

# ЛЕКЦИЯ 5

## **Динамика механических систем и законы сохранения**

1 Работа и мощность силы.

2 Кинетическая энергия частицы и закон ее изменения.

Консервативные силы.

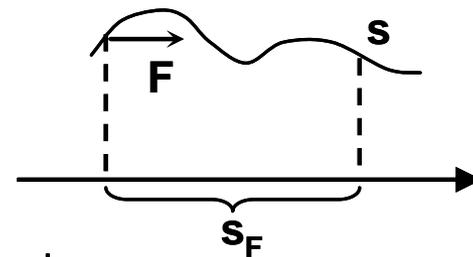
3 Закон сохранения механической энергии системы.

# Работа.

**работа** – это скалярная величина, равная скалярному произведению проекции силы на направление перемещения и пути, пройденного точкой приложения силы:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2.$$

$$A = \vec{f} \cdot \vec{r}$$

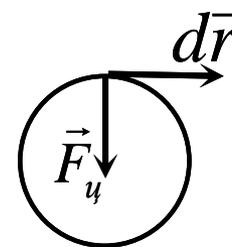
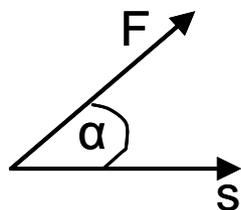


$A = f_s \cdot s = f \cdot s \cdot \cos \alpha$ , если  $\alpha = \text{const}$ , то и  $f_s = \text{const}$

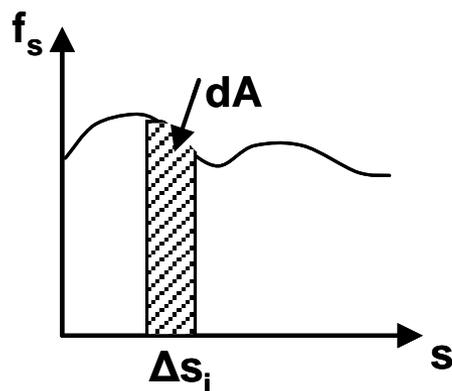
$\alpha$  – острый, то  $\cos \alpha > 0$ , следовательно  $A > 0$ .

$\alpha$  – тупой,  $\cos \alpha < 0$  и работа  $A < 0$

$\alpha = \pi/2$ ,  $\cos \alpha = 0$ , и работа  $A = 0$



$$f_s \neq \text{Const}$$



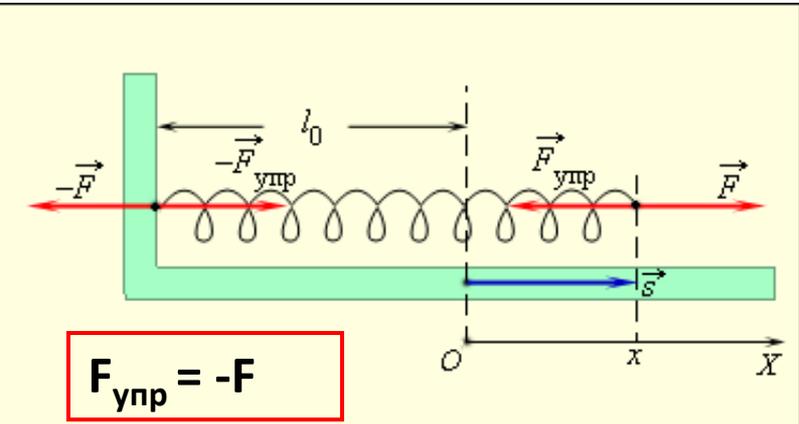
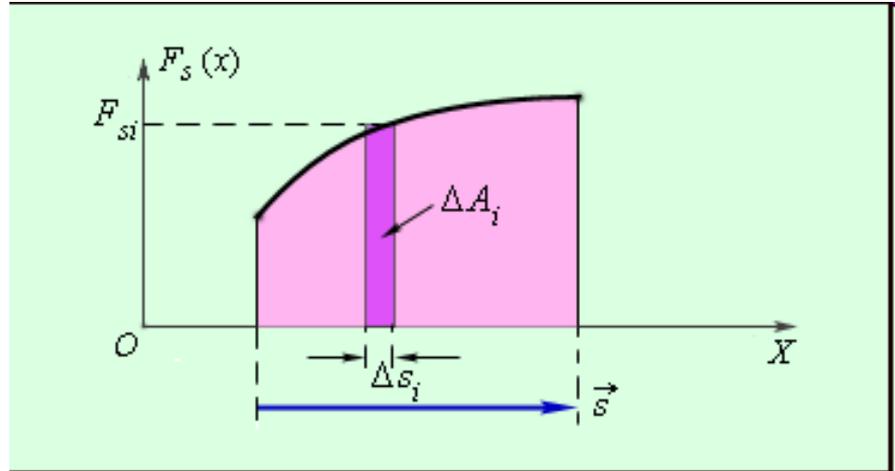
$$dA = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum f_{s_i} \Delta s_i$$



