

ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРЕ

Н. Г. Кокодий

Рассматривается задача о возникновении пондеромоторных сил в преломляющей сфере. Получены соотношения для поверхностных и объемных сил с использованием выражения для тензора натяжений поля в сферических координатах. Обычное равенство $\mathbf{f} = \text{div} \mathbf{T}$ не имеет силы в сферических координатах, несмотря на то что оно записано в терминах векторного анализа, инвариантных относительно системы координат. Исследовано распределение сил в малой абсолютно отражающей и преломляющей сфере при падении на нее плоской волны. Характер распределения поверхностных сил мало зависит от величины показателя преломления. На поверхности существуют как сжимающие, так и растягивающие сферу усилия. Величина поверхностных сил достаточна для использования давления излучения в технических целях. Объемные силы в малой сфере равны нулю.

Пондеромоторное (механическое) действие электромагнитного, в частности, оптического излучения может быть достаточно сильным для использования его в практических целях. Пондеромоторные эффекты излучения необходимо учитывать при решении проблемы лазерного термоядерного синтеза [1]. В работе [2] описаны эксперименты по перемещению и удержанию во взвешенном состоянии (оптическая левитация) макрочастиц при помощи давления излучения. Там же указана возможность использования давления излучения для разделения газов и изотопов.

Вместе с тем в проблеме пондеромоторного действия излучения на вещество еще много неисследованного. Например, в классической работе Дебая [3] и [4, 5] подробно исследовано давление излучения на сферу из материала с произвольными оптическими постоянными. Но совершенно открытым остается вопрос о распределении сил в самой сфере. А именно это важно знать при решении задач о взаимодействии мощного лазерного излучения с плазмой, оптической левитации и других.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о поверхностных и объемных силах, возникающих в сфере при падении на нее электромагнитного излучения. Эти силы выражаются через тензор натяжений Максвелла и тензоры электро- и магнитострикции. Известны выражения для сил в декартовых координатах [6]. В сферических координатах, которые удобно применить в задаче о сфере, связь объемных сил с тензорами Максвелла, электро- и магнитострикции, как будет показано ниже, несколько иная. Для упрощения изложения вначале рассмотрим случай статических полей и только в конце введем добавочные члены, учитывающие временные изменения.

Объемную плотность пондеромоторных сил в веществе в векторной форме удобно записать в виде суммы двух слагаемых [6]

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}''$$

где

$$\mathbf{f}' = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] - \frac{E^2}{8\pi} \text{grad} \varepsilon - \frac{H^2}{8\pi} \text{grad} \mu + \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (1)$$

$$\mathbf{f}'' = \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau \right). \quad (2)$$

Здесь f' — максвелловы силы, f'' — стрикционные силы, ρ — объемная плотность заряда, \mathbf{j} — объемная плотность тока, \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{B} — магнитная индукция, ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, τ — плотность среды.

Выразим в (1) с помощью уравнений Максвелла ρ через $\operatorname{div} \mathbf{D}$, а \mathbf{j} через $\operatorname{rot} \mathbf{H}$. Распишем векторное уравнение в сферических координатах, учитывая, что в статическом случае $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ и $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$. После преобразований, аналогичных проделанным в [6], получим

$$f'_r = \operatorname{div} \mathbf{T}'_r + \frac{1}{4\pi r} (\epsilon E_r^2 + \mu H_r^2), \quad (3)$$

$$f'_\theta = \operatorname{div} \mathbf{T}'_\theta + \frac{1}{4\pi r} (\epsilon E_\theta E_r + \mu H_\theta H_r) + \frac{1}{8\pi r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} [\epsilon (E_r^2 + E_\theta^2 - E_\varphi^2) + \mu (H_r^2 + H_\theta^2 - H_\varphi^2)], \quad (4)$$

$$f'_\varphi = \operatorname{div} \mathbf{T}'_\varphi + \frac{1}{4\pi r} (\epsilon E_\varphi E_r + \mu H_\varphi H_r) + \frac{1}{4\pi r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\epsilon E_\varphi E_\theta + \mu H_\varphi H_\theta), \quad (5)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{T}'_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T'_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T'_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T'_{r\varphi}}{\partial \varphi}.$$

Выражения $\operatorname{div} \mathbf{T}'_\theta$ и $\operatorname{div} \mathbf{T}'_\varphi$ определяются аналогично.

