

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЙ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПОЛЯ
В ДЕФЛЕКТОРАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Б. Б. Севрук и Н. А. Гусак

С помощью вариационного метода проведен расчет электростатического поля, создаваемого конечными электродами в анизотропном диэлектрике. Для различных конструкций квадрупольных электрооптических дефлекторов получены зависимости величины искажений управляющего поля от поперечных размеров гиперболических и плоских электродов при заданной апертуре. Найдены радиусы отрезков круговых цилиндров, наилучшим образом аппроксимирующих гиперболические цилиндры.

В работах [1-3] показано, что идеальной формой электродов, создающих управляющее поле, обеспечивающее отклонение пучка света без искажений в квадрупольных электрооптических (ЭО) дефлекторах градиентного типа, являются гиперболические цилиндры с бесконечной протяженностью. Однако дефлекторы имеют ограниченные поперечные размеры, а трудности при их изготовлении обуславливают необходимость замены гиперболических электродов более технологически выгодными. Таковыми являются плоские электроды и электроды в виде отрезков круговых цилиндров.

Результаты анализа управляющего поля в ЭО дефлекторах с плоскими электродами приводились в работах [4, 5]. Однако в работе [4] в качестве исходного уравнения для нахождения потенциала электростатического поля в кристалле взято уравнение Лапласа для изотропной среды. В [5] проведен, на наш взгляд, неполный учет анизотропии кристалла, поскольку используемое решение фактически применимо также лишь в изотропном случае. Как в работе [4], так и в [5] предполагается симметрия электрического поля, обусловленная только геометрией электродов без учета анизотропии диэлектрической проницаемости кристалла. С другой стороны, приведенные в [4, 5] результаты недостаточны для сравнительного анализа искажения пучка света в различных схемах дефлекторов.

В настоящей работе приводится метод расчета двумерного электростатического поля в анизотропном диэлектрике, создаваемого цилиндрическими электродами, уравнение для потенциала которого, приведенное к главным осям Y, Z тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ во внешнем поле, имеет вид

$$\epsilon_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где ϵ_y, ϵ_z — низкочастотные компоненты тензора $\hat{\epsilon}$.

Проводится расчет искажения поля в дефлекторах с конкретной геометрией электродов, а также сравнение различных схем дефлекторов.

В работе рассматриваются следующие схемы квадрупольных ЭО дефлекторов с цилиндрическими электродами.

I. Дефлектор, дающий отклонение светового пучка вдоль оси Y (рис. 1 в работе [1]). В идеальном случае поле в таком дефлекторе описывается формулой $\varphi = \varphi_0 2yz/r_0^2$, где φ_0 — управляющий потенциал, подаваемый

на электроды, r_0 — апертура и удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\varphi(y, z) = -\varphi(-y, z) = -\varphi(y, -z) = \varphi(-y, -z). \quad (2)$$

II. Дефлектор, дающий отклонение светового пучка вдоль оси Z (рис. 1 в работе [2]), поле в котором в идеальном случае описывается формулой

$$\varphi = (\varphi_0/r_0^2) [(y^2 \epsilon_z / \epsilon_y) - z^2].$$

III. Дефлектор с отклонением пучка вдоль оси Z (см. рисунок в работе [3]), поле в котором в идеальном случае описывается формулой

$$\varphi = \frac{2\varphi_0 \epsilon_y}{r_0^2 (\epsilon_z + \epsilon_y)} \left(\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} y^2 - z^2 \right) \mp \frac{\epsilon_y - \epsilon_z}{\epsilon_z + \epsilon_y} \varphi_0.$$

Поле в диэлектрике для схем II и III удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\varphi(y, z) = \varphi(y, -z) = \varphi(-y, z) = \varphi(-y, -z). \quad (3)$$

Граница диэлектрика во всех трех схемах дефлекторов взята плоской и соответственно перпендикулярной осям координат, прямым $z = \pm \sqrt{\epsilon_z / \epsilon_y} y$ и прямым $z = \pm y$.

