

## МОМЕНТНЫЙ МЕТОД ГРЭДА В ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕНОСОМ ЛИНЕЙЧАТОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*Н. Г. Преображенский и А. Е. Суворов*

Рассмотрена задача о переносе линейчатого излучения при предположении о неполном перераспределении излучения по частотам. Показана эффективность использования моментного метода Грэда при решении подобных задач.

1. В последнее время в физике плазмы, лазерной спектроскопии, радиационной газодинамике наметилось значительное количество интересных в теоретическом и прикладном отношении задач, для правильной постановки которых важную роль играет корректный учет процесса перераспределения реабсорбированного излучения по частотам. Некоторые простые способы подхода к таким задачам уже рассматривались [1-3], однако с позиций последовательной кинетической теории упомянутые задачи практически не исследованы. Особенно неудовлетворительно обстоит дело с разработкой удобных прикладных методов решения задач радиационной кинетики в случае так называемого неполного перераспределения излучения по частотам при переносе в линии. Например, даже в простейшем случае двухуровневого приближения, когда переизлучение сосредоточено в окрестности одной центральной частоты  $\nu_0$ , движение атома со скоростью  $v$  приводит к корреляции поглощаемой  $\nu_a$  и испускаемой  $\nu_e$  частот согласно соотношению

$$\nu_e - \nu_a = \frac{\nu_0}{c} \{ (v, \Omega_e - \Omega_a) \},$$

где  $\Omega_a$  и  $\Omega_e$  — соответствующие орты волновых векторов. Одновременно происходит и существенное усложнение интеграла столкновений.

В работе [4] на основе преобразований системы уравнений Больцмана для частиц и фотонов был прослежен вывод различных по степени общности уравнений для функции распределения (ФР) возбужденных атомов  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . В частности, в двухуровневом приближении и в пренебрежении эффектом запаздывания, вынужденным излучением, тушащими столкновениями, зависящими от скорости партнеров, совместным переносом частиц и фотонов, а также в отсутствие явной зависимости коэффициента поглощения  $\kappa(\nu)$  от координат и времени получается следующее очевидным образом интерпретируемое кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \beta(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \tau_0 F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \\ - \frac{\kappa_0 W(\nu)}{4\pi^{1/2}} \int \frac{\exp[-\kappa_0 W_0(n\nu) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \\ \times d\mathbf{r}' \int \delta[n(\mathbf{v} - \mathbf{v}')] \varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\tau_0$  — время жизни возбужденного состояния,  $\beta(\mathbf{r})$  — функция, учитывающая спонтанное излучение и тушащие столкновения, зависящие

только от координат,  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — мощность источника возбужденных атомов,  $\mathbf{n}$  — орт в направлении  $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ,  $x_0 = x(v_0)$ ,  $W(v) = (\pi v_0^2)^{-3/2} W_0(v)$  — равновесная ФР атомов системы,  $v_0 = (2kT/m)^{1/2}$  — ее параметр. В дальнейшем будет удобнее пользоваться системой единиц, в которой  $\tau_0 = v_0 = 1$ .

2. Естественный подход к решению уравнения (1) состоит в разложении ФР по подходящему базису ортонормированных функций. В частности, удобно воспользоваться известным методом моментов Грэда [5], в котором применяются обобщенные полиномы Эрмита

$$H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x}^2) \frac{\partial^k}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_k}} \exp[-(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2] |_{\mathbf{y}=0}, \quad (2)$$

представляющие собой полиномиальные тензоры ранга  $k$  в трехмерном пространстве; символом  $\mathbf{i}$  обозначена соответствующая последовательность из  $k$  индексов.

Причина выбора именно такой системы полиномов связана с наличием условия ортогональности

$$\int W(\mathbf{x}) H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{x}) H_{\mathbf{j}}^{(p)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2^k k_1! k_2! k_3! \Delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}, \quad (3)$$

где  $k_\gamma$  — число индексов, равных  $\gamma$  ( $\gamma = 1, 2, 3$ ), а символ  $\Delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$  отличен от нуля и равен единице только, когда  $k=p$  и  $\{\mathbf{i}\}$  является перестановкой  $\{\mathbf{j}\}$ .