Компоненты тензора натяжений Максвелла T'_{ik} введены по аналогии с компонентами в декартовых координатах

$$T'_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i D_k + H_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) \right]. \quad (6)$$

Здесь индексы i, k пробегает значения r, θ, φ .

Тензор натяжений, как обычно, описывает поверхностные силы. Например, компонента $T'_{r\theta}$ представляет r -компоненту максвелловой силы, приходящейся на единицу поверхности площадки, внешняя нормаль к которой направлена по оси θ .

Выражения для объемной плотности стрикционных сил в сферических координатах непосредственно следуют из (2)

$$\left. \begin{aligned} f''_r &= \frac{\partial T''_{rr}}{\partial r}, \\ f''_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial T''_{\theta\theta}}{\partial \theta}, \\ f''_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T''_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$T''_{rr} = T''_{\theta\theta} = T''_{\varphi\varphi} = \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau + \frac{1}{8\pi} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \tau. \quad (8)$$

Остальные компоненты стрикционного тензора равны нулю.

Таким образом, вид тензора натяжений Максвелла и стрикционного тензора в сферических координатах аналогичен виду этих тензоров в декартовых координатах. Но обычное выражение $\mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{T}$, связывающее объемную плотность сил с тензором поверхностных натяжений в сферических координатах, не справедливо. Это несколько неожиданно, поскольку оператор div инвариантен относительно системы координат, и следовало бы ожидать сохранения вида выражения в любой ортогональной криволинейной системе координат.

Неправомерность этого выражения в рассматриваемом случае указывает на то, что при сведении объемных сил к поверхностным натяжениям и обратно в расчете пондеромоторных сил нужно проявлять известную осторожность.

В случае переменных во времени полей ponderomotorная сила равна

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}'' + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}, \quad (9)$$

где $\mathbf{g} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]/4\pi c$ — плотность импульса электромагнитного поля.

Для многих сред (газов, жидкостей, некоторых твердых тел) справедлива формула Лоренца—Лорентца

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{C\tau}{3}, \quad C = \text{const.}$$

Для диа- и парамагнетиков, где $\mu \approx 1$, справедливо соотношение

$$\frac{\mu - 1}{4\pi\mu} = C\tau, \quad C = \text{const.}$$

Используя эти выражения, соотношение (7) можно переписать так

$$T''_{rr} = T''_{\theta\theta} = T''_{\varphi\varphi} = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{24\pi} E^2 + \frac{\mu(\mu - 1)}{8\pi} H^2. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь важный для многих практических целей случай падения на сферу плоской электромагнитной волны. Дифракция волны на сфере хорошо изучена в работах [3, 7]. Результатами последней мы воспользуемся.

Систему координат выберем следующим образом. Волна распространяется в отрицательном направлении оси z . Вектор электрического поля направлен вдоль оси x . Центр сферы совпадает с началом координат.

Составляющие полей падающей волны в сферических координатах запишутся так

$$\left. \begin{aligned} E_r^0 &= E_0 e^{ikr \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi, \\ E_\theta^0 &= E_0 e^{ikr \cos \theta} \cos \theta \cos \varphi, \\ E_\varphi^0 &= -E_0 e^{ikr \cos \theta} \sin \varphi, \\ H_r^0 &= -E_0 e^{ikr \cos \theta} \sin \theta \sin \varphi, \\ H_\theta^0 &= -E_0 e^{ikr \cos \theta} \cos \theta \sin \varphi, \\ H_\varphi^0 &= -E_0 e^{ikr \cos \theta} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $k = \omega/c$ — волновой вектор в свободном пространстве, ω — частота. Считаем, что $\mu = 1$.

Компоненты рассеянного поля приведены в работе [7]. Поле внутри сферы также легко вычисляется по имеющимся там данным. Однако расчет ponderomotorных сил в сфере в общем случае требует применения ЭВМ, так как выражения для полей имеют довольно сложный вид разложения в ряды по сферическим функциям Бесселя и Ханкеля и полиномам Лежандра. Мы не приводим их здесь. Но они значительно упрощаются, если радиус сферы a намного меньше длины волны излучения λ . В этом случае выражения для сил можно получить в аналитическом виде. Из этих выражений вытекают некоторые важные закономерности, и поэтому имеет смысл их получить и проанализировать.