$$A = \int_s f_s \cdot ds$$

Графически работа определяется по площади криволинейной фигуры под графиком  $F_s(x)$

$$\Delta A_i = F_{si} \Delta s_i$$

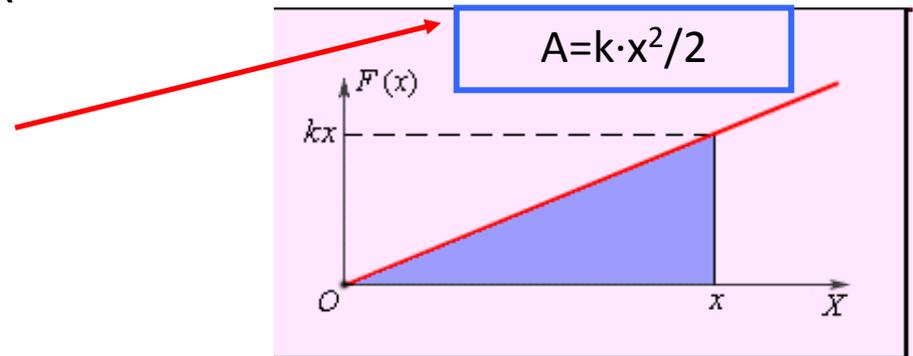


$$F_{\text{упр}} = -F$$

Растянутая пружина. Направление внешней силы совпадает с направлением перемещения  $k$  – жесткость пружины.

$$F_s = kx$$

Этой же формулой выражается работа, совершенная внешней силой при сжатии пружины. В обоих случаях работа упругой силы равна по модулю работе внешней силы и противоположна ей по знаку.



Зависимость модуля внешней силы от координаты при растяжении пружины

# Единицы измерения работы

За единицу работы принимают работу  $A$ , совершаемую силой  $F$  в 1Н, на пути  $S$ , равном 1м

$$1 \text{ Джоуль} = 1 \text{ Ньютон} * 1 \text{ метр}$$

$$1 \text{ кДж} = 1000 \text{ Дж} \quad 1 \text{ Дж} = 0,001 \text{ кДж}$$

$$1 \text{ МДж} = 1000000 \text{ Дж}$$

# Мощность.

**мощность** – величина, показывающая какая работа совершается в единицу времени и равная

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$1\text{Дж}/1\text{сек}=\mathbf{1\text{Вт}}.$$

# Мощность

Мощность  $N$  – это работа... за  $t = 1\text{c}$

$$N = A/t$$

$$N = \vec{F} * \vec{V}$$

# Единицы измерения мощности

За единицу мощности принимают работу  $A$  в 1 Джоуль, совершаемую за 1 секунду.

$$1 \text{ Ватт} = \frac{1 \text{ Джоуль}}{1 \text{ секунда}}$$

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$$

$$1 \text{ кВт} = 1000 \text{ Вт}$$
$$1 \text{ МВт} = 1000000 \text{ Вт}$$

# Потенциальное поле сил.

потенциальные - силы зависят только от положения тела в пространстве

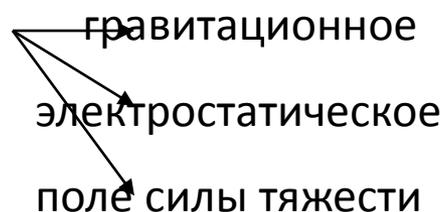
Силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве называются консервативными

Силы, работа которых **зависит** от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются неконсервативными.

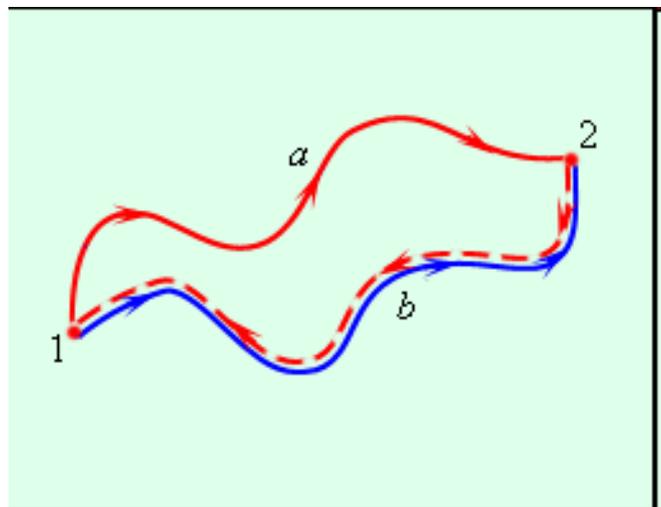
Консервативными системами называются такие системы, в которых действие внешних сил не приводит к переходу одного вида энергии в другой.