Таким образом, имеем

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = W(v) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{i}} H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{v}) a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

причем из определения (2) ясно, что как  $H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{v})$ , так и

$$a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2^k k!} \int \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (5)$$

суть симметричные тензоры ранга  $k$ .

Поскольку  $H^{(0)}(\mathbf{x}) = 1$ ,  $H_{\mathbf{i}}^{(1)}(\mathbf{x}) = 2x_{\mathbf{i}}$ ,  $H_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(2)}(\mathbf{x}) = 4x_{\mathbf{i}}x_{\mathbf{j}} - 2\delta_{\mathbf{i}\mathbf{j}}$ , то нетрудно убедиться, что первые три коэффициента разложения  $a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t)$  определяют плотность возбужденных атомов  $N(\mathbf{r}, t)$ , среднюю скорость атомов и отклонение их средней энергии от равновесной

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= N(\mathbf{r}, t), \\ a_{\mathbf{i}}^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= N(\mathbf{r}, t) \langle v_{\mathbf{i}} \rangle, \\ a_{\mathbf{i}\mathbf{i}}^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{N(\mathbf{r}, t)}{2} \Delta \langle v_{\mathbf{i}}^2 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставляя (4) в (1) и используя условие ортогональности (3), приходим к следующей системе уравнений относительно коэффициентов  $a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \beta(\mathbf{r}) a_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t) - F_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t) - \\ & - \frac{x_0}{2^{k+2} \pi^{3/2} k!} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{j}} \int_V \frac{a_{\mathbf{j}}^{(p)}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} G_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{n}) G_{\mathbf{j}}^{(p)}(\mathbf{n}) d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} W_0^2(v) \times \\ & \times H^k(v) H^{(p)}(v) \exp[-x_0 W_0(v) |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|] dv = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\nu$  — частота, отсчитываемая от  $\nu_0$  в обе стороны,  $H^{(k)}(\mathbf{x})$  — обычный полином Эрмита,  $G_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{n})$  — произведение ортов

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{n}) &= \prod_{\mathbf{i}}^k (\mathbf{n}), \\ F_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2^k k!} \int F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) H_{\mathbf{i}}^{(k)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Кроме того, при записи формулы (7) использовано соотношение

$$\int W(\mathbf{x}) H_1^{(k)}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{n}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) d\mathbf{x} = \pi^{-1/2} W_0(\mathbf{n}\mathbf{y}) H^{(k)}(\mathbf{n}\mathbf{y}) G_1^{(k)}(\mathbf{n}),$$

непосредственно следующее из (2).

3. Система уравнений (7) эквивалентна исходному уравнению (1), однако очевидна схема ее приближенного решения: в разложении (4) можно учитывать различное число слагаемых. Так, ограничиваясь первым членом, т. е. случаем, когда  $a_1^{(k)}(\mathbf{r}, t) = a^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \beta(\mathbf{r}) N(\mathbf{r}, t) - F^{(0)}(\mathbf{r}, t) - \frac{z_0}{4\pi^{3/2}} \int \frac{N(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}' - \int_{-\infty}^{\infty} W_0^2(v) \exp\{-z_0 W_0(v) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\} dv = 0, \quad (8)$$

которое в пренебрежении внешними источниками [ $F^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0$ ] и тушащими столкновениями [ $\beta(\mathbf{r}) = 1$ ] переходит в хорошо известное уравнение Бибермана—Холстейна [6, 7].

Сохранение членов  $F^{(0)}$  и  $\beta(\mathbf{r})$  в (8) практически не увеличивает трудностей, связанных с решением последнего. Отметим также, что уравнения с четными и нечетными значениями  $k$  в  $a_1^{(k)}(\mathbf{r}, t)$  разделяются, поскольку четность полиномов Эрмита совпадает с четностью  $k$ , благодаря чему соответствующие интегралы в (7) обращаются в нуль. Таким образом, если в начальный момент времени  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  были четными, то ФР останется четной и для  $t > t_0$ , так что в (4) можно вообще не учитывать нечетных слагаемых.

4. Конкретизируем описанный выше моментный метод решения уравнения (1) с целью последующей оценки влияния на ФР выхода излучения из объема газа. Рассмотрим плоско-параллельный слой толщиной  $L$ ; ФР при этом зависит лишь от одной пространственной координаты  $z$  и двух независимых ортогональных составляющих скорости атома.