Рассмотрим отдельно два случая абсолютно отражающей и преломляющей сферы.

Абсолютно отражающая сфера

Поскольку нам необходимо вычислить компоненты тензора натяжений вблизи поверхности сферы, нужно выписать выражения для дифрагированного поля в ближней зоне. Для малой сферы ($a \ll \lambda$) в рядах можно ограничиться только первым членом, и компоненты дифрагированного поля запишутся так:

$$\left. \begin{aligned}
 E_r^a &= 2E_0 \alpha \sin \theta \cos \varphi, \\
 E_\theta^a &= -E_0 \alpha \left(\cos \theta + \frac{i}{2} kr \right) \cos \varphi, \\
 E_\varphi^a &= E_0 \alpha \left(1 - \frac{i}{2} kr \cos \theta \right) \sin \varphi, \\
 H_r^a &= E_0 \alpha \sin \theta \sin \varphi, \\
 H_\theta^a &= -E_0 \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \theta + ikr \right) \sin \varphi, \\
 H_\varphi^a &= -E_0 \alpha \left(\frac{1}{2} + ikr \cos \theta \right) \cos \varphi,
 \end{aligned} \right\} (12)$$

где $\alpha = (a/r)^3$.

Получившиеся выражения в сумме с компонентами поля падающей волны (11) необходимо подставить в формулу (6). Усредненные во времени компоненты поверхностных сил (при $r = a$) равны

$$\left. \begin{aligned}
 f_{r \text{ пов.}} &= T'_{rr} |_{r=a} = \frac{S}{c} [(4 - 3 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta - 1], \\
 f_{\theta \text{ пов.}} &= T'_{\theta r} |_{r=a} = 0, \\
 f_{\varphi \text{ пов.}} &= T'_{\varphi r} |_{r=a} = 0.
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Здесь $S = cE_0^2/8\pi$ — усредненный по времени вектор Умова—Пойнтинга падающей волны.

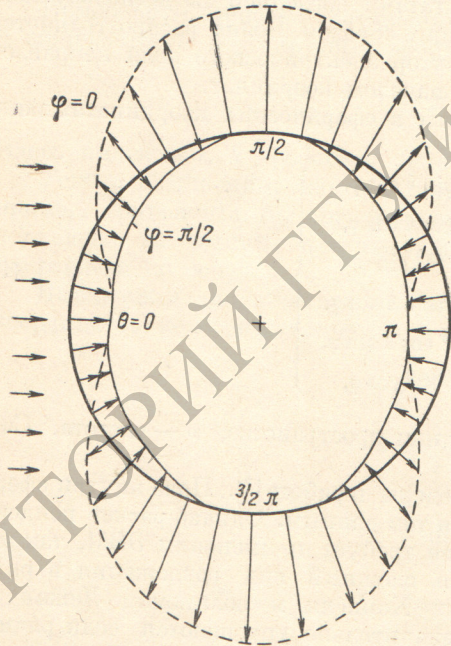


Рис. 1. Поверхностные силы в малой абсолютно отражающей сфере.

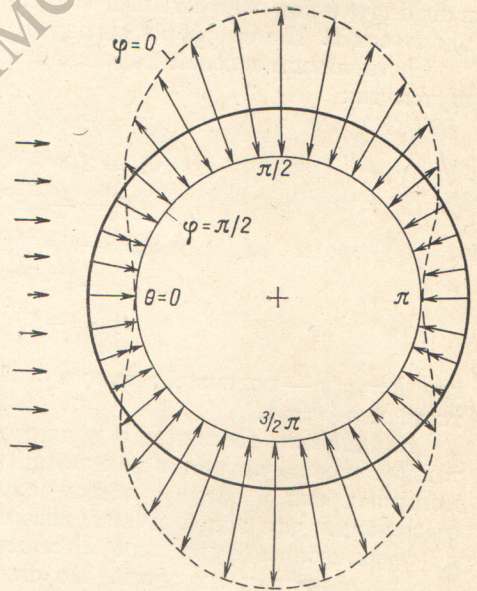


Рис. 2. Поверхностные силы в малой преломляющей сфере.

