МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_76
EDN: GSUIIC

О ЕДИНИЦАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

ON IDENTITIES AND THEIR GENERALIZATIONS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются единицы и их обобщения в полиадических группоидах специального вида, то есть в полиадических группоидах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n-арной операции η.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *единица*, *подстановка*.

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 76–81. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_76. – EDN: GSUIIC

Abstract. The article focuses on identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form, i. e. in polyadic groupoids with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of n-ary groupoid $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and n-ary operation η.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary groupoids*, *identity*, *substitution*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* On identities and their generalizations in polyadic groupoids of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 3 (52). – P. 76–81. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_76 (in Russian). – EDN: GSUIIC

Введение

В n-арном группоиде единицы определяются теми же равенствами, которыми В. Дёрнте определил [1] единицы в n-арной группе: элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называется его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x.$$

Это определение обобщает на n-арный случай определение единицы группоида A как элемента $e \in$ A такого, что $ex = xe = x$ для любого $x \in A$. При $n > 2$ в n-арном группоиде, как и в бинарном случае ($n = 2$), может быть только одна единица, может быть несколько единиц, все элементы могут быть единицами, единицы могут вообще отсутствовать. Последнее возможно и в полиадических группах арности $n > 2$, в которых, в отличие от бинарных групп, может не быть единиц. Примеры такого рода имеются в книге [2]. Там же введено понятия m-полуединицы n-арной группы, частными случаями которого являются понятия идемпотента и единицы n-арной группы.

Цель данной работы – изучение единиц и их обобщений в полиадических группоидах специального вида.

1 Используемые понятия и результаты

Распространим определение m-полуединицы на произвольные n-арные группоиды.

Назовём [2] элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$, где $n = t(m - 1) + 1$, $t \geq 1$, его *m-полуединицей*, если

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{i-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-i+1}) = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, t + 1$.

Полагая в определении m-полуединицы $n = m$ (в том случае $t = 1$), получим определение n-полуединицы: элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называется его *n-полуединицей*, если

$$\eta(x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x$$

для любого $x \in A$.

Ясно, что 2-*полуединицы n-арного группоида – это в точности его единицы*. Кроме того, *все m-полуединицы n-арного группоида являются* *и его n-полуединицами, которые в свою очередь, являются и его идемпотентами*. При этом идемпотенты n-арного группоида не обязаны быть его n-полуединицами.

Понятно также, что *в классе всех n-арных групп понятия идемпотента и n-полуединицы тождественны*, то есть в классе всех n-арных групп не только единица, но и идемпотент являются частными случаями более общего понятия – m-полуединицы. По этой причине в [2], где первоначально именно для полиадических групп были определены m-полуединицы, они назывались m-идемпотентами.

Термин m-полуединицы мы считаем более предпочтительным, так как он согласован с существующей в настоящее время в теории полиадических групп терминологией. Имеются в виду m-полуабелевы полиадические группы [2], m-полуинвариантные полиадические подгруппы [3], m-полуцентры [3], m-полуцентрализаторы [3], m-полунормализаторы [3] и т. п.

Отметим, что существуют и другие полиадические обобщения бинарной единицы. Одним из таких обобщений является понятие нейтральной последовательности, которое Э. Пост определил в [4] для полиадических групп.

Полиадическим группоидом специального вида мы называем универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией которая определяется [5] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η следующим образом.

Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид,

$$n \geq 2,\ s \geq 1,\ l = s(n-1)+1,\ k \geq 2,\ \sigma \in \mathbf{S}_k.$$

На A^k вначале определяется n-арная операция

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арная операция

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)} \eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \quad (1.1)$$

В [5] доказано, что l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$ можно определить покомпонентно, не используя операцию $\eta_{1,\sigma,k}$: если

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_{\mathrm{k}}),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \quad (1.2)$$

Для ассоциативной n-арной операции η последнее равенство принимает вид

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, \ldots, k.$$

Для бинарной операции η l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$, обозначаемой также символом $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Эта операция первоначально была определена в [6] на декартовой степени полугруппы, а затем на декартовой степени произвольного группоида [7]. Частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \ldots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [4].