Для определения потенциала управляющего электростатического поля, создаваемого электродами дефлектора, требуется найти решение уравнения (1) внутри области, ограниченной электродами и границей диэлектрика. При этом предполагается выполнение следующих граничных условий:

1) условия постоянства потенциала на поверхности электродов

$$\varphi|_{\text{эл.}} = \varphi_0, \quad (4)$$

2) условия равенства нулю нормальной составляющей вектора напряженности поля на границе диэлектрика

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\text{гр. диэл.}} = 0, \quad (5)$$

где n — нормаль к границе диэлектрика. Условие (5) в реальных ситуациях выполняется приближенно и тем точнее, чем больше ϵ кристалла по сравнению с ϵ воздуха. Действительно, для обычно используемых ЭО кристаллов $\epsilon_{\text{диэл.}} \gg \epsilon_{\text{возд.}}$.

Для решения поставленной краевой задачи применим метод аппроксимирующих функций, точно удовлетворяющих исходному уравнению. В качестве таких функций возьмем частные решения уравнения (1). Уравнение (1) с помощью преобразования $y' = y \sqrt{\epsilon_z / \epsilon_y}$, $z' = z$ приводится к уравнению Лапласа, конечными в начале координат решениями которого являются гармонические полиномы $H_n^{(0)}(y', z')$, $H_n^{(1)}(y', z')$ [6].

Переходя в них к переменным y, z и учитывая условия квадрупольной симметрии поля (2), (3), а также свойства четности гармонических полиномов, которые выражаются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(0)}(p, q) &= H_n^{(0)}(p, -q) = (-1)^n H_n^{(0)}(-p, q), \\ H_n^{(1)}(p, q) &= -H_n^{(1)}(p, -q) = (-1)^{n+1} H_n^{(1)}(-p, q), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

получим следующие выражения для частных решений уравнения (1) в случаях I и II, III соответственно:

$$\varphi_k^{\text{I}}(y, z) = H_{2k}^{(1)} \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}}, z \right) = \sum_{l=0}^{[(2k-1)/2]} (-1)^l C_{2k}^{2l+1} \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}} \right)^{2k-2l-1} z^{2l+1}, \quad (7)$$

$$\varphi_k^{\text{II, III}}(y, z) = H_{2k}^{(0)} \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}}, z \right) = \sum_{l=0}^k (-1)^l C_{2k}^{2l} \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y}} \right)^{2k-2l} z^{2l}. \quad (8)$$

Решение граничной задачи (1), (4), (5) ищем в виде линейной комбинации функций (7) или (8)

$$\varphi(y, z) = \sum_{k=0}^N b_k \varphi_k(y, z), \quad (9)$$

где коэффициенты b_k ($k=0, N$) определяются из условий (4), (5).

Первые два члена в (9) с учетом (7), (8) дают выражения для идеального управляющего поля, а последующие — отклонение поля от идеального при произвольной форме электродов.

Для нахождения коэффициентов потребуем выполнения условий (4), (5) на границе области в смысле метода наименьших квадратов, т. е. минимума функционала

$$J = \int_{L_{\text{эл.}}} (\varphi - \varphi_0)^2 dl + \int_{L_{\text{диэл.}}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 dl, \quad (10)$$

где φ дается выражением (9), а $L_{\text{эл.}}$ и $L_{\text{диэл.}}$ — контуры электродов и свободной границы диэлектрика. Полученная таким образом система нормальных уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial b_k} = 0 \quad (k=0, N) \quad (11)$$

определяет коэффициенты b_k ($k=0, N$), подстановка которых в (9) даст приближенное выражение для потенциала, которое затем используется для нахождения искажений управляющего поля.

Исходя из условия отклонения дефлектором пучка света без искажений, для оценки величины искажения управляющего поля, вносимого отклонением формы электродов от идеальной, найдем относительные изменения величины $\nabla E_z(r, \theta)$ при $\theta=(0 \div \pi/2)$, $r=(0 \div r_0)$, т. е. величину

$$\delta(r, \theta) = \frac{|\nabla E_z(r, \theta)|}{|\nabla E_z(0, 0)|}, \quad (12)$$

где r, θ — полярные координаты, r_0 — апертура, E_z — компонента электрического поля, пропорциональная изменению показателя преломления ЭО кристалла, а также среднее по площади поперечного сечения пучка относительное искажение

$$\bar{\delta} = \frac{1}{S_0} \int_{(S_0)} \frac{|\nabla E_z(r, \theta) - \nabla E_z(0, 0)|}{|\nabla E_z(0, 0)|} dS, \quad (13)$$

где S_0 — площадь поперечного сечения пучка. Величина $\bar{\delta}$ используется при выборе оптимальной геометрии электродов дефлектора.