Стрикционные силы в этом случае равны нулю. Видно, что существует только нормальная составляющая силы. Распределение ее по поверхности сферы показано на рис. 1. Сплошная кривая соответствует $\varphi = \pi/2$, штриховая — $\varphi = 0$. Характерным для малой сферы является симметричность картины. Вследствие этого равнодействующая давления излучения на такую сферу равна нулю. Это согласуется с данными работы [3], где показано, что давление излучения на такую сферу пропорционально ρ^4 ($\rho = 2\pi a/\lambda$), в то время как мы вели расчеты с точностью до первой степени ρ .

При $\varphi = \pi/2$ излучение сжимает сферу, причем величина силы имеет максимумы при $\theta = 0$ и π и уменьшается до нуля при $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$. При

$\varphi=0$ в окрестности $\theta=0$ и π сфера испытывает сжатие, в окрестности $\theta=\pi/2$ и $3\pi/2$ — растяжение. По величине силы сжатия в максимуме достигают $1.125 S/c$, т. е. близки по величине к давлению излучения на поглощающее тело. Силы растяжения в максимуме примерно в 3 раза больше. Таким образом, несмотря на очень малую равнодействующую, сами поверхностные силы имеют довольно большую величину (в масштабах сил давления излучения).

Объемные силы внутри абсолютно отражающей сферы отсутствуют, поскольку поле внутри нее не проникает.

Преломляющая сфера

В этом случае компоненты дифрагированного поля будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} E_r^\alpha &= 2E_0\alpha\beta \sin\theta \cos\varphi, \\ E_\theta^\alpha &= -E_0\alpha\beta \cos\theta \cos\varphi, \\ E_\varphi^\alpha &= E_0\alpha\beta \sin\varphi, \\ H_r^\alpha &= 0, \\ H_\theta^\alpha &= -iE_0\beta\rho \sin\varphi, \\ H_\varphi^\alpha &= -iE_0\beta\rho \cos\theta \cos\varphi, \end{aligned} \right\} (14)$$

где $\beta = (n^2 - 1)/(n^2 + 2)$, n — показатель преломления.

Выпишем и компоненты поля внутри сферы

$$\left. \begin{aligned} E_r^i &= E_0\gamma \sin\theta \cos\varphi, \\ E_\theta^i &= E_0\left(\gamma \cos\theta + \frac{i}{2}kr\right) \cos\varphi, \\ E_\varphi^i &= -E_0\left(\gamma + \frac{i}{2}kr \cos\theta\right) \sin\varphi, \\ H_r^i &= -E_0 \sin\theta \sin\varphi, \\ H_\theta^i &= -E_0\left(\cos\theta + \frac{i}{2}n^2\gamma kr\right) \sin\varphi, \\ H_\varphi^i &= -E_0\left(1 + \frac{i}{2}n^2\gamma kr \cos\theta\right) \cos\varphi, \end{aligned} \right\} (15)$$

где $\gamma = 3/(n^2 + 2)$.

При вычислении компонент тензоров Максвелла и электрострикции будем считать, что n — действительная величина. Это означает, что поглощение в сфере отсутствует. Последнее связано с тем, что выражения для тензоров Максвелла и электрострикции справедливы только для сред без поглощения. Для сред с поглощением выражения этих тензоров в общем случае не определены.

Поверхностные силы в преломляющей сфере связаны с компонентами тензоров Максвелла и электрострикции следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_{r \text{ пов.}} &= T_{rr}^a|_{r=a} - T_{rr}^i|_{r=a}, \\ f_{\theta \text{ пов.}} &= T_{\theta r}^a|_{r=a} - T_{\theta r}^i|_{r=a}, \\ f_{\varphi \text{ пов.}} &= T_{\varphi r}^a|_{r=a} - T_{\varphi r}^i|_{r=a}, \end{aligned} \right\} (16)$$

где индексы a и i относятся к окружающей среде и сфере соответственно.

Вычислив необходимые компоненты тензоров Максвелла и электрострикции для внешней среды и сферы и подставив их значения в (16), получим

$$f_{r \text{ пов.}}' = \frac{S}{c} \frac{9}{2} \beta^2 \left(\sin^2\theta \cos^2\varphi + \frac{1}{n^2 - 1} \right), \quad (17)$$

$$f_{r \text{ пов.}}'' = -\frac{S}{c} \frac{3}{2} \beta, \quad (18)$$

$$f_{\theta \text{ пов.}} = f_{\varphi \text{ пов.}} = 0. \quad (19)$$

Как и в случае абсолютно отражающей сферы, существует только нормальная составляющая силы. Но в этом случае она состоит из двух частей — максвелловой силы $f_{r \text{ пов.}}'$ и силы электрострикции $f_{r \text{ пов.}}''$.