В случае тождественности подстановки σ^{l-1} справедливы следующие утверждения:

1) *если n-арная операция* η – *ассоциативна, то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *также ассоциативна* [5];

2) *если* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *l-арная группа* [8].

Информацию, касающуюся полиадических группоидов, можно найти в [9]–[16].

2 Свойства *m*-полуединиц. Примеры

Легко проверяется, что для любой единицы e n-арного группоида $< A, \eta >$ и тождественной подстановки σ элемент $\mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k})$ является единицей в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Как будет установлено ниже, в общем случае наличие единицы в $< A, \eta >$ не гарантирует наличие единицы в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Следующее предложение показывает, что для полиадических групп число равенств в определении m-полуединицы можно уменьшить.

Предложение 2.1. *Элемент e n-арной группы* $< A, \eta >$ *является её m-полуединицей, если*

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{t-i+1}) = \eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{t-i}) = x$$

для любого $x \in A$ *и некоторого* $i = 1, \ldots, t$.

Доказательство. Перепишем равенство из формулировки предложения

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{e \ldots e}_{m-1} \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{t-i}) = \eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i-1} \underbrace{e \ldots e}_{m-1} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{t-i}).$$

Это означает, что последовательности

$$x\underbrace{e \ldots e}_{m-1},\ \underbrace{e \ldots e}_{m-1}x$$

эквивалентны в смысле Э. Поста в l-арной группе $< A, \eta >$. Используя этот факт, получим

$$\eta(x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t}) =$$
$$= \eta(\underbrace{e\ldots e}_{m-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\underbrace{e\ldots e}_{m-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-2}) =$$
$$\ldots$$
$$= \eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}x\underbrace{e\ldots e}_{m-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t}x) = x.$$

Следовательно, справедливы все равенства из определения m-полуединицы. Предложение доказано.

Полагая в предложении 2.1 $i = 1$ или $i = t$, получим

***Следствие* 2.1.** *Элемент e n-арной группы $< A, \eta >$ является её m-полуединицей, если*

$$\eta(x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t}) =$$
$$= \eta(\underbrace{e\ldots e}_{m-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}) = x$$

или

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) =$$
$$\eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t}x) = x$$

для любого $x \in A$.

Если e – идемпотент n-арной группы $< A, \eta >$, то

$$\eta(x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x$$

для любого $x \in A$. Поэтому из следствия 2.1 вытекает

***Следствие* 2.2.** *Идемпотент e n-арной группы $< A, \eta >$ является её m-полуединицей, если*

$$\eta(\underbrace{e\ldots e}_{m-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}) = x$$

или

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{t-1}x\underbrace{e\ldots e}_{m-1}) = x$$

для любого $x \in A$.

Полагая в следствиях 2.1 и 2.2 $m = 2$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 2.3.** *Элемент e n-арной группы $< A, \eta >$ является её единицей, если*

$$\eta(x\underbrace{e\ldots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}) = x$$

или
$$\eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x$$

для любого $x \in A$.

***Следствие* 2.4.** *Идемпотент e n-арной группы $< A, \eta >$ является её единицей, если*

$$\eta(ex\underbrace{e\ldots e}_{n-2}) = x \text{ или } \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-2}xe) = x$$

для любого $x \in A$.

Приведём пример идемпотентной полиадической группы специального вида, в которой нет единиц, но все её элементы являются m-полуединицами ($m = 3$, $s = 2$, $l = 5$).