В разложении (4), очевидно, сохраняются только величины, инвариантные относительно поворота системы координат вокруг оси  $z$ . Для нахождения всех необходимых комбинаций следует обычным образом перейти к неприводимым представлениям группы вращений. Пространство симметричных тензоров ранга  $k$  осуществляет приводимое представление группы вращений, которое подходящим выбором базисных тензоров можно разложить на неприводимые. Обозначим эти базисные тензоры через  $Q_l^m$ ,  $l = 0, 1, 2 \dots k$ ,  $-l \leq m \leq l$ .

Для них выполняется очевидное условие ортогональности

$$\sum_l (Q_l^m)(Q_l^{qS})^* = \delta_{lq} \delta_{ms}, \quad (9)$$

и с их помощью любой симметричный тензор  $B_i$  может быть представлен в виде

$$B_i = \sum_{l=0}^k \sum_{m=-l}^l b_{lm} Q_l^m. \quad (10)$$

В том случае, когда тензор  $B_i$  зависит лишь от одного вектора  $\omega$ ,

$$b_{lm}(\omega) = b_l Y_{lm}(\omega), \quad (11)$$

где  $Y_{lm}(\omega)$  — сферическая функция.

Как показано в Приложении, для тензоров  $G_i^{(k)}(\mathbf{n})$  и  $H_i^{(k)}(\mathbf{v})$  соответствующие коэффициенты  $g_l^{(k)}$  и  $h_l^{(k)}$  могут быть вычислены явно. Именно

$$\left. \begin{aligned} g_l^{(k)} &= \left[ \frac{\pi^{3/2} k!}{2^{k-1} \Gamma\left(\frac{k-l+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+l+3}{2}\right)} \right]^{1/2}, \\ h_l^{(k)} &= (-1)^{\frac{k+l}{2}} 2^k \Gamma\left(\frac{k-l+2}{2}\right) v^l g_l^{(k)} L_{\frac{k-l}{2}}^{l+1/2}(v^2), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $L_\beta^\alpha(x)$  — полином Лагерра. Если далее понимать под  $\omega$  орт вектора скорости возбужденного атома, то для коэффициента  $a_{lm}^{(k)}(z, t)$  получается выражение

$$a_{lm}^{(k)}(z, t) = \frac{1}{2^k k!} \int \varphi(z, v\omega, t) h_l^{(k)} Y_{lm}^*(\omega) v^2 dv d\omega. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$L_0^{l+\frac{1}{2}}(v^2) = 1, \quad L_1^{l+\frac{1}{2}}(v^2) = l + \frac{3}{2} - v^2,$$

выпишем несколько явных выражений для коэффициентов  $a_{lm}^{(k)}(z, t)$

$$\left. \begin{aligned} a^{(0)}(z, t) &= N(z, t), \\ a_{00}^{(2)}(z, t) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} N(z, t) \Delta \langle v^2 \rangle, \\ a_{20}^{(2)}(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{6}} N(z, t) [\langle v_x^2 \rangle - \langle v_y^2 \rangle]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При этом в силу отмеченной выше симметрии задачи в разложении  $a_{lm}^{(k)}(z, t)$  по сферическим гармоникам следует сохранить только члены с  $m=0$ ; соответствующий нулевой индекс далее опущен. На основании формул (9)–(12) уравнения (7) преобразуются к виду

$$\frac{\partial a_{pq}^{(k)}(z, t)}{\partial t} + \beta(z) a_{pq}^{(k)}(z, t) - F_{pq}^{(k)}(z, t) - \sum_{p', q'} \int_{-L/2}^{L/2} D_{pq}^{k l} (z - z') a_{p'q'}^{(p)}(z', t) dz' = 0, \quad (15)$$

где

$$D_{pq}^{k l} = \frac{\alpha_0 g_l^{(k)} g_q^{(p)} \sqrt{(2l+1)(2q+1)}}{2^{k+3} \pi^{3/2} k!} \int_0^1 \frac{P_l(\xi) P_q(\xi)}{\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} W_0^3(v) \times \\ \times H^{(k)}(v) H^{(p)}(v) \exp\left\{-\frac{\alpha_0 W_0(v) |z - z'|}{\xi}\right\} dv,$$

$P_l(\xi)$  — полином Лежандра, а выражение  $F_{pq}^{(k)}(z, t)$  с учетом (12) записывается очевидным образом.

