

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА ОБЪЕМНЫХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ

О. В. Константинов, М. М. Панахов и Ю. Ф. Романов

Дана теория дифракции света на объемных решетках с гармонической модуляцией показателя преломления, основанная на методе последовательных приближений, соответствующем кинематическому приближению. Теория применима к решеткам с невысокой дифракционной эффективностью — до 30%, однако она допускает простое геометрическое истолкование и позволяет рассмотреть решетки с произвольной ориентацией слоев. Выяснено, что в одной и той же решетке с наклонными слоями формы двух брэгговских пиков существенно различаются, причем различие тем больше, чем больше угол наклона слоев к поверхности. Проведено сравнение теории возмущений с теорией связанных волн и показано, что некорректность последней проявляется в нарушении принципа взаимности. При больших углах падения или дифракции в теории связанных волн возникают большие погрешности при описании формы брэгговского пика.

Задача о распространении света в структуре с произвольным периодическим изменением показателя преломления точного аналитического решения не имеет. Построение аналитической теории дифракции света на такой структуре становится возможным, когда амплитуда модуляции диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon_0$ много меньше среднего значения диэлектрической проницаемости ϵ_0 [1-3]. Однако даже в этом случае решение получается достаточно сложным. Оно существенно упрощается для решеток со сравнительно низкой дифракционной эффективностью, когда можно использовать теорию возмущений, характерную для кинематического подхода к задачам дифракции [4]. Теория возмущений количественно применима к голографическим решеткам с эффективностью до 30%. Ее достоинство заключается в простоте решения и в удобстве описания дифракции света при различных ориентациях слоев решетки к поверхности. Теория возмущений является также надежным средством контроля любой более общей теории. Так, например, результаты теории связанных волн [1] для решеток с наклонными слоями не переходят в результаты теории возмущений при удалении от резонанса, что свидетельствует о некорректности теории связанных волн.

1. Теория возмущений

Рассмотрим отражение света от реальной голографической решетки, представляющей собой стеклянную пластинку и слой желатины, в котором создана гармоническая модуляция диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(x, y) = \epsilon_0 - \Delta\epsilon(x, y), \quad (1)$$

где

$$\Delta\epsilon(x, y) = 2\Delta\epsilon_0 \cos(\mathbf{Q}\mathbf{r}) \Pi(x, T). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — вектор обратной решетки, $\Pi(x, T)$ — ступенчатая функция, равная единице в слое желатины ($0 \leq x \leq T$) и нулю вне его. Схематическое изображение решетки падающей и отраженных волн приведено

на рис. 1. Вектор Q лежит в плоскости падения света, так что $Q_z=0$. Из рис. 1 ясно, что задача об отражении света распадается на три этапа: прохождение световой волны через плоскую границу раздела воздух—стекло (однородный диэлектрик), дифракционное отражение прошедшего света от слоистой среды, выход дифрагированного света из однородного диэлектрика в воздух. Первый и третий

этапы легко решаются с помощью формул Френеля для однородного диэлектрика. Поэтому нас будет интересовать лишь второй этап задачи. При этом можно пренебречь разностью средних показателей преломления однородной и модулированной сред — стекла и желатины. Иными словами, задача сво-

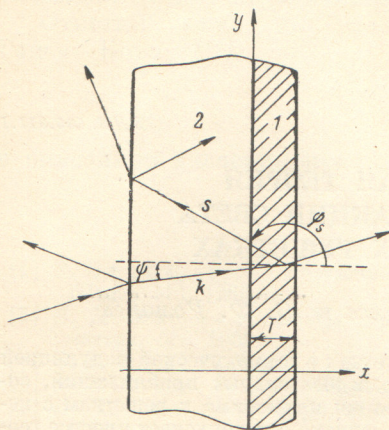


Рис. 1. Схематическое изображение объемной фазовой решетки (1), стеклянной пластины (2) и распространяющихся волн.

k — вектор падающей волны в среде, s — вектор дифрагированной волны. Все углы отсчитываются от оси x и изменяются в пределах от $-\pi$ до π .

дится к определению коэффициента дифракционного отражения от «пущей» решетки.

Выпишем уравнения Максвелла для двух поляризаций световой волны.

