Разложим оператор импульса $\hat{\mathscr{P}}$ в ряд по координатам q. Предварительно представим в виде рядов якобиан и его логарифм

$$J = J_0 \left(1 + \frac{1}{J_0} \frac{\partial J}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \frac{1}{2J_0} \frac{\partial^2 J}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha q^\beta + \ldots \right),$$

$$\ln J = \ln J_0 + \frac{1}{J_0} \frac{\partial J}{\partial q^\alpha} q^\alpha + \frac{\partial}{2J_0} \frac{\partial^2 J}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} q^\alpha q^\beta - \frac{1}{2J_0^2} \frac{\partial J}{\partial q^\alpha} \frac{\partial J}{\partial q^\beta} q^\alpha q^\beta + \ldots,$$

везде подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Обозначив

$$A_\alpha = \frac{1}{2J_0} \frac{\partial J}{\partial q^\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2J_0^2} \left(J_0 \frac{\partial^2 J}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \frac{\partial J}{\partial q^\alpha} \frac{\partial J}{\partial q^\beta} \right),$$

получаем выражение для оператора импульса

$$\hat{\mathscr{P}}_\alpha = \hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} + \hat{\mathscr{P}}_{1\alpha} + \hat{\mathscr{P}}_{2\alpha} + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} = -i\hbar \partial / \partial q^\alpha, \quad \hat{\mathscr{P}}_{1\alpha} = -t\hbar A_\alpha, \quad \hat{\mathscr{P}}_{2\alpha} = -i\hbar A_{\alpha\beta} q^\beta.$$

Преобразуем оператор кинетической энергии с учетом разложения (6)

$$2\hat{\mathscr{T}} = (\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} - \hat{\mathscr{P}}_{1\alpha} - \hat{\mathscr{P}}_{2\alpha} - \ldots) G^{\alpha\beta}(q) (\hat{\mathscr{P}}_{0\beta} + \hat{\mathscr{P}}_{1\beta} + \hat{\mathscr{P}}_{2\beta} + \ldots) = \hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} G^{\alpha\beta}(q) \hat{\mathscr{P}}_{0\beta} -$$

$$- i\hbar (\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} G_0^{\alpha\beta} A_\beta - A_\alpha G_0^{\alpha\beta} \hat{\mathscr{P}}_{0\beta}) - i\hbar \left(\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} A_\beta - A_\alpha \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} q^\gamma \hat{\mathscr{P}}_{0\beta} \right) -$$

$$- i\hbar (\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} G_0^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} q^\gamma - A_{\alpha\gamma} q^\gamma G_0^{\alpha\beta} \hat{\mathscr{P}}_{,0\beta}) + \hbar^2 A_\alpha A_\beta G_0^{\alpha\beta} + \ldots.$$

Поскольку индексы α и β немые, изменим во вторых членах в скобках обозначения $\alpha \rightleftarrows \beta$. Воспользуемся также симметрией матрицы $G^{\alpha\beta}$ и перестановочным соотношением

$$\hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} q^\gamma - q^\gamma \hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} = -i\hbar \delta_\alpha^\gamma.$$

Выражение для оператора кинетической энергии, в котором оператор импульса задан с точностью до третьего члена разложения, примет вид

$$\hat{\mathscr{T}} = \frac{1}{2} \hat{\mathscr{P}}_{0\alpha} G^{\alpha\beta}(q) \hat{\mathscr{P}}_{0\beta} - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} A_\beta + G_0^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta G_0^{\alpha\beta} \right) + \ldots \tag{7}$$

Члены, заключенные в скобку, дают постоянную добавку к уровням энергии. Таким образом, отброшенные в работах [1, 2] члены кинетической энергии во втором приближении теории возмущения никакого вклада в колебательные переходы не дают.

Литература

[1] Л. А. Грибов, Г. В. Ховрин. ДАН СССР, *217*, 307, 1974.
[2] Ю. И. Пономарев, М. Р. Расовский. Опт. и спектр., *41*, 545, 1976.

Поступило в Редакцию 5 января 1978 г.

УДК 535.4+534

О ДИФРАКЦИИ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

А. А. Глинский

При расчетах дифракции света на акустических волнах в литературе до сих пор рассматривались пучки света с равномерным распределением амплитуды по сечению пучка. Поэтому представляет интерес провести расчет дифракции света на плоской звуковой волне при гауссовом распределении амплитуды. Применим для этой цели использованный ранее в работах [1, 2] метод, в котором поле дифрагированной волны E_1 определяется интегралом

$$E_1 = -\frac{n_0}{2\pi c^2} \int_V \frac{dV}{R} \Delta \left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right]_{t - \frac{n_0 R}{c}}. \tag{1}$$

Здесь E_0 — электрическое поле первичной световой волны, R — расстояние от элемента объема dV пучка звуковой волны до точки наблюдения, Δ — отклонение показателя преломления среды от среднего значения n_0, вызванное прохождением звука. Интегрирование в (1) ведется по объему пучка звуковой волны. Как и в работе [1], ось ox выберем вдоль направления его распространения. Плоскость xoy совпадает с передней границей пучка звуковой волны, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Ширина пучка звуковой волны вдоль оси oz равна l.