Изложенная методика приближенного расчета искажений управляющего поля в дефлекторе была реализована в ФОРТРАН программе, при этом величины $\nabla \varphi = (d\varphi/dy, d\varphi/dz)$ и $\nabla E_z = (d^2\varphi/dydz, d^2\varphi/dz^2)$ определялись дифференцированием выражения (9) с учетом (7), (8).

По изложенной методике был проведен расчет искажений управляющего поля для трех вышеизложенных схем дефлекторов. Предполагалось, что дефлекторы выполнены из кристалла KDP, для которого $\varepsilon_z/\varepsilon_y = 1/2$. Электроды дефлекторов изображались отрезками гипербол, отрезками прямых, дугами окружностей различных радиусов при заданном кратчайшем расстоянии d плоской границы диэлектрика от центра дефлектора.

Для гиперболических электродов было рассчитано искажение управляющего поля $\bar{\delta}$ в зависимости от относительного расстояния от центра дефлектора r/r_0 в пределах апертуры вдоль выбранных направлений по поперечному сечению пучка при $d=1.5r_0$. Из рис. 1 видно, что эти зависимости сильно отличаются вдоль различных направлений, хотя величина искажения поля невелика и не превышает 10% по $\bar{\delta}$. Для сравнительной оценки преимуществ конкретных схем дефлекторов были также исследованы зависимости среднего искажения управляющего поля $\bar{\delta}$ от относи-

тельных размеров поперечных сечений дефлекторов, которые определяются величиной d/r_0 . Результаты приведены на рис. 2, из которого видно, что для дефлекторов с ограниченными гиперболическими электродами величина искажения монотонно убывает с увеличением размеров дефлектора и в широком интервале значений d схема I дает меньшие искажения отклоняемого пучка света, чем схемы II и III, искажения для которых

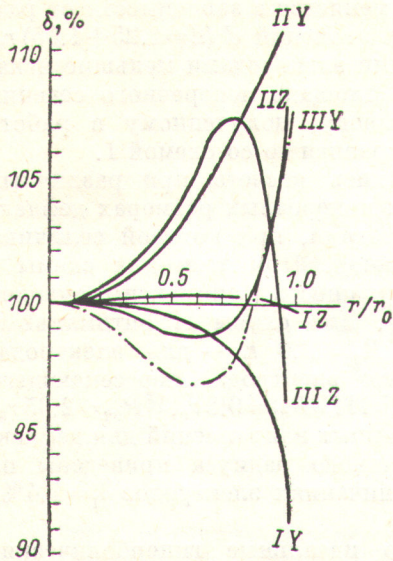


Рис. 1. Зависимости искажения поля от расстояния от центра для дефлекторов с гиперболическими электродами.

Первый индекс в обозначениях кривых указывает номер схемы дефлектора, второй — направление вдоль осей Y или Z.

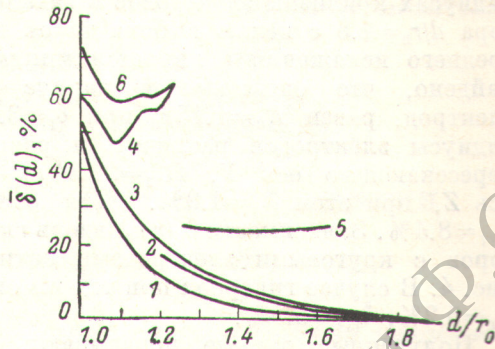


Рис. 2. Зависимости среднего искажения поля от расстояния границы диэлектрика от центра для дефлекторов с гиперболическими (1, 2, 3) и плоскими (4, 5, 6) электродами для схемы I, II, III, соответственно.

приблизительно одинаковы. Для реализации преимуществ дефлекторов, выполненных по схеме III (идеальная схема III дает большее в $2\epsilon_y/(\epsilon_y + \epsilon_z)$ разрешение, чем I и II [3]), необходимо увеличение размеров электродов по сравнению со схемой I.