а. ТЕ-поляризация, $E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$,

$$\nabla^2 E_z(x, y) + (k^2 + iak) E_z(x, y) = k_0^2 \Delta \varepsilon(x, y) E_z(x, y), \quad (3)$$

где

$$k_0 = \omega/c, \quad k^2 = k_0^2 \varepsilon_0'; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0' + i\varepsilon_0'', \quad (3a)$$

причем $k_0 \varepsilon_0'' (\varepsilon_0')^{-1/2} = \alpha$; α — коэффициент поглощения света в среде.

б. ТМ-поляризация, $H_x = H_y = 0$, $H_z \neq 0$,

$$\nabla^2 H_z(x, y) + (k^2 + iak) H_z(x, y) = ik_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [E_x(x, y) \Delta \varepsilon(x, y)] - \frac{\partial}{\partial x} [E_y(x, y) \Delta \varepsilon(x, y)] \right\}. \quad (4)$$

Представим электромагнитное поле E , H в виде двух слагаемых

$$E(x, y) = E_0(x, y) + E_1(x, y); \quad H(x, y) = H_0(x, y) + H_1(x, y). \quad (5)$$

Первое слагаемое

$$E_0(x, y) = E_0 e^{ikr}; \quad H_0(x, y) = H_0 e^{ikr}, \quad (6)$$

в котором

$$k_y = k \sin \psi; \quad k_x = \sqrt{k^2 \cos^2 \psi + iak} \simeq k \cos \psi + \frac{ia}{2 \cos \psi}, \quad (7)$$

описывает поле волны, падающей под углом ψ из однородного диэлектрика на решетку. Компонента k_y волнового вектора предполагается вещественной. Компонента k_x имеет положительную мнимую часть, связанную, согласно (7), со средним коэффициентом поглощения света в материале решетки. Слагаемое E_0 , H_0 является главным в теории возмущений. Второе слагаемое E_1 , H_1 считается малым; при его определении из уравнений (3) или (4) в правой части уравнений следует сохранить лишь E_0 . Зависимости E_1 и H_1 от координаты определяются произведением функций $\exp(ik_y y)$ и $\cos(Qr)$. Следовательно, поле E_1 будет иметь вид

$$E_1(x, y) = E_-(x, y) + E_+(x, y), \quad (8)$$

где

$$E_{\pm}(x, y) = E_{\pm}(x) e^{i(k_y \pm Q)y}. \quad (9)$$

Аналогичный вид имеет и поле H_1 .

В указанном приближении для случая ТЕ-поляризации падающего света можно получить из уравнения (3) обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие $E_+(x)$ и $E_-(x)$,

$$\frac{d^2 E_{\pm}(x)}{dx^2} + q_{\pm}^2 E_{\pm}(x) = A \Pi(x, T) e^{i\sigma_{\pm} x}, \quad (10)$$

где

$$A = k_0^2 E_0 \Delta \varepsilon_0; \quad \sigma_{\pm} = k \pm Q; \quad (11)$$

$$q_{\pm}^2 = k^2 - \sigma_{\pm}^2 + iak = k^2 - (k_y \pm Q_y)^2 + iak. \quad (12)$$

Во избежание громоздкости формул будем проводить дальнейший анализ для одной из волн, а именно для волны E_- , соответствующей (—1)

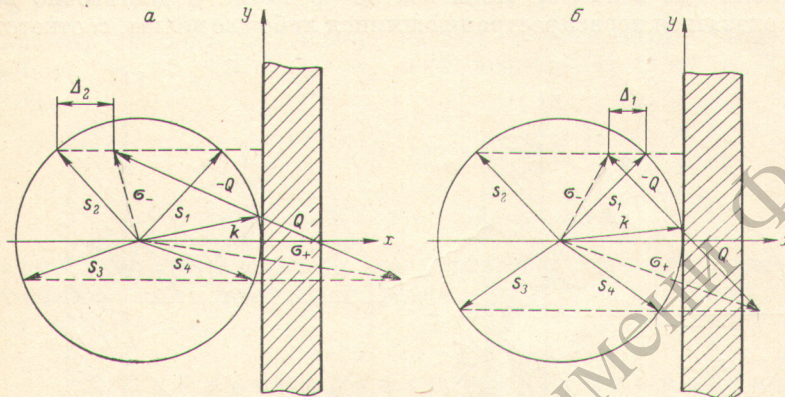


Рис. 2. Векторная интерпретация четырех дифрагированных волн в случае отражающей (а) и пропускающей (б) решеток.

