УДК 548.0 : 535.2

ВНУТРЕННЯЯ КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ ПУЧКОВ СВЕТА

А. Г. Хаткевич

Рассмотрено распространение пучков монохроматического света вдоль оптических осей кристаллов. Обнаружено, что в магнитных диэлектриках конус рефракции является эллиптическим. Приведено выражение кривизны поверхности волновых векторов для направлений осей, которая определяет расплывание пучков в кристаллах и позволяет оценить пределы применимости плосковолнового приближения. Показано, что амплитуда пучка излучения в случае осей описывается уравнением третьего порядка. Получено решение этого уравнения для немагнитного диэлектрика. Исследована поляризация и амплитуда излучения при распространении эллиптически поляризованных круговых гауссовых пучков вдоль оптических осей в одноосных кристаллах и круговых нерасходящихся пучков в двуосных. В последнем случае конус излучения не разделяется на два и даже при линейной поляризации имеет почти все образующие.

Коническая рефракция представляет уникальное и интереснейшее явление кристаллооптики, использование которого для сканирования лазерного излучения активно обсуждалось в недавнее время [1–4]. В связи с этим распространение плосковолнового излучения и зависимость потока энергии от поляризации в направлении осей рассматривалось в [5, 6]. Однако плосковолновое приближение, которым фактически ограничено также изучение конической рефракции второй гармоники в [7, 8], не дает значения величины амплитуды излучения при конической рефракции пучков света. В настоящей статье изучается распространение пучков монохроматического света в направлении оптических осей на основе метода, с помощью которого исследовано распространение пучков в направлениях, не совпадающих с оптическими осями [9–11], и внешняя коническая рефракция в гиротропной среде [11].

Векторная амплитуда электрической индукции узких пучков монохроматического произвольно поляризованного излучения в прозрачной анизотропной среде представляется в виде [9]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q}\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \exp i\left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{rn}}{v}\mathbf{u}\right)\mathbf{q} - \frac{\mathbf{rn}}{2v}\mathbf{q}w\mathbf{q}\right], \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{q} = [[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), \mathbf{n}], \mathbf{n}]$ характеризует отклонение волновых векторов в пучке $\mathbf{k}$ от центрального $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{n}$, $k_0 = \omega n/c$, $\mathbf{n}^2 = 1$, n — показатель преломления, $v = c/n$ — фазовая скорость, $\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — групповая скорость, $\mathbf{un} = v$ и $w = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{k}$ — градиент групповой скорости по волновому вектору, равный произведению величины групповой скорости на тензор кривизны поверхности волновых векторов при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ (для краткости это произведение будем называть кривизной). Поскольку использовано приближение

$$\mathbf{kn} = \mathbf{k}_0\mathbf{n} - \frac{\mathbf{uq}}{v} - \frac{\mathbf{q}w\mathbf{q}}{2v}, \tag{2}$$

то (1) применимо, если только градиент кривизны по волновому вектору $w' = \partial w/\partial\mathbf{k}$ удовлетворяет условию $\mathbf{rn}(\mathbf{q}w'\mathbf{qq})/6v \ll \pi$.

С помощью обратного преобразования Фурье векторная амплитуда индукции излучения (1) выражается через таковую на границе $\mathbf{rn}=0$ следующим образом:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Delta \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' G(\mathbf{R})\,\mathbf{D}(\mathbf{r}'), \tag{3}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и

$$G(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) \exp i \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{Rn}}{v} \mathbf{u} \right) \mathbf{q} - \frac{\mathbf{Rn}}{2v} \mathbf{q} w \mathbf{q} \right] \tag{4}$$

является функцией Грина уравнения, определяющего изменение амплитуды пучка излучения, причем тензор поляризации $g(\mathbf{q}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}$ — диада, образованная из единичных векторов поляризации, введенных соотношением $\mathbf{D} = D\mathbf{d}$, $|\mathbf{d}|^2 = 1$.