***Пример* 2.1.** Пусть $A = \{e, a\}$ – группа второго порядка с единицей e, $< A, \eta >$ – тернарная группа с тернарной операцией η, производной от групповой операции в A:

$$\eta(xyz) = xyz.$$

Так как цикл $\sigma = (12)$ удовлетворяет условию $(12)^5 = (12)$, то согласно утверждению 2) из раздела 1, $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ – 5-арная группа четвёртого порядка, где

$$A^2 = \{(e, e), (e, a), (a, e), (a, a)\}.$$

А так как

$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, e)(e, e)(e, e)(e, e)(e, e)) =$$
$$= (\eta(eeeee), \eta(eeeee)) = (e, e),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, a)(a, a)(a, a)(a, a)(a, a)) =$$
$$= (\eta(aaaaa), \eta(aaaaa)) = (a, a),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, a)(e, a)(e, a)(e, a)(e, a)) =$$
$$= (\eta(eaeae), \eta(aeaea)) = (e, a),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, e)(a, e)(a, e)(a, e)(a, e)) =$$
$$= (\eta(aeaea), \eta(eaeae)) = (a, e),$$

то в 5-арной группе $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ все элементы являются идемпотентами, то есть $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ – идемпотентная 5-арная группа.

Так как

$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, e)(e, a)(e, e)(e, e)(e, e)) =$$
$$= (\eta(eaeee), \eta(eeeee)) = (a, e) \neq (e, a),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, a)(e, a)(a, a)(a, a)(a, a)) =$$
$$= (\eta(aaaaa), \eta(aeaaa)) = (a, e) \neq (e, a),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, a)(e, e)(e, a)(e, a)(e, a)) =$$
$$= (\eta(eeeae), \eta(aeaea)) = (a, a) \neq (e, e),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, e)(a, a)(a, e)(a, e)(a, e)) =$$
$$= (\eta(aaaea), \eta(eaeae)) = (e, e) \neq (a, a),$$

то в 5-арной группе $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ нет единиц.

А так как $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ – идемпотентная 5-арная группа и, кроме того,

$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, e)(e, e)(x, y)(e, e)(e, e)) =$$
$$= (\eta(eexee), \eta(eeyee)) = (x, y),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, a)(a, a)(x, y)(a, a)(a, a)) =$$
$$= (\eta(aaxaa), \eta(aayaa)) = (x, y),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((e, a)(e, a)(x, y)(e, a)(e, a)) =$$
$$= (\eta(eaxae), \eta(aeyea)) = (x, y),$$
$$\eta_{2,\,(12),\,2}((a, e)(a, e)(x, y)(a, e)(a, e)) =$$
$$= (\eta(aexea), \eta(eayae) = (x, y)$$

для любых $x, y \in A$, то по следствию 2.2 в 5-арной группе $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ все элементы являются 3-полуединицами.

Таким образом, $< A^2, \eta_{2,\,(12),\,2} >$ – *идемпотентная* 5-*арная группа*, *в которой нет единиц*, *но все её элементы являются* 3-*полуединицами*.

Приведём пример идемпотентной полиадической группы специального вида, в которой нет m-полуединиц, а значит и единиц ($m = 3$, $s = 3$, $l = 7$).

***Пример* 2.2.** Пусть $< A, \eta >$ – тернарная группа из примера 2.1, $\sigma = (123) \in \mathbf{S}_3$.

Так как цикл $\sigma = (123)$ удовлетворяет условию $(123)^7 = (123)$, то согласно утверждению 2) из раздела 1, $< A^3, \eta_{3,\,(123),\,3} >$ – 7-арная группа восьмого порядка, где

$$A^3 = \{(e, e, e), (e, e, a), (e, a, e), (a, e, e),\\ (e, a, a), (a, e, a), (a, a, e), (a, a, a)\}.$$

А так как

$$\eta_{3,\,(123),\,3}(\underbrace{(x, y, z) \ldots (x, y, z)}_{7}) =$$

$$= (\eta(xyzxyzx), \eta(yzxyzxy), \eta(zxyzxyz)) =\\ = ((x^3y^2z^2), (y^3z^2x^2), (z^3x^2y^2)) = (x, y, z)$$

для любых $x, y, z \in A$, то в $< A^3, \eta_{3,\,(123),\,3} >$ все элементы являются идемпотентами, а значит и 7-полуединицами.