порядку дифракции, имея в виду, что результаты для волны E_+ могут быть легко получены при замене $-Q$ на $+Q$. Уравнение (10) имеет следующее решение:

$$E_-(x) = \frac{A}{2iq} \int_0^T e^{iq|x-x'|} e^{i\sigma_- x'} dx', \quad (13)$$

где $\sigma = \sigma_-$, $q = q_-$ (по определению мнимая и вещественная части величины q являются положительными). Решение (13) представляет собой расходящуюся волну, порожденную источником, который описывается правой частью уравнения (10). В области $x > T$ эта волна пропорциональна $\exp(iqx)$ и распространяется в сторону положительных значений x , а в области $x < 0$ она пропорциональна $\exp(-iqx)$ и распространяется в сторону отрицательных значений x . Удобно ввести волновой вектор s рассеянной волны

$$s = e_x q \operatorname{sign} s_x + e_y \sigma_y, \quad (14)$$

где e_x и e_y — орты осей x и y , $\operatorname{sign} s_x$ — знаковая функция, равная $+1$ для волны, рассеянной вперед, и -1 — для волны, рассеянной назад. Если ввести угол дифракции ψ_s , то

$$s_y = k \sin \psi_s; \quad s_x \simeq k \cos \psi_s + \frac{ia}{2 \cos \psi_s}. \quad (14a)$$

Интегрируя (13), получаем единую формулу для амплитуд этих волн

$$E_-(x, y) = \frac{A}{2iq} e^{isr} \chi(\Delta); \quad \chi(\Delta) = \frac{e^{iT\Delta} - 1}{i\Delta}; \quad \Delta = \sigma_x - s_x. \quad (15)$$

Если учесть, что существуют еще две аналогичные волны (+1) порядка, то в итоге результирующее волновое поле будет содержать совокупность четырех дифрагированных волн. На этот факт было указано в работе [4].

Геометрическое расположение волновых векторов падающей волны k и четырех дифрагированных волн s_j иллюстрируется на рис. 2. Отметим, что на рисунке изображены вещественные части этих векторов. Амплитуда любой дифрагированной волны характеризуется резонансной функцией χ , аргумент которой Δ можно назвать расстройкой брэгговского резонанса. В общем случае эта расстройка может быть малой только для одной из волн, для которой выполняется условие Брэгга, соответствующее $\Delta=0$. Так, на рис. 2, а показана отражательная решетка, у которой возможен резонанс для волны s_2 , а на рис. 2, б — пропускающая решетка с резонансом для волны s_1 . Если вектор решетки Q достаточно велик, то могут оказаться нераспространяющимися либо две волны, соответствующие

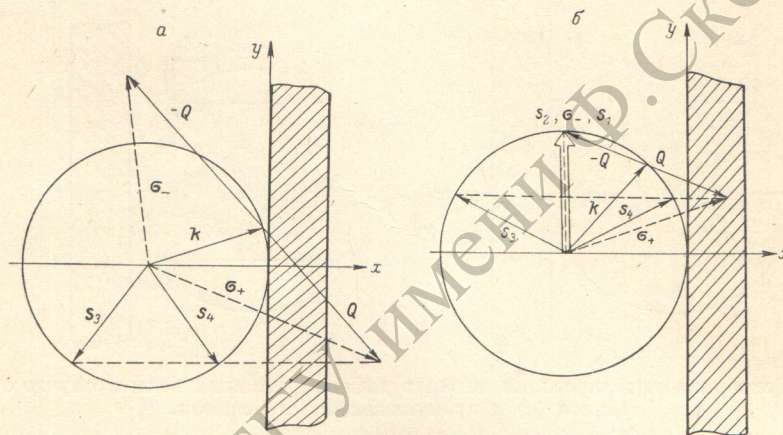


Рис. 3. Иллюстрация исчезновения волн (-1) порядка.

а — концы векторов s_1 и s_2 выходят за пределы окружности, б — вектор σ_- параллелен поверхности решетки, его конец находится на окружности.