Пусть на плоскость xoy падает нормально гауссов пучок света, амплитуда которого при $z=0$ пропорциональна $\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right)$, где w_0 — начальная ширина распределения. Тогда, согласно [3], величина E_0 при $z>0$ будет определяться выражением

$$E_0=\frac{2\pi a_0 w_0^2}{k\,(w_0^4+z^2k^{-2})^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w^2}\right)\exp i\left[\omega t-k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2\rho}\right)-\alpha\right],$$

$$w^2=w_0^2+z^2(kw_0)^{-2},\ \ \rho=z+(kw_0^2)^2z^{-1},\ \ \mathrm{tg}\,\alpha=kw_0^2z^{-1}. \tag{2}$$

При незатухающих звуковых волнах

$$\Delta=n_1\cos\left[\Omega t-(\mathbf{K},\ \mathbf{r})\right], \tag{3}$$

где n_1 — амплитуда изменения показателя преломления; Ω, $\mathbf{K}$ — частота и волновой вектор звуковой волны; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение элемента объема dV, причем начало координат находится в центре падающего гауссова пучка. Как и в работах [1, 2], рассчитаем дифракционную картину при $R\gg r$. При этом в знаменателе (1) положим $R=R_0$, а в фазе

$$R=R_0-\left(\frac{\mathbf{R}_0}{R_0},\ \mathbf{r}\right)=R_0-(\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z), \tag{4}$$

где $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор точки наблюдения, β_1, β_2, β_3 — компоненты единичного вектора $\mathbf{R}_0/R_0$. Подстановка (2)—(4) в (1) с учетом того, что $\Omega\ll\omega$, дает $E_1=(E_1)_++(E_1)_-$, где

$$(E_1)_\pm=A_1\int\limits_0^l(w_0^4+z^2k^{-2})^{-1/2}\exp i\left[(\beta_3-1)\,kz-\alpha\right]\left[(I_1)_\pm-i\,(I_2)_\pm\right](I_3-iI_4)\,dz. \tag{5}$$

В (5) введены обозначения

$$(I_1)_\pm=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2k^2w^2}\right)\cos\,(\beta_1\mp Kk^{-1})\,\xi\cos\frac{\xi^2}{2\rho k}\,d\xi,$$

$$I_3=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2k^2w^2}\right)\cos\beta_2\eta\cos\frac{\eta^2}{2\rho k}\,d\eta.$$

Интегралы $(I_2)_\pm$, I_4 отличаются от $(I_1)_\pm$, I_3 тем, что в них третьим множителем подынтегральной функции является не косинус, а синус. Интегрирование по $\xi=kx$, $\eta=ky$ в (5) проводится в бесконечных пределах в силу характера амплитудного множителя в (2). Далее будет исследовано поле $(E_1)_\pm$ в зависимости от β_1, β_2, β_3. Поэтому в (5) и всех дальнейших формулах для $(E_1)_\pm$ множители $A_{1-4}=A_{1-4}\,(t)$, не зависящие от β_1, β_2, β_3, в явном виде в связи с их громоздкостью выписываться не будут. Используя приведенные в [4] значения интегралов I_1—I_4, формулу (5) преобразуем к виду

$$(E_1)_\pm=A_2\int\limits_0^l\frac{\exp\left\{-\frac{(\beta_1\mp Kk^{-1})^2+\beta_2^2}{2\left[(kw)^{-2}+w^2\rho^{-2}\right]}-i\left[\mathrm{arc\,tg}\,\frac{kw^2}{\rho}-\frac{(\beta_1\mp Kk^{-1})^2+\beta_2^2}{2\rho k\left[(kw)^{-4}+(\rho k)^{-2}\right]}-(\beta_3-1)\,kz+\alpha\right]\right\}}{\sqrt{(w_0^4+z^2k^{-2})\left[(kw)^{-4}+(\rho k)^{-2}\right]}}\,dz. \tag{6}$$