Так как

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((e, e, e)(e, e, e)(e, e, a)\\ \underbrace{(e, e, e) \ldots (e, e, e)}_{4}) = (a, e, e) \neq (e, e, a),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((e, e, a)(e, e, a)(e, e, e)\\ \underbrace{(e, e, a) \ldots (e, e, a)}_{4}) = (a, e, a) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((e, a, e)(e, a, e)(e, e, e)\\ \underbrace{(e, a, e) \ldots (e, a, e)}_{4}) = (e, a, a) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((a, e, e)(a, e, e)(e, e, e)\\ \underbrace{(a, e, e) \ldots (a, e, e)}_{4}) = (a, a, e) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((e, a, a)(e, a, a)(e, e, e)\\ \underbrace{(e, a, a) \ldots (e, a, a)}_{4}) = (a, a, e) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((a, e, a)(a, e, a)(e, e, e)\\ \underbrace{(a, e, a) \ldots (a, e, a)}_{4}) = (e, a, a) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((a, a, e)(a, a, e)(e, e, e)\\ \underbrace{(a, a, e) \ldots (a, a, e)}_{4}) = (a, e, a) \neq (e, e, e),$$

$$\eta_{3,\,(123),\,3}((a, a, a)(a, a, a)(e, e, a)\\ \underbrace{(a, a, a) \ldots (a, a, a)}_{4}) = (a, e, e) \neq (e, e, a),$$

то в $< A^3, \eta_{3,\,(123),\,3} >$ нет 3-полуединиц, а значит и единиц.

Таким образом, $< A^3, \eta_{3,\,(123),\,3} >$ – идемпотентная 7-арная группа, в которой нет единиц и 3-полуединиц.

***Предложение* 2.2.** *Пусть*

$$l = s(n-1) + 1,\ s \geq 1,$$
$$n = t(m-1) + 1,\ t \geq 1.$$

Тогда любая m-*полуединица* l-*арного группоида* $< A, \eta >$ *является его* n-*полуединицей*.

Доказательство. Так как $l = st(m-1) + 1$, то для любой m-полуединицы e l-арного группоида $< A, \eta >$, любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, s + 1$ имеем

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{t(i-1)} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{st-t(i-1)}) = x.$$

А так как

$$t(i-1)(m-1) = (n-1)(i-1),$$
$$(st - t(i-1))(m-1) = (n-1)(s-i+1),$$

то последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{n-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{n-1}}_{i-1} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{n-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{n-1}}_{s-i+1}) = x.$$

Согласно определению, e – n-полуединица l-арного группоида $< A, \eta >$. □

3 Случай тождественной подстановки

***Теорема* 3.1.** *Если*

$$l = s(n-1) + 1,\ s \geq 1,$$
$$n = t(m-1) + 1,\ t \geq 1,$$

то любая m-*полуединица* n-*арного группоида* $< A, \eta >$ *является* m-*полуединицей* l-*арного группоида* $< A, \mu >$ *с* l-*арной операцией*

$$\mu(x_1 \ldots x_l) = \eta(x_1 \ldots x_{n-1}\eta(x_n \ldots x_{2(n-1)}\eta(\ldots\\ \ldots \eta(x_{(s-2)(n-1)+1} \ldots x_{(s-1)(n-1)}\\ \eta(x_{(s-1)(n-1)+1} \ldots x_{s(n-1)+1})) \ldots))). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть e – m-полуединица в $< A, \eta >$, x произвольный элемент из A. Положим

$$u = \mu(\underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{\underbrace{e \ldots e}_{m-1} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{m-1}}_{st-i+1}), \tag{3.2}$$

где $i = 1, \ldots, st + 1$, и представим число $(i-1)(m-1)$ в виде

$$(i-1)(m-1) = p(n-1) + q \tag{3.3}$$

для некоторых

$$p = 0, 1, \ldots, s,\ q = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Тогда

$$(st - i + 1)(m-1) =\\ = st(m-1) - (i-1)(m-1) =\\ = s(n-1) - p(n-1) - q =\\ = (s-p)(n-1) - q.$$