Векторы поляризации, как и показатели преломления, определяются волновым уравнением для плоской волны частоты ω с волновой нормалью $\mathbf{n}$. В областях прозрачности магнитного диэлектрика это уравнение для индукции можно записать в виде

$$(n^{-2} + L)\,\mathbf{D} = 0, \quad L = \mathbf{n}^{\times} \mu^{-1} \mathbf{n}^{\times} \varepsilon^{-1}, \tag{5}$$

где ε^{-1} и μ^{-1} — обратные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, $(\mathbf{n}^{\times})_{ik} = \delta_{ijk} n_j$ (δ_{ijk} — символы Леви—Чивита). В немагнитных диэлектриках $\mu_{ik} = \delta_{ik}$. Из (5) следует

$$n^{-4} + n^{-2} L_{\mathrm{I}} + L_{\mathrm{II}} = 0, \tag{6}$$

где $L_{\mathrm{I}} = \delta_{ijk} \mu^{-1}_{kl} \delta_{lmn} \varepsilon^{-1}_{ni} n_j n_m$ и $L_{\mathrm{II}} = \bar{\mu}^{-1}_{ij} n_i n_j \bar{\varepsilon}^{-1}_{kl} n_k n_l$ — инварианты тензора L, а тензор с чертой сверху означает взаимный тензор, определяемый соотношением $(\bar{\varepsilon})_{il} = \delta_{ijk} \delta_{lmn} \varepsilon_{jm} \varepsilon_{kn}$. Так как $\mathbf{nD} = 0$, то при выборе, например орта $\mathbf{e}_3$, параллельным волновой нормали, (5) сводится к двум уравнениям, которые при $n_{\pm}$, удовлетворяющих (6), определяют отношение компонент векторов $\mathbf{D}_{\pm}$. Групповая скорость и кривизна находятся из (6).

В направлении оптических осей показатели преломления обеих волн совпадают и дискриминант уравнения (6) обращается в нуль, т. е. направления осей определяются уравнением $\Delta = L_{\mathrm{I}}^2 - 4L_{\mathrm{II}} = 0$. Тогда $n_{\pm}^{-2} + L = 0$ и (4) удовлетворяется любым вектором $\mathbf{D}$, нормальным $\mathbf{n}$. Для групповой скорости и кривизны получим соотношения (в которых учтено, что $w\mathbf{n} = 0$ и $n_{\pm} = n_{\mp} = n$)

$$(\mathbf{u} - \check{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \check{\mathbf{u}}) - \breve{u} = 0, \tag{7}$$

$$(w - \check{w})\, \breve{u}^{1/2} - \breve{w} = 0, \tag{8}$$

где $\check{\mathbf{u}} = -\frac{cn}{4} L_{\mathrm{I}}'$, $\breve{u} = \left(\frac{cn}{2}\right)^2 \frac{\Delta''}{8}$, $\check{w} = \frac{cn}{2k_0} \left(-L_{\mathrm{I}}'' - \frac{2\mathbf{uu}}{c^2} \right)$ и $\breve{w} = \frac{cn}{2k_0} \frac{\Delta'''}{24} \left(\frac{\Delta''}{8} \right)^{-1/2}$ являются средней и изменяющейся в зависимости от поляризации групповой скоростью и кривизной, и штрихи обозначают дифференцирование по $\mathbf{n}$. Подставляя (7), (8) в (2), будем иметь

$$v q_{\parallel} + \check{\mathbf{u}} \mathbf{q} + \mathbf{q} \check{w} \mathbf{q} \pm [\mathbf{q} \breve{u} \mathbf{q} + (\mathbf{q} \breve{w} \mathbf{q}\mathbf{q})]\,(\mathbf{q} \breve{u} \mathbf{q})^{-1/2} = 0, \tag{9}$$

где $q_{\parallel} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\,\mathbf{n}$. Можно непосредственно убедиться, что (9) оказывается характеристическим уравнением следующего дифференциального уравнения:

$$[(\mathbf{u} - \check{\mathbf{u}})\, \nabla\, (\check{\mathbf{u}} \nabla + \check{w} \nabla\nabla) \pm (\breve{u} \nabla\nabla + \breve{w} \nabla\nabla\nabla)]\, D = 0, \tag{10}$$

где $\nabla = \partial / \partial \mathbf{r}$. Выражение (4) с учетом (7) и (8) является функцией Грина именно этого уравнения. При слабой расходимости пучка излучения, когда удовлетворяется условие $\frac{\mathbf{rn}}{2v} \mathbf{q} w \mathbf{q} \ll \pi$ и можно ограничиться плосковолновым приближением, в (10) следует полагать $w = 0$.