Последняя равномерно сжимает сферу, если $n > 1$, и равномерно растягивает ее, если $n < 1$. Равнодействующая силы электрострикции, как и следовало ожидать, равна нулю. Величина максвелловой силы меняется по величине, но остается неизменной по направлению. Она положительна, если $n > 1$, и отрицательна, если $n < 1$, т. е. всегда противоположна по направлению силе электрострикции. Вид распределения суммы этих сил по поверхности сферы мало отличается от случая абсолютно отражающей сферы. Он показан на рис. 2. При $\varphi = \pi/2$ силы сжимают сферу, но без минимума при $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$. При $\varphi = 0$ распределение сил качественно такое же, как и в абсолютно отражающей сфере.

Интересно, что вид распределения сил одинаков как для $n > 1$, так и для $n < 1$, хотя каждая из сил $f'_{r \text{ пов.}}$ и $f''_{r \text{ пов.}}$ в отдельности изменяет направление на противоположное.

Максимум величины силы сжатия находится при $\theta = 0$ и π и равен

$$f_{\text{ск.}} = -\frac{S}{c} \frac{3}{2} \beta^2.$$

Величина его зависит от показателя преломления. При $n = 1.5$ (стекло, жидкости) $f_{\text{ск.}} = -0.129 S/c$. При $n = 0.67$ (плазма) $f_{\text{ск.}} = -0.078 S/c$. Максимум силы растяжения — при $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$. По величине он в два раза больше максимума силы сжатия.

Величина поверхностных сил меньше, чем в абсолютно отражающей сфере. Предел при $n \rightarrow \infty$ не совпадает со значением сил для предыдущего случая, так как расчет справедлив только для небольших показателей преломления.

Для определения объемных сил необходимо вычислить все компоненты тензоров Максвелла и электрострикции, а затем воспользоваться формулами (3)—(5), (7) и (9). Сразу заметим, что при усреднении по времени третий член в правой части выражения (9) дает нуль, если поля изменяются во времени по гармоническому закону. Пренебрегая необходимыми громоздкими преобразованиями, получим

$$f_{r \text{ об.}} = f_{\theta \text{ об.}} = f_{\varphi \text{ об.}} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, объемные силы в малой преломляющей сфере отсутствуют.

З а к л ю ч е н и е

Мы провели анализ поверхностных и объемных ponderomotorных сил, возникающих в малой абсолютно отражающей и преломляющей сфере. Картина распределения сил на поверхности мало зависит от величины показателя преломления сферы. Вдоль направления распространения излучения сфера сжимается. В перпендикулярной диаметральной плоскости ($\theta = \pi/2$) направление сил меняется от сжимающих при $\varphi = \pi/2$ до растягивающих при $\varphi = 0$. Величина сил растет с увеличением показателя преломления. Равнодействующая сила с точностью до первой степени β равна нулю. В преломляющей сфере существуют два вида сил, противоположно направленных на поверхности — максвелловы силы и силы электрострикции. Первые вызваны изменением импульса фотона на границе раздела сред, вторые — взаимодействием атомов и молекул среды с излучением. Объемные силы в малой сфере равны нулю. По-видимому, следует ожидать, что в больших сферах они будут иметь конечное значение.

Литература

- [1] Р. К и д д е р. В сб.: Проблемы лазерного термоядерного синтеза, 135. Атомиздат, М., 1976.
- [2] А. Э ш к и н. Усп. физ. наук, 110, 101, 1973.
- [3] Р. Д е б у е. Ann. Phys., 30, 57, 1909.
- [4] К. С. Ш и ф р и н, И. Л. З е л ь м а н о в и ч. Опт. и спектр., 17, 113, 1964.
- [5] К. С. Ш и ф р и н. Опт. и спектр., 18, 690, 1965.
- [6] И. Е. Т а м м. Основы теории электричества. «Наука», М., 1966.
- [7] К. С. Ш и ф р и н. Рассеяние света в мутной среде. ГТТЛ, М.—Л., 1951.

Поступило в Редакцию 12 июля 1977 г.