5. Проиллюстрируем применение системы уравнений (15) на двух простых примерах. В обоих случаях интегралы по  $\xi$  и  $v$  находились численно, а алгебраизация уравнений производилась способом, описанным в предыдущей работе авторов [8].

Рассмотрим процесс высвечивания плоского слоя газа после прекращения его возбуждения и в пренебрежении тушащими соударениями

$$F_{pq}^{(k)}(z, t) = 0, \quad \beta(z) = 1.$$

Кроме того, будем интересоваться такими моментами времени после прерывания возбуждения, для которых аргументы  $z$  и  $t$  разделяются, т. е.

$$a_{pq}^{(k)}(z, t) \simeq a_{pq}^{(k)}(z) \exp(-t/\tau). \quad (16)$$

Критерии применимости приближения спонтанного распада по одной экспоненциальной моде исследовались в ряде работ (см., например, [9]). При этом обратное эффективное время высвечивания  $\tau^{-1}$  является минимальным собственным числом линейного оператора в системе (15).

Расчет зависимости  $\tau$  от оптической толщины  $\alpha_0 L$  для исходного доплеровского профиля и простейшего случая  $k=0$  (модель Бибермана — Холстейна) дает кривую, изображенную на рис. 1 сплошной линией. Она в точности совпадает с аналогичной кривой, рассчитанной другим способом в работе Шерра [10]. Учет слагаемых с  $k=2$  дает несколько ускоренное возрастание  $\tau$  с увеличением  $\alpha_0 L$ , показанное на рис. 1 штриховой линией, а включение членов с  $k > 2$  уже практически не существенно.

Довольно слабое отличие обеих кривых друг от друга не должно, однако, дезориентировать исследователей, интересующихся степенью

отличия ФР от равновесной в различных частях контура линии. Правильный учет ситуации такого рода особенно важен в многочисленных задачах нелинейной лазерной спектроскопии [11]. В таких задачах расчет  $\varphi(z, \nu\omega, t)$  для  $x_0L \gg 1$  и частотных интервалов, отвечающих крыльям контура линии,

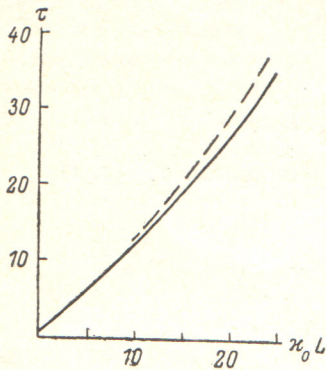


Рис. 1. Эффективное время высвечивания плоского слоя.

Сплошная линия по модели Биббермана—Холстейна, штриховая — с учетом неполного перераспределения по частотам.

$\Delta \langle \nu^2 \rangle$ , определяемая, согласно (14), коэффициентом  $a_0^{(2)}$ , значения  $x_0L$  — те же, что и на рис. 2. Была рассчитана также степень анизотропии ФР, описываемая коэффициентом  $a_2^{(2)}$ , которая оказалась незначительной везде, кроме области, близкой к границе слоя —  $0.9 \leq 2z/L < 1$ .

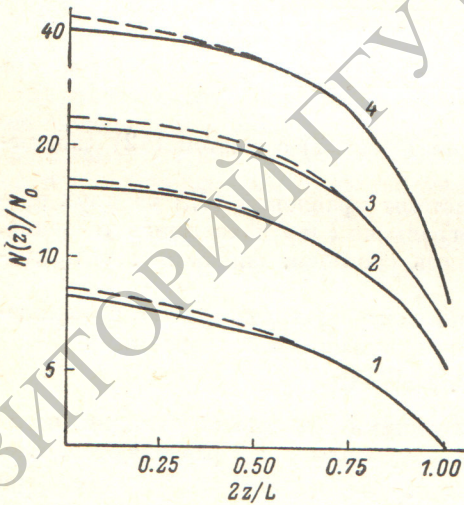


Рис. 2. Плотность возбужденных атомов в однородно возбуждаемом плоском слое.