В моноклинном кристалле для направлений, нормальных оси симметрии или в плоскости симметрии, $n_2=0$, и направление оптических осей определяется уравнением

$$(\mu_2^{-1}\varepsilon_3^{-1}-\varepsilon_2^{-1}\mu_3^{-1})\,n_1^2+(\mu_2^{-1}\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_2^{-1}\mu_1^{-1})\,n_3^2+2\,(\mu_2^{-1}\varepsilon_0^{-1}-\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_0^{-1})\,n_1n_3=0, \qquad (11)$$

где $\varepsilon_{13}^{-1}=\varepsilon_0^{-1}$, $\mu_{13}^{-1}=\mu_0^{-1}$, причем в ромбических кристаллах $\varepsilon_0^{-1}=\mu_0^{-1}=0$, а в одноосных еще $\varepsilon_2^{-1}=\varepsilon_1^{-1}$ и $\mu_2^{-1}=\mu_1^{-1}$. В этом случае дальнейшее исследование удобно вести в системе координат, ось которой параллельна оптической оси. При переходе в эту систему диэлектрическая и аналогично магнитная восприимчивости преобразуются по формулам

$$\varepsilon_1^{-1}\leftarrow\varepsilon_1^{-1}n_3^2+\varepsilon_3^{-1}n_1^2-2\varepsilon_0^{-1}n_1n_3,$$
$$\varepsilon_3^{-1}\leftarrow\varepsilon_3^{-1}n_3^2+\varepsilon_1^{-1}n_1^2+2\varepsilon_0^{-1}n_1n_3,$$
$$\varepsilon_0^{-1}\leftarrow(\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_3^{-1})\,n_1n_3+\varepsilon_0^{-1}\,(n_3^2-n_1^2),$$

где $n_3=\cos\theta_0$, $n_1=\sin\theta_0$, определяются уравнением (11), причем θ_0 — угол между оптической и кристаллографической осью x_3. Для ромбического кристалла при $\mu=1$ и $\varepsilon_1^{-1}\leqslant\varepsilon_2^{-1}\leqslant\varepsilon_3^{-1}$, $\operatorname{tg}^2\theta_0=(\varepsilon_2^{-1}-\varepsilon_1^{-1})(\varepsilon_2^{-1}-\varepsilon_3^{-1})^{-1}$ и ε_1^{-1}, ε_3^{-1}, ε_0^{-1} соответственно равны ε_2^{-1}, $\varepsilon_3^{-1}+(\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_2^{-1})$, $-[(\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2^{-1}-\varepsilon_3^{-1})]^{1/2}$. В новой системе для оси $n^{-2}=\varepsilon_1^{-1}\mu_2^{-1}=\mu_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}$,

$$\check{\mathbf{u}}=v\mathbf{n}+v_1\mathbf{e}_1,\quad \check{\mathbf{u}}=v_1^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+v_1v_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2, \qquad (12)$$

где $2v=cn\,(\mu_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_2^{-1}\mu_1^{-1})$, $2v_1=cn\,(\mu_2^{-1}\varepsilon_0^{-1}-\varepsilon_2^{-1}\mu_0^{-1})$, $2v_2=cn\,(\mu_1^{-1}\varepsilon_0^{-1}-\varepsilon_1^{-1}\mu_0^{-1})$ и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — орты осей x_1 и x_2. Отсюда видно, что волновой нормали вдоль бинормали соответствует эллиптический конус групповых скоростей (конус лучей), ось которого направлена вдоль вектора $\check{\mathbf{u}}$. В немагнитном диэлектрике $n^{-2}=\varepsilon_1^{-1}=\varepsilon_2^{-1}$, $v=cn\varepsilon_2^{-1}=cn^{-1}$, $v_2=v_1=cn\varepsilon_0^{-1}/2$ и конус лучей оказывается круговым, одна из образующих которого совпадает с оптической осью. Здесь уместно отметить, что конус нормалей, соответствующий бирадиали, уравнение которого можно получить непосредственно [12] или из (12) с помощью принципа взаимности [13], также будет эллиптическим.