щие одному и тому же порядку дифракции, либо все четыре волны одновременно. Первый вариант иллюстрируется на рис. 3, а, из которого видно, что концы векторов s_1 и s_2 не могут лежать на окружности (сфере Эвальда). В этом случае при $\alpha=0$ величина q оказывается чисто мнимой, а волны превращаются в поверхностные. Границу такого режима определяет условие «полного внутреннего дифракционного отражения», при котором векторы s_1 и s_2 совмещаются в положении, параллельном поверхности решетки (рис. 3, б).

Волновой вектор s рассеянной волны и расстройка Δ , определяющая ее амплитуду, содержат два параметра решетки, Q_x и Q_y . Вместо них целесообразно ввести два других параметра, которые легко находятся экспериментально, а именно брэгговский угол падения света на решетку φ и соответствующий ему угол дифракции φ_s . При выполнении брэгговского условия вектор $\sigma_{\pm} = k \mp Q$ совпадает с вектором $s_{\pm}$, поэтому

$$k \cos \varphi_s = k \cos \varphi \mp Q_x; \quad k \sin \varphi_s = k \sin \varphi \mp Q_y. \quad (16)$$

Отсюда для порядка дифракции (-1) получаем

$$\frac{Q_x}{k} = \cos \varphi - \cos \varphi_s; \quad \frac{Q_y}{k} = \sin \varphi - \sin \varphi_s. \quad (17)$$

Если бы для нахождения Q_x и Q_y мы использовали углы φ' и φ'_s , соответствующие (+1) порядку дифракции, то

$$\frac{Q_x}{k} = \cos \varphi'_s - \cos \varphi'; \quad \frac{Q_y}{k} = \sin \varphi'_s - \sin \varphi'. \quad (17a)$$

Напомним, что величина Q_x считается положительной.

Получим теперь формулы, определяющие направления распространения дифрагированных волн. Составляющая волнового вектора s_y , касательная к границе решетки, равна $k_y - Q_y$ для (-1) порядка дифракции. Используя (17), получаем

$$\sin \psi_s = \sin \psi - (\sin \varphi - \sin \varphi_s). \quad (18)$$

Эта формула дает синус угла дифракции. При определении угла ψ_s по его синусу нужно учитывать, что для проходящей волны $|\psi_s| < \pi/2$, а для отраженной волны $|\psi_s| > \pi/2$. Таким образом, формула (18) описывает направления векторов s_1 и s_2 , указанных на рис. 2. Для векторов s_3 и s_4 , соответствующих $(+1)$ порядку дифракции, имеем: $s'_y = k'_y + Q_y$. Используя (17а), можно убедиться, что угол дифракции ψ'_s по-прежнему будет определяться формулой (18), однако в ней следует заменить φ на φ' и φ_s на φ'_s .

Параметр расстройки Δ можно связать с введенными выше углами. Вспомогательная, что $\Delta = k_x \mp Q_x - s_x$ и используя (7), (14а), (17) и (17а), получаем

$$\frac{\Delta}{k} = \beta(\psi) + \frac{ia}{2k} \left(\frac{1}{\cos \psi} - \frac{1}{\cos \psi_s} \right), \quad (19)$$

где

$$\beta(\psi) = \cos \psi - \cos \psi_s - (\cos \varphi - \cos \varphi_s). \quad (20)$$

Формула (20) справедлива для обоих порядков дифракции аналогично (18). Вещественная часть расстройки равна нулю при выполнении условия Брэгга, когда $\psi = \varphi$, $\psi_s = \varphi_s$.

2. Дифракционная эффективность

Энергетический коэффициент отражения света «пустой» фазовой решеткой или ее дифракционная эффективность η^0 определяется, согласно [1], следующим образом:

$$|E_s|^2 |\cos \psi_s| = \eta^0 |E_0|^2 |\cos \psi|. \quad (21)$$

Здесь E_s — комплексная амплитуда одной из дифрагированных волн, E_0 — амплитуда волны, падающей на решетку под углом ψ . Физический смысл величины η^0 нетрудно понять, если обе части (21) умножить на $c\sqrt{\epsilon_0}L/8\pi$, где c — скорость света в вакууме, L — высота решетки. Обратимся к рис. 4. Величина $c\sqrt{\epsilon_0}|E_0|^2L\cos\psi/8\pi$ представляет поток энергии, падающий

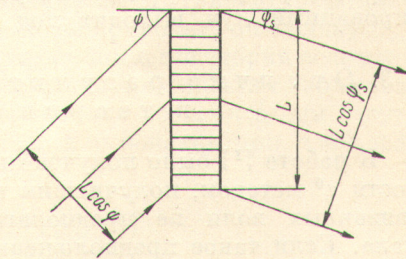


Рис. 4. К определению понятия дифракционной эффективности «пустой» решетки.