Диссипативными называются системы, в которых действие внешних сил приводит к переходу одного вида энергии в другой.

Потенциальное поле



Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна **нулю**.



Работа сил трения

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot \Delta t = -F \cdot v \cdot \Delta t$$



**A < 0**

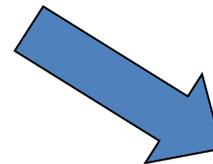
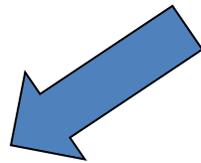
**неконсервативная сила**

# Энергия-

$E$  [Дж] скалярная физическая величина,  
характеризующая способность тела  
совершать работу.

Так как в механике изучается движение тел и их взаимодействие, то

## МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ



**КИНЕТИЧЕСКАЯ**  
энергия движения

**ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ**  
энергия взаимодействия

$$E_k$$

$$E_n$$

**СУЩЕСТВУЕТ ДВА ВИДА МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ: КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ, КОТОРЫЕ МОГУТ ПРЕВРАЩАТЬСЯ ДРУГ В ДРУГА.**

**Потенциальная энергия – это энергия которой обладают предметы в состоянии покоя.**

**Кинетическая энергия – это энергия тела приобретенная при движении.**

# Кинетическая энергия

- $E_k$  [Дж] энергия, которой обладает тело вследствие своего движения (характеризует движущееся тело).
- В выбранной системе отсчета:
  - если тело не двигается ( $v = 0$ ), то  $E_k = 0$
  - если тело двигается, то  $E_k > 0$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

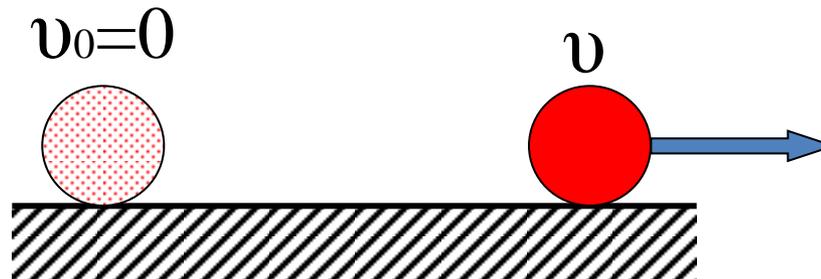
# Кинетическая энергия

Определим кинетическую энергию тела,  
движущегося со скоростью  $v$

Так как энергия – это работа, которую совершает тело при переходе из  
данного состояния в нулевое.

Следовательно,

это работа, которую нужно совершить, чтобы  
перевести тело из нулевого состояния ( $v_0=0$ ) в  
данное ( $v \neq 0$ ).

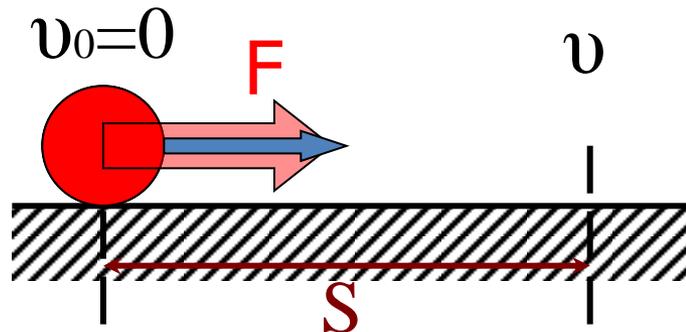


## Определим эту работу:

Чтобы тело изменило скорость к нему необходимо приложить силу  $F$ , при этом оно начнет двигаться равноускоренно, и пройдя путь  $S$ , приобретет скорость  $v$ .