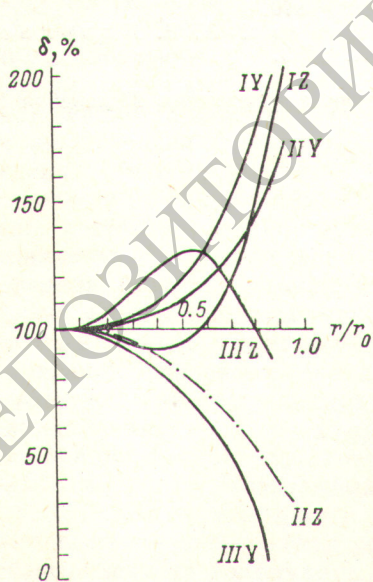


Рис. 3. Зависимости искажения поля от расстояния от центра для дефлекторов с плоскими электродами.

Обозначения те же, что и на рис. 1.

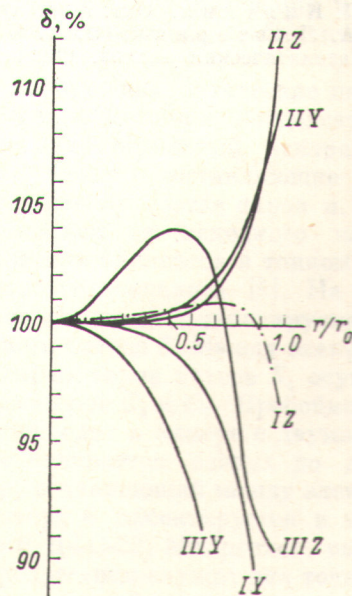


Рис. 4. Зависимости искажения поля от расстояния от центра для дефлекторов с электродами в виде отрезков круговых цилиндров.

Обозначения те же, что и на рис. 1.

Результаты расчета искажений управляющего поля для дефлекторов с плоскими электродами приведены на рис. 3 для $d=1.25 r_0$. Исследование зависимости $\delta(d/r_0)$ (рис. 2) показывает, что для плоских электродов δ_{II} в несколько раз меньше δ_I и δ_{III} и мало меняется в зависимости от размеров дефлектора в интервале возможных значений d ($d=1.25+1.65$) r_0 . Таким образом, для дефлекторов с плоскими электродами меньшие искажения дает схема II, имеющая большую площадь поперечного сечения отклоняющего элемента [2]. Согласно выводу, полученному в работе [6], схема II дает большие искажения по сравнению со схемой I.

Для круговых электродов производились расчеты при различных радиусах кривизны электродов и заданных поперечных размерах дефлектора $d/r_0=1.5$ с целью выбора такой геометрии, при которой величина среднего искажения δ является минимальной. При этом для схемы I найдено, что оптимальный радиус окружности, аппроксимирующей электрод, равен $R_0=1.15 r_0$ при $\delta_I=3.8\%$. Для схемы II оптимальные радиусы электродов различны и равны $R_{01}=2.0 r_0$ — для электрода, пересекающего ось Y, $R_{02}=2.25 r_0$ — для электрода, пересекающего ось Z, при этом $\delta_{II}=1.9\%$. Для схемы III $R_{01}=0.8 r_0$, $R_{02}=2.65 r_0$, $\delta_{III}=8.4\%$. Зависимости $\delta(r/r_0)$ вдоль выбранных направлений для дефлекторов с круговыми электродами оптимального радиуса приведены на рис. 4. В случае гипербола при тех же ограничениях электродов $\delta_I=1.4\%$, $\delta_{II}=5.2\%$, $\delta_{III}=5.5\%$.

Полученные данные показывают, что идеальные гиперболические электроды дефлекторов можно с хорошей точностью (порядка нескольких процентов δ) заменять отрезками круговых цилиндров. Полученные при этом искажения отклоняемого пучка света значительно меньше, чем в случае плоских электродов, и сравнимы с искажениями в случае ограниченных гиперболических электродов при тех же поперечных размерах прибора.

Литература

- [1] V. I. Fowler, S. F. Vuhner, L. R. Bloom. Proc. IEEE, 52, № 2, 1964.
- [2] Н. А. Гусак, В. Е. Лепарский. Ж. прикл. спектр., 21, вып. 4, 1974.
- [3] Н. А. Гусак, В. Е. Лепарский. Ж. прикл. спектр., 23, вып. 1, 1975.
- [4] Р. П. Кияткин. Опт. и спектр., 38, 374, 1975.
- [5] Р. П. Кияткин. Опт. и спектр., 40, 608, 1976.
- [6] Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский. Математический анализ. Физматгиз, М., 1963.

Поступило в Редакцию 26 декабря 1977 г.