Для тензора кривизны (8) получаем выражения

$$\check{w}=\check{w}_+-c^{-2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u},\quad \check{w}=\check{w}_-v_1\mathbf{e}_1, \qquad (13)$$

где $\check{w}_\pm=\check{w}_{\pm1}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+\check{w}_{\pm2}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2$, $\check{w}_{\pm1}=cn\,(\mu_3^{-1}\varepsilon_2^{-1}\pm\mu_2^{-1}\varepsilon_3^{-1})/2k_0$, $\check{w}_{\pm2}=\dfrac{cn}{2k_0}\times$ $\times[(\mu_3^{-1}\varepsilon_1^{-1}-\mu_0^{-1}\varepsilon_0^{-1})\pm(\mu_1^{-1}\varepsilon_3^{-1}-\mu_0^{-1}\varepsilon_0^{-1})]$ и при $\mu=1$ $\check{w}_\pm=\dfrac{cn}{2k_0}(\varepsilon_2^{-1}\pm\varepsilon_3^{-1})(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)$. Как следует из (8), кривизна в направлении оптической оси имеет два значения в соответствии с двумя оболочками волновой поверхности. С помощью (12), (13) характеристическое уравнение (9) в случае оптической оси, нормальной оси x_2, в немагнитном моноклинном кристалле представляется в виде

$$k_3=k_0-\delta\,(q_1-q)-\frac{n^2}{2k_0}\left[\frac{\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_2^{-1}}{2}\,q^2-n^{-2}\delta^2\,(q_1\pm q)^2\pm\frac{\varepsilon_3^{-1}-\varepsilon_2^{-1}}{2}\,q_1q\right], \qquad (14)$$

где $\delta=\varepsilon_0^{-1}/2\varepsilon_2^{-1}=v_1/v$. От соответствующего выражения для n_z в [7] соотношение (14) отличается слагаемым $\delta^2\,(q_1\pm q)^2/2k_0$. В ромбическом кристалле, например, α-HIO_3, при $\lambda=0.533$ μ показатели преломления $n^{(1)}=1.8547$, $n^{(2)}=1.9829$, $n^{(3)}=2.0163$, с осью x_1 бинормаль составляет угол 66.49°, угол раствора конуса лучей 3.89° ($2\delta=0.068$), $(\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_2^{-1})/2=0.25086$, а $(\varepsilon_3^{-1}-\varepsilon_2^{-1})/2=-0.00344$. В одноосном кристалле $k_3=k_0-(q^2/2k_\pm)$, $k_+=\omega\varepsilon_3^{1/2}/c$, $k_-=\omega\varepsilon_2^{1/2}/e$.

Векторы поляризации волн, распространяющихся в кристалле в близких к оси направлениях, определяются, согласно (5), выражением

$$\left[\frac{2\mathbf{uq}}{cn}+(\mathbf{q}^\times\mu^{-1}\mathbf{n}^\times+\mathbf{n}^\times\mu^{-1}\mathbf{q}^\times)\,\varepsilon^{-1}\right]\mathbf{D}=0, \qquad (15)$$

из которого при $\mu=1$ следует

$$\frac{D_3}{D_1}=\mp\frac{q}{2q_3+\dfrac{\varepsilon_3^{-1}}{\varepsilon_1^{-1}}\,q_1}\approx\mp\frac{\theta}{2},\quad \frac{D_2}{D_1}=\frac{q_2}{q_1\pm q}\left(1\mp\frac{\varepsilon_3^{-1}}{\varepsilon_1^{-1}}\frac{D_3}{D_1}\right)\approx\frac{q_2}{q_1\pm q}=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2},\\[2mm] -\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}.\end{cases}$$

Отсюда для тензора поляризации получаем

$$g_\pm(\varphi) = \frac{1}{2q}\left[(q \pm q_1)\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + (q \mp q_1)\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 \pm q_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 \pm \cos\varphi\,(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) \pm \sin\varphi\,(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\right]. \qquad (16)$$

В одноосном кристалле

$$g'_\pm(2\varphi) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \cos 2\varphi\,(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) \pm \sin 2\varphi\,(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)\right]. \qquad (17)$$

Для немагнитных диэлектриков, используя (14) и (16) и ограничиваясь средним значением кривизны w_0, функция Грина (4) в цилиндрических координатах представляется в виде

$$G_\pm(R,\ \Phi) = (4\pi)^{-1}\int_0^\infty dq\,q\,\hat{G}_\pm(q,\ \Phi)\exp iR_3\left(-\delta q - \frac{w_0 q^2}{2v}\right), \qquad (18)$$

где

$$\hat{G}_\pm(q,\ \Phi) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\,g_\pm(\varphi)\exp iq\left[(R_1 - R_3\delta)\cos\varphi + R_2\sin\varphi\right] =$$
$$= J_0(qR) + iJ_1(qR)\left[2g_\pm\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) - 1\right],$$

