left. \begin{aligned} m_{11}^* &= e^{-i\frac{bz}{2}}, & m_{22}^* &= e^{i\frac{bz}{2}}, \\ m_{12}^* &= -\frac{a_0}{2} \left[ze^{-i(\omega t + \frac{\alpha z}{2}) \operatorname{sgn} \alpha} + \frac{\sin \alpha z}{\alpha} e^{i(\omega t + \frac{\alpha z}{2}) \operatorname{sgn} \alpha} \right], \\ m_{21}^* &= \frac{a_0}{2} \left[ze^{i(\omega t + \frac{\alpha z}{2}) \operatorname{sgn} \alpha} + \frac{\sin \alpha z}{\alpha} e^{-i(\omega t + \frac{\alpha z}{2}) \operatorname{sgn} \alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из уравнений (17), (18) можно сделать выводы, аналогичные первому параграфу.

Вычислив элементы m_{ij} , можно определить собственные значения $\lambda_{1,2}$ и собственные векторы $E_x^{(1,2)}$, $E_y^{(1,2)}$ матрицы Джонса [10].

В случае $\varepsilon \ll 1$ получим

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\frac{bz}{2}}, \quad (19)$$

$$\frac{E_y^{(1)}}{E_x^{(1)}} = \rho_1 e^{i\psi}, \quad \frac{E_y^{(2)}}{E_x^{(2)}} = \rho_2 e^{i(\psi+\pi)}, \quad (20)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \left| \sin \frac{bz}{2} \right|}{|m_{12}^*|} \quad (21)$$

$$\cos \psi = \frac{\operatorname{Im}(m_{12}^*) \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{bz}{2} \right)}{|m_{12}^*|} \quad (22)$$

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{Re}(m_{12}^*) \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{bz}{2} \right)}{|m_{12}^*|} \quad (23)$$

Из (20), (21) следует, что собственные волны взаимно ортогональны и представляют собой право- и левоэллиптическое поляризованное излучение. Когда среда однородная ($\alpha = 0$), эллиптичность этих волн определяется общеизвестным выражением $\rho = a/b$ [11].

В случае $b = |\alpha|$ имеем

$$\rho = \frac{1}{\rho_2} = \frac{4|\alpha| \left| \sin \frac{\alpha z}{2} \right|}{a_0 \sqrt{\alpha^2 z^2 + 2\alpha z \sin(\alpha z) \cos(2\omega t + \alpha z) + \sin^2(\alpha z)}}, \quad (24)$$

$$\sin \psi = -\frac{(|\alpha| z + \operatorname{sgn} \alpha \sin \alpha z) \cos \left(\omega t + \frac{\alpha z}{2} \right) \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{|\alpha| z}{2} \right)}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + 2\alpha z \sin(\alpha z) \cos(2\omega t + \alpha z) + \sin^2(\alpha z)}}, \quad (25)$$

$$\cos \psi = \frac{(\alpha z - \sin \alpha z) \sin \left(\omega t + \frac{\alpha z}{2} \right) \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{|\alpha| z}{2} \right)}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + 2\alpha z \sin(\alpha z) \cos(2\omega t + \alpha z) + \sin^2(\alpha z)}}. \quad (26)$$

Собственные волны в этом случае взаимно ортогональны с правой и левой эллиптической поляризацией.

Заключение

Таким образом, при модуляции светового потока СВЧ сигналом магнитооптически активным кристаллом с большим двупреломлением необходимо выполнение условия равенства набегов фаз между собственными волнами в отсутствие эффекта вращения плоскости поляризации и набегов фаз между фронтами управляющей и световых волн в кристалле единичной длины. В этом случае между электромагнитными волнами в веществе происходит параметрическое взаимодействие и возможна полная перекачка энергии от одной ортогональной световой моды в другую.

Литература

- [1] В. Д. Тронько, В. В. Данилов. Вест. Киев. универ., сер. физ., № 12, 76, 1971.
- [2] Г. А. Смоленский, В. В. Леманов, Г. М. Недлин, М. П. Петров, Р. В. Писарев. Физика магнитных диэлектриков. «Наука», Л., 1974.
- [3] В. Д. Тронько. Опт. и спектр., 29, 354, 1970.
- [4] В. Д. Тронько. Рад. и электр., 17, 609, 1972.
- [5] В. Д. Тронько. Кристаллография, 1978.
- [6] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. «Наука», М., 1967.
- [7] Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальное уравнение и вариационное исчисление. «Наука», М., 1969.
- [8] В. Д. Тронько. Опт. и спектр., 30, 739, 1971.
- [9] P. K. Tien, R. J. Martin, R. Wolf, R. C. Le Craw, S. L. Blank. Appl. Phys. Lett., 21, 8, 394, 1972.
- [10] В. Я. Молчанов, Г. В. Скороцкий. Квантовая электроника, 4, 580, 1971.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИТЛ, М., 1957.

Поступило в Редакцию 26 октября 1976 г.
В окончательной редакции 26 сентября 1977 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