Соответственно (3.2) принимает вид

$$u = \underbrace{\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}\eta(\ldots\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}}_{p}\eta(\underbrace{e \ldots e}_{q} x \underbrace{e \ldots e}_{n-q-2})$$

$$\underbrace{\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}\eta(\ldots\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}}_{s-p-2}\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n})\ldots)))) \ldots)). \tag{3.4}$$

Применив к правой части равенства (3.4) $s - p - 1$ раз равенство $\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n}) = e$, получим

$$u = \underbrace{\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}\eta(\ldots\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}}_{p}\eta(\underbrace{e \ldots e}_{q} x \underbrace{e \ldots e}_{n-q-1})) \ldots)). \tag{3.5}$$

Так как $m-1$ делит $n-1$, то из (3.3) следует, что q кратно $m-1$, откуда, и в силу того, что e – m-полуединица в $< A, \eta >$, получаем

$$\eta(\underbrace{e\ldots e}_{q}\,x\,\underbrace{e\ldots e}_{n-q-1}) = x.$$

Поэтому (3.5) принимает вид

$$u = \eta(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{n-1}\eta(\ldots\eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}}_{p-1}\eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x))\ldots)).$$

Применив к правой части полученного равенства p раз равенство $\eta(\underbrace{e\ldots e}_{n-1}x) = x$, получим

$u = x$, то есть

$$\mu(\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{i-1}x\underbrace{\underbrace{e\ldots e}_{m-1}\ldots\underbrace{e\ldots e}_{m-1}}_{st-i+1}) = x.$$

Следовательно, e – m-полуединица в $< A, \mu >$. □

Теорема 3.1 и предложение 2.2 позволяют сформулировать

***Следствие* 3.1.** *Если l, n и μ – те же, что и в теореме* 3.1, *то любая m-полуединица n-арного группоида $< A, \eta >$ является n-полуединицей l-арного группоида $< A, \mu >$.*

Полагая в теореме 3.1 $m = 2$, получим

***Следствие* 3.2.** *Если $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, $n \geq 2$, то любая единица n-арного группоида $< A, \eta >$ является единицей l-арного группоида $< A, \mu >$ с l-арной операцией* (3.1).

Полагая в теореме 3.1 $m = n$, получим

***Следствие* 3.3.** *Если $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, $n \geq 2$, то любая n-полуединица n-арного группоида $< A, \eta >$ является n-полуединицей l-арного группоида $< A, \mu >$ с l-арной операцией* (3.1).

***Теорема* 3.2.** *Для любых m-полуединиц $e_1, \ldots, e_k$ n-арного группоида $< A, \eta >$ и тождественной подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \ldots, e_k)$ является m-полуединицей l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.*

Доказательство. Согласно определению l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$,

$$l = s(n-1)+1,\ s \geq 1$$

для некоторого $s \geq 1$. Кроме того, так как $< A, \eta >$ обладает m-полуединицами, то

$$n = t(m-1)+1$$

для некоторого $t \geq 1$.

Сравнивая выражения (1.1) и (3.1), видим, что в (1.1) n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ играет ту же роль, что и n-арная операция η в (3.1). Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1, согласно которой любая m-полуединица n-арного группоида $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ является m-полуединицей l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Осталось доказать, что элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \ldots, e_k)$ является m-полуединицей в $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$. Для этого для любого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ положим

$$\eta_{1,\sigma,k}(\underbrace{\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}\ldots\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}}_{i-1}\mathbf{x}\underbrace{\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}\ldots\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}}_{t-i+1}) =$$

$$= (y_1, \ldots, y_k). \qquad (3.6)$$

Тогда для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ согласно (1.2), с учётом тождественности подстановки σ, j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(\underbrace{\underbrace{e_j\ldots e_j}_{m-1}\ldots\underbrace{e_j\ldots e_j}_{m-1}}_{i-1}x_j\underbrace{\underbrace{e_j\ldots e_j}_{m-1}\ldots\underbrace{e_j\ldots e_j}_{m-1}}_{t-i+1}).$$