J_0, J_1 — функции Бесселя, $g_\pm\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)$ определяется формулой (16), $R = \sqrt{(R_1 - R_3\delta)^2 + R_2^2}$, $\Phi = \operatorname{arc\,tg}[(R_1 - R_3\delta)/R_2]$. В одноосном кристалле вместо (18) будем иметь

$$G_\pm(R,\ \Phi) = (8\pi R_{0\pm})^{-1}\left(\frac{\pi R_\pm}{2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\left[I_{-1/2}(R_\mp) - I_{1/2}(R_\pm)\right] + \left[I_{1/2}(R_\pm) - I_{3/2}(R_\pm)\right]\left[2g'_\pm(\pi - 2\Phi) - 1\right]\right\}\exp - R_\pm, \qquad (19)$$

где $I_{\pm 1/2}$, $I_{3/2}$ — модифицированные функции Бесселя, $g'(\pi - 2\Phi)$ определяется формулой (17), $R_\pm = \mathbf{R}^2/8R_{0\pm}$, $R_{0\pm} = \sigma_1 + i(R_3/2k_\pm)$, σ_1 — малая положительная величина.

(Введение при интегрировании $\sigma_1 > 0$ для подавления волн с большими q несущественно, так как такими волнами в пучке в разложении (2) пренебрегаем). Для нерасходящихся пучков, когда $R_3 w_0 q^2/2v \ll \pi$ и можно вообще пренебречь кривизной, из (19) получаем

$$G_\pm(R,\ \Phi) = (4\pi)^{-1}\left(R'^2_{0\pm} + R^2\right)^{-3/2}\left\{R'_{0\pm} + iR\left[2g_\pm\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) - 1\right]\right\}, \qquad (20)$$

где $R'_{0\pm} = \sigma_2 \pm iR_3\delta$, $\sigma_2 \geqslant 0$.

Рассмотрим нормальное падение из изотропной среды на кристалл пучка эллиптически поляризованного излучения. На границе в кристалле его вектор поляризации, нормированный условием $|d'|^2 = 1$, представляется в виде $\mathbf{d}' = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, α, β — орты и величины большой и малой полуосей эллипса поляризации. При циркулярной поляризации $\beta = \alpha$, а линейной $\beta = 0$ (или $\alpha = 0$). Векторная амплитуда излучения в кристалле с помощью (18) через амплитуду на границе $D\ (r', \varphi')$, $\varphi' = \varphi - \Phi$, выразится в виде двух следующих слагаемых:

$$\mathbf{D}_\pm(r,\ \varphi) = (4\pi)^{-1}\int_0^{r_0} r'dr'\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' D(r'\varphi')\int_{-\infty}^{\infty} dq\,q\ \times$$
$$\times\left\{J_0(qR) + iJ_1(qR)\left[2g_\pm\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) - 1\right]\right\}\mathbf{d}'\exp iR_3\left(\mp\delta q - \frac{w_0}{2v}q^2\right). \qquad (21)$$

При расходящихся или распространяющихся вблизи оси пучках выражение (21), как и аналогичное выражение в случае внешней конической рефракции гауссовых пучков [11], можно проанализировать качественно или путем численных расчетов. Выражение (21) допускает дальнейшее упрощение в двух уже отмеченных случаях, анализ которых для распространяющихся вдоль оси симметричных круговых пучков (амплитуда которых не зависит от φ') представлен ниже.

Для гауссовых пучков, амплитуда которых на границе в кристалле $D(q)=D_1 \exp(-\sigma_1' q)$, каждое слагаемое векторной амплитуды индукции в одноосном кристалле, используя (19) и аналогию между (1) и (4), непосредственно представляется следующим образом:

$$\mathbf{D}_{\pm}(r, \varphi) = (4\pi\rho_{0\pm})^{-1} D_1 \exp(-\rho_{\pm}) \left\{ \exp(-\rho_{\pm}) - \frac{\operatorname{sh}(-\rho_{\pm})}{2\rho_{\pm}} - \right.$$

$$\left. - \left[\exp\left(-\rho_{\pm}\right) - \frac{\operatorname{sh}(-\rho_{\pm})}{\rho_{\pm}} \right] g'_{\pm}(\pi - \varphi) \right\} \mathbf{d}', \tag{22}$$