на решетку, а величина $c\sqrt{\epsilon_0}|E_s|^2L\cos\psi_s/8\pi$ — поток энергии, уносимый дифрагированной волной.

Дифракционная эффективность пустой решетки для ТЕ-поляризации получается при подстановке в (21) амплитуды E_s , согласно (15),

$$\eta^0 = \left(\frac{kT}{2} \frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{|\cos \psi \cos \psi_s|} F(\xi); \quad \xi = \frac{kT}{2} \beta, \quad (22)$$

где

$$F(\xi) = \frac{e^{-(\alpha_k + \alpha_s)} \sin^2 \xi + \frac{1}{4} (e^{-\alpha_k} - e^{-\alpha_s})^2}{\xi^2 + \frac{1}{4} (\alpha_k - \alpha_s)^2} \quad (23)$$

причем

$$\alpha_k = \frac{\alpha T}{2 \cos \psi}; \quad \alpha_s = \frac{\alpha T}{2 \cos \psi_s}. \quad (24)$$

Безразмерная расстройка β дается формулой (20). Когда поглощением света можно пренебречь, функция $F(\xi)$ превращается в $\sin^2 \xi / \xi^2$.

Фактическая дифракционная эффективность η структуры, изображенной на рис. 1, может быть связана с эффективностью η^0 «пустой» решетки. Эта связь совершенно очевидна тогда, когда по тем или иным причинам можно пренебречь переотражением света от границы воздух—диэлектрик

$$\eta = t(\psi) \eta^0 t(\psi_s), \quad (25)$$

где t — энергетический коэффициент прохождения света через границу воздух—диэлектрик, вычисляемый по формулам Френеля. Если же эффекты переотражения существенны, то задача усложняется, хотя в принципе она может быть решена, например, методом многолучевой интерференции [5].

Выражение (23) содержит член $\sin^2 \xi$, поэтому дифракционная эффективность имеет минимальное значение при $\xi = m\pi$, где m — целое число, не равное нулю. Минимумы, ближайшие к брэгговскому максимуму, получаются при $m = \pm 1$. Соответствующие углы падения находятся из уравнения $\beta = \pm 2\pi/kT$. Для объемных решеток, как правило, выполняется условие $kT \gg 2\pi$. В связи с этим углы падения для минимумов можно приближенно найти, разлагая $\beta(\psi)$ в ряд вблизи $\psi = \varphi$, что справедливо при любых углах дифракции, за исключением $\varphi_s = (\pi/2) - 0$ (π/kT). Указанным способом можно получить угловое расстояние между первыми минимумами

$$\delta\psi = \frac{4\pi}{kT} \left| \frac{\cos \varphi_s}{\sin(\varphi_s - \varphi)} \right|. \quad (26)$$

При выводе этой формулы считалось, что угол падения ψ падающего луча близок к брэгговскому углу φ . Однако любая решетка характеризуется двумя брэгговскими углами, φ и φ' , причем для пропускающей решетки $\varphi = \varphi_s$. Если луч падает под углом, близким к φ_s , то угловая ширина пика может быть получена из (26) путем замены $\varphi \rightleftharpoons \varphi_s$. У наклонной решетки $|\cos \varphi| \neq |\cos \varphi_s|$, поэтому угловые ширины ее брэгговских пиков будут разными. Более узкий пик получается тогда, когда дифрагированный луч выходит под большим углом к нормали ($\varphi_s \rightarrow \pi/2$).

3. Отличие результатов теории возмущений и теории связанных волн

В работе [1] было получено выражение для дифракционной эффективности η^0 методом, получившим название теории связанных волн. Теория связанных волн не предполагает, что дифракционная эффективность мала. Если такое предположение сделать, то формула для η^0 , полученная в [1], должна переходить в формулу (22), выведенную выше с помощью теории возмущений. Факт совпадения результатов может служить критерием корректности теории связанных волн, которая сама по себе не имеет строгого математического обоснования.