Штриховые кривые — с учетом неполного перераспределения по частотам. 1 —  $x_0L=5$ , 2 — 10, 3 — 15, 4 — 20.

должен предусматривать суммирование значительного числа членов разложения в методе моментов Грэда.

Второй пример относится к случаю стационарного однородного возбуждения атомов внутри плоского слоя газа ( $\partial/\partial t=0$ ), когда можно считать, что  $F(z, \nu\omega, t) = N_0 W(\nu)$ . Как и ранее, полагаем  $\beta(z)=1$ , хотя учет тушащих соударений принципиальных трудностей не вызывает. На рис. 2 в полулогарифмическом масштабе приведена зависимость отношения  $N(z)/N_0$  от безразмерной координаты при нескольких значениях оптической толщины слоя:  $5 \leq x_0L \leq 20$ . Вновь, как и на рис. 1, сплошная кривая соответствует модели Биббермана—Холстейна, а штриховая — учету эффекта неполного перераспределения реабсорбированного излучения по частотам. На рис. 3 показана координатная зависимость отклонения

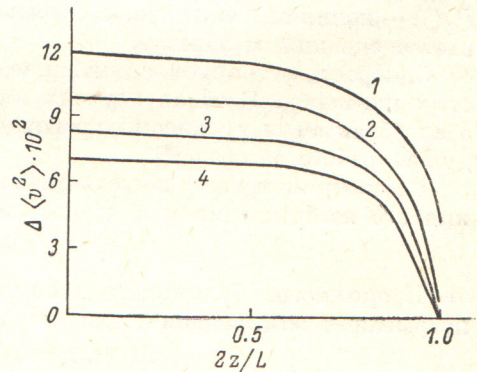


Рис. 3. Координатная зависимость отклонения среднего квадрата скорости от равновесного значения.

1 —  $x_0L=5$ , 2 — 10, 3 — 15, 4 — 20.

В заключение отметим, что предварительный анализ подтверждает эффективность моментного метода Грэда при решении задач переноса линейчатого излучения, в которых а) излучение происходит из объема газа в виде сферы, цилиндра или прямоугольного параллелепипеда; б) существенным является учет отражения от стенки; в) необходим последовательный расчет нелинейной поляризуемости активной газовой среды [12]; г) при неполном перераспределении по частотам осуществля

ется расчет переноса излучения от одной границы плоского слоя до другой [13].

Более полное обсуждение этих и некоторых других задач радиационной кинетики авторы надеются произвести в ближайшем будущем.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Покажем как вычисляются коэффициенты (12). Рассмотрим тензор  $G_i^{(k)}(\mathbf{n})$ . На основании формул (9)—(11) имеем

$$(g_i^{(k)})^2 = \sum_i \int G_i^{(k)}(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \int G_i^{(k)}(\mathbf{n}') Y_{lm}^*(\mathbf{n}') d\mathbf{n}'. \quad (\text{П. 1})$$

Находя след матрицы и пользуясь известной теоремой сложения для сферических функций [15], получаем

$$(g_i^{(k)})^2 = \frac{1}{4\pi} \int \int (\mathbf{n} - \mathbf{n}')^k P_l(\mathbf{nn}') d\mathbf{n} d\mathbf{n}', \quad (\text{П. 2})$$

откуда непосредственным интегрированием приходим к первой формуле (12).

Далее

$$h_i^{(k)} = \sum_i (Q_i^{(k)})^* \int H_i^{(k)}(\nu\omega) Y_{lm}^*(\omega) d\omega. \quad (\text{П. 3})$$

Следует вновь воспользоваться теоремой сложения для сферических функций, а также вытекающим из (10), (11) соотношением

$$Q_i^{(k)} = (g_i^{(k)})^{-1} \int G_i^{(k)}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (\text{П. 4})$$

Простые преобразования приводят к выражению

$$h_i^{(k)} = 2\pi (g_i^{(k)})^{-1} \int_{-1}^{+1} H^{(k)}(\nu\xi) P_l(\xi) d\xi, \quad (\text{П. 5})$$

после чего путем применения формулы Родрига для полиномов Лежандра [15] приходим к интегральному представлению Успенского для полиномов Лагерра [15], что непосредственно дает вторую формулу (12).