где $\rho_{\mp} = \mathbf{r}^2 / 8\rho_{0\pm}$, $\rho_{0\pm} = \sigma_1' + i\,(r_3/2k_{\pm})$. Следовательно, излучение разлагается на два пучка волн разной поляризации. Каждый пучок состоит из излучения неизменной поляризации и излучения, направление вектора поляризации которого зависит от направления $\mathbf{r}$ в кристалле таким же образом, как и вектор поляризации плоской волны от направления $\mathbf{k}$. Амплитуда поляризованного излучения для данного $\mathbf{r}$ пропорциональна величине косинуса угла, образуемого этим вектором с вектором поляризации излучения на границе $\mathbf{d}'$. При переходе к изотропной среде $k_+ = k_-$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D_1 \mathbf{d}' \exp(-\mathbf{r}^2/4\rho)/4\pi\rho$, $\rho = \sigma_1' + i\,(r_3/2k)$.

В двуосных кристаллах в случае направления вдоль оси нормали слаборасходящегося пучка, амплитуда которого на границе изменяется по закону $D(q)=D_2 \exp -\sigma_2' q$, и который при $\sigma_2'=0$ превращается в плоскую волну, для взаимно ортогональных составляющих векторов амплитуды индукции излучения получаем выражения

$$\mathbf{D}_{\pm}(r, \varphi) = (2\pi)^{-1} D_2 \mathbf{d}' g_{\pm}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \operatorname{Re} \frac{\rho'_{\pm} + ir}{(\rho'^2_{\pm} + r^2)^{3/2}}, \tag{23}$$

где $\rho'_{\pm} = \rho'^{*}_{\mp} = \sigma_2' \pm i r_3 \delta$, $r = \sqrt{(r_1 - r_3\delta)^2 + r_2^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,[(r_1 - r_3\delta)/r_2]$. Как видно из (23), направления $\mathrm{D}_{\pm}$ зависят от расположения образующих относительно оси контура рефракции таким образом, как направления векторов поляризации плоских волн от отклонения волновых нормалей от оптической оси. Излучение в кристалле распространяется вдоль образующих конуса лучей внутренней рефракции и быстро спадает при удалении от них. Из-за слабой расходимости разделение излучения в кристалле на два кольцевых пучка темным кольцом не проявляется, как в экспериментах с лазерными пучками [4]. Заметим, что при узких пучках излучения на оси конуса лучей отсутствует, хотя при плосковолновом рассмотрении [6] средний поток энергии в зависимости от поляризации волны может иметь любое направление внутри конуса. Вопреки плосковолновой теории [1, 2, 5, 6], слаборасходящийся линейно поляризованный пучок излучения распространяется не вдоль определенной образующей конуса лучей, а в направлении почти всех образующих конуса. Тем самым исключается возможность практического использования явления конической рефракции для сканирования излучения путем изменения направления поляризации. Поскольку векторы поляризации не сильно изменяются при дальнейшем удалении от оси, то в какой-то мере это верно и не только для слаборасходящихся пучков.

Литература

[1] R. P. Burns. Appl. Opt., *3*, 1505, 1964; *4*, 1672, 1965.
[2] A. Bramley. Appl. Phys. Lett., *5*, 210, 1964.
[3] B. Ya. Zeldovich. Appl. Opt., *4*, 1671, 1965.
[4] W. Haas, R. Johannes. Appl. Opt., *5*, 1808, 1966.
[5] D. L. Portigal, E. Burnstein. J. Opt. Soc. Am., *59*, 1567, 1969.

[6] Д. С. Базан, А. П. Хапалюк. Опт. и спектр., *40*, ~~3~~893, 1976.
[7] H. Shin, N. Blombergen. Phys. Rev., *184*, 183, 1969.
[8] А. Г. Хаткевич. IV Всесоюзн. сим. по нелинейной оптике. Киев, 25—31 октября 1968 г.
[9] А. Г. Хаткевич. Ж. прикл. спектр., *17*, 237, 1972.
[10] J. Čtyroký. Opt. Acta, *22*, 435, 1975.
[11] Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер. Изв. вузов, радиофизика, *12*, 1339, 1969; *14*, 592, 1972.
[12] А. Г. Хаткевич. Ж. прикл. спектр., *21*, 61, 1974.
[13] Ф. И. Федоров. Теория гиротропии. «Наука и техника», Минск, 1976.

Поступило в Редакцию 26 мая 1977 г.