Если сделать приближение малой эффективности в общей формуле работы [1], то получится выражение, которое внешне аналогично формуле (22). Отличие, однако, состоит в том, что функция F зависит не от аргумента ξ , определенного формулами (22) и (20), а от другого аргумента ξ

$$\xi = \frac{T}{2} \frac{\sigma^2 - s^2}{2\sigma_x} = \frac{T}{2} (\sigma_x - s_x) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s_x}{\sigma_x} \right). \quad (27)$$

Таким образом

$$\xi = \xi f; \quad f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s_x}{\sigma_x} \right). \quad (27a)$$

Множитель f учитывает отличие аргументов ξ и ξ . В точке брэгговского резонанса $s_x = \sigma_x$ и $f=1$. Отличие f от единицы увеличивается по мере отхода от резонанса, однако оно остается малым, за исключением случаев скользящего падения, когда $\psi \simeq \pi/2$, а также большого угла дифракции. В этих случаях положения минимумов дифракционной эффективности, найденные согласно теории связанных волн, будут определены с большой погрешностью. Пусть $\varphi_s = (\pi/2) - \gamma$, причем $\gamma \ll 1$. Будем считать, что второй брэгговский угол мал, т. е. $\varphi \ll 1$. Тогда, используя формулы (17) и (18), получим

$$f = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(\varphi - \psi)}{\gamma^2}} \right). \quad (27\text{б})$$

Отсюда видно, что дополнительный множитель f при большом угле дифракции может оказаться существенно отличным от единицы.

Обратим внимание на обстоятельство, благодаря которому даже малое отличие f от единицы приобретает принципиальный характер. Это обстоятельство заключается в нарушении свойства взаимности, которое при- сущее результату теории связанных волн. Электродинамическая теорема взаимности [6] в применении к фазовым решеткам требует, чтобы при замене волновых векторов падающего и дифрагированного лучей и одновременной замене Q на $-Q$ дифракционная эффективность не изменялась. Нетрудно убедиться, что выражение (22) обладает указанным свойством. Если же вместо аргумента ξ ввести ξ , то принцип взаимности нарушается. Действительно, при замене в соответствии с принципом взаимности аргумент ξ просто изменяет знак, что не сказывается на дифракционной эффективности, тогда как аргумент ξ изменяет свою абсолютную величину. Множитель f вместо значения

$$f_{\text{туда}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s_x}{k_x - Q_x} \right) \text{ будет } f_{\text{обр.}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_x}{s_x + Q_x} \right). \quad (27\text{в})$$

Весьма наглядной иллюстрацией того, к чему приводит нарушение принципа взаимности, может служить следующий пример. Пусть минимум η^0 соответствует углу падения φ , вблизи брэгговского угла φ . При этом по формуле (18) можно рассчитать угол дифракции ψ_{s1} . Если теперь падающий луч направить под углом ψ_{s1} , то, согласно принципу взаимности, должен наблюдаться минимум дифракционной эффективности. Однако к указанному факту теория связанных волн не приводит, поскольку $f_{\text{туда}}$ не равно $f_{\text{обр.}}$. В заключение оценим пределы применимости теории возмущений. Как было отмечено выше, некорректности в теории связанных волн возникают лишь при отходе от резонанса, но в точке резонанса они отсутствуют. Дифракционная эффективность η_{max}^0 в резонансе при $\alpha=0$, согласно [1], равна

$$\eta_{\text{max}}^0 = \sin^2 \left(\frac{kT}{2} \frac{\Delta \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \psi \cos \psi_s}} \right). \quad (28)$$

В случае, когда толщина решетки мала, синус можно заменить его аргументом. При этом (28) переходит в (22) при $\xi=0$ и $\alpha=0$. Если дифракционная эффективность в соответствии с (28) равна 30%, то теория возмущений приведет к 34%, т. е. погрешность теории возмущений будет еще сравнительно невелика.

Литература

- [1] Н. Когельник. Bell. Syst. Tech. J., 48, 2909, 1969.
- [2] А. А. Лещев, В. Г. Сидорович. Опт. и спектр., 44, 302, 1978.
- [3] О. В. Константинов, М. М. Панахов, Ю. Ф. Романов. Опт. и спектр., 44, 1016, 1978.
- [4] В. В. Аристов, В. Ш. Шехтман. Усп. физ. наук, 104, 51, 1971.
- [5] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1970.
- [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.

Поступило в Редакцию 11 июля 1978 г.