2. В связи с тем что эффекты, обусловленные неполным перераспределением излучения по частотам, обычно не слишком велики, возникает вопрос о возможной роли факторов, которые не учитывались в (1). Прежде всего речь может идти о переносе возбужденных атомов.

Сделаем простые оценки. Вкладом переноса возбужденных атомов можно пренебречь, если за характерное время задачи  $\tau_0$  атом в среднем пройдет путь, много меньший характерного размера излучающего объема  $L$ , т. е.  $\nu\tau_0/L \ll 1$ . Для малых оптических толщин, имея в виду резонансную линию, можно оценить  $\tau_0 \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$  с; если при этом положить  $\nu \sim 10^4 \div 10^5$  см/с,  $L \sim 1$  см, то указанное выше отношение составит  $10^{-5} \div 10^{-3}$ . Для слоя достаточно большой оптической толщины  $\tau_0 \rightarrow \tau_{\text{eff}}$ , где  $\tau_{\text{eff}} \approx \tau_0 S$ ,  $S$  — число переизлучений за время  $\tau_{\text{eff}}$ , при которых скорость возбужденного атома меняется случайным образом. По теории случайных блужданий среднее смещение возбужденного атома теперь следует считать равным  $\nu\tau_0 S^{1/2} \approx \nu\tau_0 (\kappa_0 L)^{1/2}$  ( $S = \kappa_0 L \sqrt{\ln \kappa_0 L}$ ), но величину  $(\ln \kappa_0 L)^{1/4}$  даже для весьма больших значений оптических толщин можно считать равной единице). Полагая  $\kappa_0 L = 100$ , получаем, что отношение расстояния, пройденного атомом, к размеру  $L$  составляет  $10^{-4} \div 10^{-2}$ . Рассматривать еще большие значения  $\kappa_0 L$  в рамках данной задачи уже нет смысла из-за уменьшения относительной роли самих эффектов неполного частотного перераспределения. Заметим, что ситуация может стать иной, если  $\tau_0 \gg 10^{-8} \div 10^{-9}$  с, т. е. возникает вопрос о диффузии

метастабильных атомов. Соответствующая теория (применительно к модели полного перераспределения по частотам) в последнее время разрабатывалась в [16, 17].

#### Литература

- [1] D. Hummer. *Month. Not. Roy. Astron. Soc.*, 125, 21, 1962.
- [2] D. Rees, D. Reichel. *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 8, 1795, 1968.
- [3] Н. Г. Преображенский. *Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук*, № 3, 15, 1968.
- [4] А. Е. Булышев, Н. Г. Преображенский, А. Е. Суворов. *Изв. вузов, физика*, № 12, 19, 1975.
- [5] H. Grad. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2, 311, 1949.
- [6] Л. М. Биберман. *ЖЭТФ*, 17, 416, 1947; 19, 584, 1949.
- [7] T. Holstein. *Phys. Rev.*, 72, 1212, 1947; 83, 1159, 1951.
- [8] Н. Г. Преображенский, А. Е. Суворов. *Ж. прикл. мех. и техн. физики*, № 2, 3, 1977.
- [9] H. Sato, T. Mimaki. *J. Phys. Soc. Japan*, 26, 446, 1969.
- [10] W. Scherr. *Phys. Rev. B.*, 4, 3885, 1971.
- [11] В. С. Летохов, В. П. Чеботаев. *Принципы нелинейной лазерной спектроскопии*. «Наука», М., 1975.
- [12] М. И. Дьяконов, В. И. Перель. *ЖЭТФ*, 58, 1090, 1970.
- [13] А. Я. Эндер, Л. А. Бакалейников. *ЖТФ*, 47, 20, 1977.
- [14] Н. Я. Виленин. *Специальные функции и теория представлений групп*. «Наука», М., 1965.
- [15] Г. Бейтмен, А. Эрдейн. *Высшие трансцендентные функции*. 195, т. 2. «Мир», 1974.
- [16] А. Н. Лагарьков, Н. А. Медведева. *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 13, 209, 225, 1973; 17, 735, 1977.
- [17] D. G. Hummer, P. B. Kunasz. *J. Quant. Spectr. Rad. Transfer*, 16, 77, 1976.

Поступило в Редакцию 22 июня 1977 г.