Интеграл (6) в общем случае может быть рассчитан только численно. Однако при не очень больших l выражение (6) значительно упрощается. Возьмем для оценок $l\simeq 10$ см (это приблизительно в 5 раз больше ширины применяемых обычно в лабораторной практике пучков звука), $\lambda=633$ нм, $n_0=1.5$, $w_0=0.1$ см. Тогда при всех z в подынтегральной функции формулы (6) отношение $z/kw_0^2\ll1$. Теперь с точностью до величин $\sim(z/kw_0^2)^2$ интеграл (6) приводится к виду

$$(E_1)_\pm=A_3\exp\left\{-\frac{1}{2}k^2w_0^2\left[\left(\beta_1\mp\frac{K}{k}\right)^2+\beta_2^2\right]\right\}\int\limits_0^1\exp ikl\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\beta_1\mp\frac{K}{k}\right)^2+\beta_2^2\right]+(\beta_3-1)\right\}\zeta d\zeta. \tag{7}$$

После элементарного интегрирования в (7) по $\zeta = zl^{-1}$ и таких же вычислений, как в [1, 2], находим интенсивность дифрагированного света $|E_1|^2 = |(E_1)_+|^2 + |(E_1)_-|^2$,

$$|(E_1)_\pm|^2 = |A_4|^2 \exp\left\{-k^2 w_0^2 \left[\left(\beta_1 \mp \frac{K}{k}\right)^2 + \beta_2^2\right]\right\} \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \frac{kl}{2} \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\beta_1 \mp \frac{K}{k}\right)^2 + \beta_2^2\right] + (\beta_3 - 1)\right\}}{\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\beta_1 \mp \frac{K}{k}\right)^2 + \beta_2^2\right] + (\beta_3 - 1)\right\}^2}. \tag{8}$$

Исследуем поле $|(E_1)_+|^2$ в плоскости xoz, когда $\beta_1 = \sin\theta$, $\beta_3 = \cos\theta$, $\beta_2 = 0$, где θ — угол дифракции. Второй множитель в (8) имеет острый максимум при $\sin\theta = K/k$, причем угловое распределение интенсивности подчиняется гауссовому закону с угловой шириной $(kw_0)^{-1}$. Третий множитель, характеризующий объемные эффекты, имеет широкий максимум и в основном сказывается на абсолютном значении максимума интенсивности при $\sin\theta = K/k$. В плоскости yoz, когда $\beta_2 = \sin\theta$, $\beta_3 = \cos\theta$, $\beta_1 = 0$, положение максимумов интенсивности определяется третьим множителем в (8), но их абсолютные значения много меньше, чем для максимумов в плоскости xoz. Исследование поля $|(E_1)_-|^2$ проводится таким же путем. Может быть также детально исследовано распределение интенсивности в направлениях $\mathbf{R}_0$, не лежащих в плоскостях xoz, yoz.

Литература

[1] С. М. Рытов. Изв. АН СССР, сер. физ., *2*, 222, 1937.
[2] А. А. Глинский. В сб.: Применение ультраакустики к исследованию вещества. 205. Изд. МОПИ, М., 1960.
[3] Г. С. Ландсберг. Оптика, 187. «Наука», М., 1976.
[4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 498. «Наука», М., 1971.

Поступило в Редакцию 6 января 1978 г.

УДК 535.36

ИЗУЧЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ КРЫЛА ЛИНИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОХЛАЖДЕННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. К. Атаходжаев, Ф. Х. Тухватуллин, Ф. С. Ганиев и *И. П. Клейнер*

Благодаря ряду теоретических и экспериментальных работ происхождение тонкой структуры крыла линии рассеяния в значительной степени выяснено. Определены условия, при которых рассеянный свет в жидкостях имеет тонкую структуру в I_{VH}-компоненте крыла (V, H определяют поляризацию падающего и рассеянного света). Вид спектра зависит от величины безразмерного параметра $k^2\eta/\rho\Gamma_0$, в котором η — вязкость, ρ — плотность жидкости, Γ_0 — полуширина I_{HH}-компоненты, k — волновой вектор. Дублетную структуру в крыле следует ожидать только при условии $k^2\eta/\rho\Gamma_0 \ll 1$. Распределение интенсивности в спектре I_{VH}-компоненты должно описываться формулами работы Кейса и Кивельсона [1]

$$I_{VH}(\omega) = \Delta\alpha^2 I_{yz}(\omega) \sin^2\frac{\theta}{2} + \Delta\alpha^2 I_{xz}(\omega) \cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

$$I_{yz}(\omega) = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + \omega^2}, \tag{2}$$

$$I_{xz}(\omega) = \Gamma_0 \frac{(k^4\eta^2/\rho^2)(1-R) + \omega^2}{(\Gamma_0\eta k^2/\rho^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\Gamma_0 + [1-R]\,k^2\eta/\rho)^2}, \tag{3}$$

где $\Delta\alpha$ — разность поляризуемостей молекул вдоль и перпендикулярно оси симметрии; θ — угол рассеяния.