А так как e_j – m-полуединица в $< A, \eta >$, то $y_j = x_j$, откуда и из (3.6) следует

$$\eta_{1,\sigma,k}(\underbrace{\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}\ldots\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}}_{i-1}\mathbf{x}\underbrace{\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}\ldots\underbrace{\varepsilon\ldots\varepsilon}_{m-1}}_{t-i+1}) = \mathbf{x}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – m-полуединица в $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$.□

Полагая в теореме 3.2 $m = 2$, получим

***Следствие* 3.4.** *Для любых единиц $e_1, \ldots, e_k$ n-арного группоида $< A, \eta >$ и тождественной подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \ldots, e_k)$ является единицей l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.*

Полагая в теореме 3.1 $m = n$, получим

***Следствие* 3.5.** *Для любых n-полуединиц $e_1, \ldots, e_k$ n-арного группоида $< A, \eta >$ и тождественной подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ элемент $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \ldots, e_k)$ является n-полуединицей l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.*

Из теоремы 3.1 (следствия 3.4, следствия 3.5) вытекает

***Следствие* 3.6.** *Если r – число всех m-полуединиц (единиц, n-полуединиц) n-арного группоида $< A, \eta >$, σ – тождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$, то в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ имеется не менее r^k m-полуединиц (единиц, n-полуединиц).*

***Замечание* 3.1.** Введём обозначения: $\mathbf{E}(A, \eta, m)$ – множество всех m-полуединиц n-арного группоида $< A, \eta >$, $\mathbf{E}^k(A, \eta, m)$ – k-ая декартова степень этого множества. Теперь утверждение теоремы 3.2 можно записать в виде включения

$$\mathbf{E}^k(A, \eta, m) \subseteq \mathbf{E}(A^k, \eta_{1,\sigma,k}, m).$$

Покажем, что указанное включение может быть строгим.

***Пример* 3.1.** Обозначим символом η операцию в группе $A = \{e, a\}$ из примера 2.1 и рассмотрим тернарную группу $< A^2, \eta_{1,\sigma,2} >$, где σ – тождественная подстановка. Так как

$$\eta_{1,\sigma,2}((a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)) = (a_1b_1c_1, a_2b_2c_2),$$

то

$$\eta_{1,\sigma,2}((x, y)(u, v)(u, v)) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,2}((u, v)(x, y)(u, v)) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,2}((u, v)(u, v)(x, y)) = (x, y)$$

для любых $x, y, u, v \in A$. Следовательно, в $< A^2, \eta_{1,\sigma,2} >$ все элементы являются единицами, то есть

$$\mathbf{E}(A^2, \eta_{1,\sigma,2}, 2) = \{(e, e), (e, a), (a, e), (a, a)\},$$

при этом $\mathbf{E}^2(A, \eta, 2) = \{(e, e)\}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}^2(A, \eta, 2) \subset \mathbf{E}(A^2, \eta_{1,\sigma,2}, 2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dörnte*, *W*. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

2. *Гальмак*, *А.М*. *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

3. *Гальмак*, *А.М*. *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. *Гальмак*, *А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.

6. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

7. *Гальмак*, *А.М.* Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

8. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

9. *Сушкевич*, *А.К.* Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – Харьков; Киев, 1937. – 176 с.

10. *Bruck*, *R.H.* A survey of binary systems / R.H. Bruck. – Berlin; Heldelberg; New York: Springer-Verlad, 1966. – 185 p.

11. *Белоусов*, *В.Д*. *n*-Арные квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.

12. *Русаков*, *С.А*. Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

13. *Курош*, *А.Г*. Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – Москва: Наука, 1974. – 160 с.

14. *Ušan*, *J*. *n*-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // Mathematika Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

15. *Кулаженко*, *Ю.И*. Полиадические операции и их приложения / Ю.И. Кулаженко. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2014. – 311 с.

16. *Щучкин*, *Н.А*. Введение в теорию *n*-групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.

Поступила в редакцию 09.08.2022.

Информация об авторах
Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор