УДК 539.3

М. В. Москалева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Статья посвящена определению напряженно-деформированного состояния ортотропного тела при контактном взаимодействии. Разработан алгоритм расчета напряжений в упругом ортотропном теле. На основе разработанного алгоритма была создана программа в среде Delphi для подсчета напряжений, а также изменений деформаций и перемещений в ортотропном теле.

Введение. В последнее время все шире используются композитные материалы в элементах деталей машин, в машиностроении и других отраслях техники. Для широкого внедрения этих материалов необходимо создавать теорию расчета напряженного состояния элементов машин, которая базируется на компьютерном моделировании с использованием вычислительных алгоритмов и компьютерных программ. Некоторые разработки представлены в работах [1–3]. На основании этих работ представим реализацию алгоритма определения напряженного состояния в ортотропном теле.

Основные результаты. Используя математическую теорию упругости анизотропной среды, с применением концепции макромеханики разработаны математические методы расчета напряженно-деформированного состояния ортотропных тел из композитов, сводящиеся к решению плоских модельных задач о действии распределенной нагрузки на границе [1]. Исследуем изменение напряженно-деформированного состояния в ортотропной полуплоскости при действии произвольно распределенного нормального (касательного) давления $P(x)$ на границе согласно работам [1–3].

Допустим, что нормальное давление $P(x)$, приложенное к поверхности ортотропного тела (композит, армированный волокнами, которые ориентированы с основными направлениями анизотропии материала), не изменяется по направлению OZ. Здесь рассматриваем случай плоского напряженного состояния.

Для определения напряжений в упругом ортотропном теле поверхность контакта разделяем на полосы ΔS, на которые действует среднее давление P. Можно получить распределение давления в зоне контакта как аналитически, численно, так и экспериментально. Если используем зависимости, определяющие напряжения при действии сосредоточенных усилий $P(s)ds$, тогда напряжения в произвольной точке $N(x, y)$ будут

$$\sigma_x = \frac{y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\beta_1^2 (x-s)^2 + y^2} - \frac{1}{\beta_2^2 (x-s)^2 + y^2} \right) P(s)ds,$$

$$\sigma_y = \frac{-y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}} \right) P(s)ds, \qquad (1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \int_{x_1}^{x_2} (x-s) \left(\frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}} - \frac{1}{(x-s)^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}} \right) P(s)ds,$$

где $\beta_i = \dfrac{1}{\gamma_i}$, $\beta_1^2\beta_2^2 = \dfrac{S_{11}}{S_{22}}$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \dfrac{2S_{12}+S_{66}}{S_{22}}$, $\gamma_i, i=1,2$ – действительные корни характеристического уравнения:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66}+2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66}+2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}},$$

входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1-\upsilon_{31}\upsilon_{13}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1-\upsilon_{32}\upsilon_{23}}{E_2}; \quad S_{12} = \frac{-\upsilon_{12}-\upsilon_{13}\upsilon_{31}}{E_1}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\upsilon_{j3} = \upsilon_{3j} = 0$, $j=1,2$; $E_x = E_1$, $E_y = E_2$; $\upsilon_{xy} = \upsilon_{12}$; E_j, G_{12}, υ – технические постоянные материала.

Применяя физические соотношения для плоского ортотропного композита в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy}, ε_x, ε_y, γ_{xy} – компоненты тензора напряжений и деформаций.

Рассмотрим дискретную аппроксимацию распределенного давления на границе путем разбиения на n участков (граничные элементы). Давление на каждом граничном элементе можно принимать постоянным или изменяющимся по параболе. Для определения напряжений в упругом ортотропном теле поверхность контакта разделяется на полосы, в которых действует среднее давление p. Используя зависимости, определяющие напряжения при действии сосредоточенных усилий $P(s)ds$ (см. [1, 2]), напряжения в произвольной точке определяются по формулам (1). Здесь $[x_1, x_2]$ – область изменения давления; $x_1 \le s \le x_2$, s – координата вдоль оси x относительно начала координат.

Приняв, что на каждом отрезке $s_i - l \le s_i \le s_i + l$ давление можно описать параболическим распределением

$$P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2, t = x - s. \tag{2}$$

Неизвестные коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются для каждого интервала i по трем точкам $s_i - l, s_i, s_i + l$:

$$c_i = \frac{P(s_i - l) + P(s_i + l) - 2P(s_i)}{2l^2},$$

$$b_i = \frac{P(s_i + l) - P(s_i - l)}{2l} - 2c_i s_i,$$

$$a_i = P(s_i) - b_i s_i - c_i s_i^2.$$

Подставив функцию, определяющую давление (2), в формулу (1), получим

$$(\sigma_x)_i = \frac{y}{\pi(\beta_1-\beta_2)}\int\limits_{A_i}^{B_i}\left(\frac{1}{\beta_1^2 t^2+y^2}-\frac{1}{\beta_2^2 t^2+y^2}\right)\left(a_i+b_i t+c_i t^2\right)dt,$$

$$(\sigma_y)_i = \frac{-y}{\pi(\beta_1-\beta_2)}\int\limits_{A_i}^{B_i}\left(\frac{1}{t^2+\dfrac{y^2}{\beta_1^2}}-\frac{1}{t^2+\dfrac{y^2}{\beta_2^2}}\right)\left(a_i+b_i t+c_i t^2\right)dt,$$

$$(\tau_{xy})_i = \frac{-1}{\pi(\beta_1-\beta_2)}\int\limits_{A_i}^{B_i}t\left(\frac{1}{t^2+\dfrac{y^2}{\beta_1^2}}-\frac{1}{t^2+\dfrac{y^2}{\beta_2^2}}\right)\left(a_i+b_i t+c_i t^2\right)dt,$$

$A_i = x-(s_i-l),\ B = x-(s_i+l),\ l -$ полуширина зоны контакта.

Проинтегрировав на отрезках $[x-(s_i-l),\ x-(s_i+l)]$, получим

$$(\sigma_x)_i = -\frac{1}{\pi}\left[a_i L_{0i}+b_i y L_{1i}+c_i y^2 L_{2i}\right],$$
$$(\sigma_y)_i = -\frac{1}{\pi}\left[a_i L_{3i}+b_i y L_{4i}+c_i y^2 L_{5i}\right],$$
$$(\tau_{yx})_i = -\frac{1}{\pi}\left[a_i L_{6i}+b_i y L_{7i}+c_i y^2 L_{8i}\right].$$

Суммарное напряжение, действующее в теле, будет определяться по формулам суммирования на каждом граничном участке:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_x)_i;\quad \sigma_y = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_y)_i;\quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(\tau_{xy})_i.$$

Коэффициенты $L_{ji},\ j=\overline{1,8},\ i=\overline{1,n}$ соответственно будут иметь вид:

$$L_{0i} = \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\left(-\frac{1}{\beta_1}\left(arctg\frac{B_i\beta_1}{y}-arctg\frac{A_i\beta_1}{y}\right)+\frac{1}{\beta_2}\left(arctg\frac{B_i\beta_2}{y}-arctg\frac{A_i\beta_2}{y}\right)\right),$$

$$L_{1i} = \frac{1}{2(\beta_1-\beta_2)}\left(-\frac{1}{\beta_1^2}\left(\ln(B_i^2+\frac{y^2}{\beta_1^2})-\ln(A_i^2+\frac{y^2}{\beta_1^2})\right)+\frac{1}{\beta_2^2}\left(\ln(B_i^2+\frac{y^2}{\beta_2^2})-\ln(A_i^2+\frac{y^2}{\beta_2^2})\right)\right),$$

$$L_{2i} = \left(\frac{1}{y(\beta_1-\beta_2)}\right)\left(-\frac{1}{\beta_1^2}(B_i-A_i)+\frac{1}{\beta_2^2}(B_i-A_i)\right)+$$
$$+\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\left(\frac{1}{\beta_1^3}\left(arctg\frac{B_i\beta_1}{y}-arctg\frac{A_i\beta_1}{y}\right)-\frac{1}{\beta_2^3}\left(arctg\frac{B_i\beta_2}{y}-arctg\frac{A_i\beta_2}{y}\right)\right),$$

$$L_{3i} = \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\left(\left(arctg\frac{B_i\beta_1}{y}-arctg\frac{A_i\beta_1}{y}\right)-\left(arctg\frac{B_i\beta_2}{y}-arctg\frac{A_i\beta_2}{y}\right)\right),$$

$$L_{4i} = \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)}\left(\left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2})\right) - \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2})\right)\right),$$

$$L_{5i} = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)}\left(-\frac{1}{\beta_1}\left(arctg\frac{B_i\beta_1}{y} - arctg\frac{A_i\beta_1}{y}\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(arctg\frac{B_i\beta_2}{y} - arctg\frac{A_i\beta_2}{y}\right)\right),$$

$$L_{6i} = \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)}\left(\left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2})\right) - \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2})\right)\right),$$

$$L_{7i} = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)}\left(-\frac{1}{\beta_1}\left(arctg\frac{B_i\beta_1}{y} - arctg\frac{A_i\beta_1}{y}\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(arctg\frac{B_i\beta_2}{y} - arctg\frac{A_i\beta_2}{y}\right)\right),$$

$$L_{8i} = \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)}\left(-\left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2})\right) + \left(\ln(B_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2}) - \ln(A_i^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2})\right)\right).$$

Затем используя физические соотношения между напряжениями и деформациями, определяем изменение деформаций и перемещений в ортотропном теле.

Выводы. По предлагаемым аналитическим зависимостям создан алгоритм и программа с целью реализации расчетов напряжений для различных материалов с целью дальнейшего применения при расчетах и конструировании элементов зубчатых передач из волокнистых композитов.

Литература

1 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 290 с.

2 Pleskachevsky, Yu. M. Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu. M. Pleskachevsky, V. V. Mozharovsky, Yu. F. Rouba // Computational methods in contact mechanics III: proc. int. conf., Madrid, July 3–5, 1997. – Madrid, 1997. – P. 363–372.

3 Можаровский, В. В. Математическое моделирование разрушения композитов при ударном нагружении / В. В. Можаровский, Ю. М. Плескачевкий, Ю. Ф. Роуба // Материалы, технологии, инструменты. – 1998. – № 1. – С. 83–89.

УДК 004.4'2:004.774:070:94

Д. А. Панов

РАЗРАБОТКА САЙТА «ИСТОРИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ PHP

Разработан и опубликован в сети Интернет-сайт «Исторический журнал» с использованием современных средств разработки интернет-приложений, таких как скриптовый язык PHP, язык гипертекстовой разметки HTML5, каскадные таблицы стилей CSS3, системы управления базами данных MySQL, cPanel, phpMyAdmin. На сайте предусмотрена возможность регистрации и авторизации пользователей, а также разграничение прав доступа к публикуемой информации.

Современный интернет стал неотделимой частью всех возможных сфер деятельности человечества, являясь необходимой частью практически любого профессионального