При этом сила  $F$  совершит работу:

$$A = F \cdot S$$



Преобразуем это выражение:

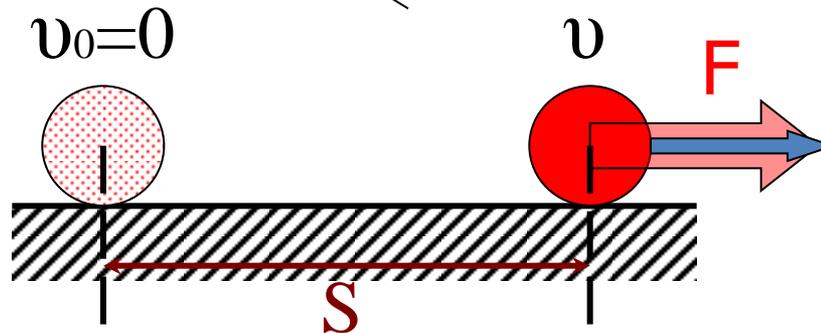
Согласно II закону Ньютона:  $F = ma$

Путь при равноускоренном  
движении:  $S = \frac{at^2}{2}$

$$A = ma \cdot \frac{at^2}{2} = m \cdot \frac{a^2 t^2}{2}$$

Так как ускорение при равноускоренном движении  
 $a = \frac{v}{t}$ , подставим вместо ускорения его значение

$$A = m \cdot \frac{v^2 \cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{mv^2}{2}$$



Преобразуем это выражение:

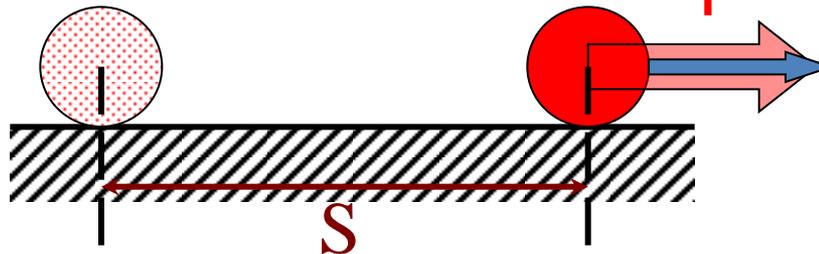
Согласно II закону Ньютона:  $F = ma$

Путь при равноускоренном  
движении:  $S = \frac{at^2}{2}$

$$A = ma \cdot \frac{at^2}{2} = m \cdot \frac{a^2 t^2}{2}$$

Так как ускорение при равноускоренном движении  
 $a = \frac{v}{t}$ , подставим вместо ускорения его значение

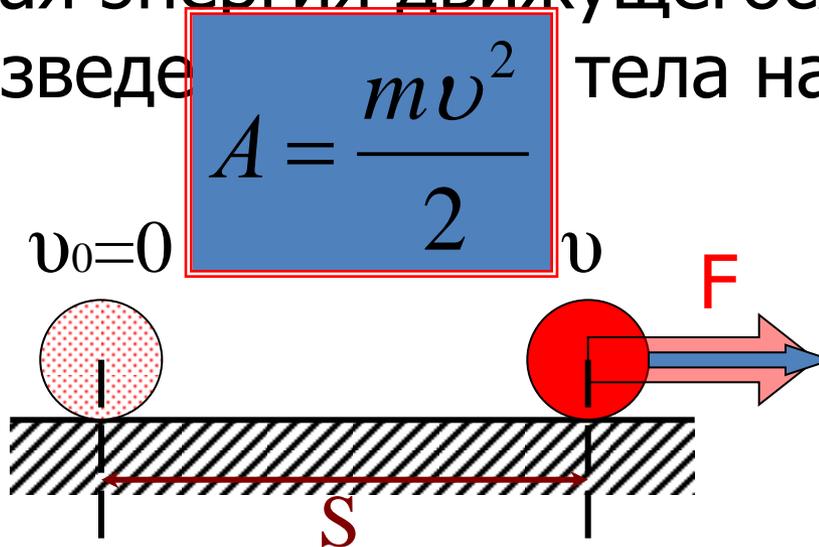
$$A = \boxed{A = \frac{mv^2}{2}} = \frac{mv^2}{2}$$



Энергия - это работа, которую нужно совершить, чтобы перевести тело из нулевого состояния ( $v_0=0$ ) в данное ( $v \neq 0$ ).

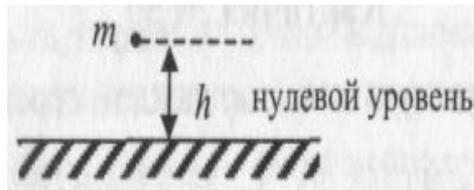
$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия движущегося тела равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.



# Потенциальная энергия поднятого над Землей тела

$E_p = mgh$  энергия взаимодействия тела с Землей. Потенциальная энергия является относительной величиной, т. к. зависит от выбора нулевого уровня (где  $E_n=0$ ).

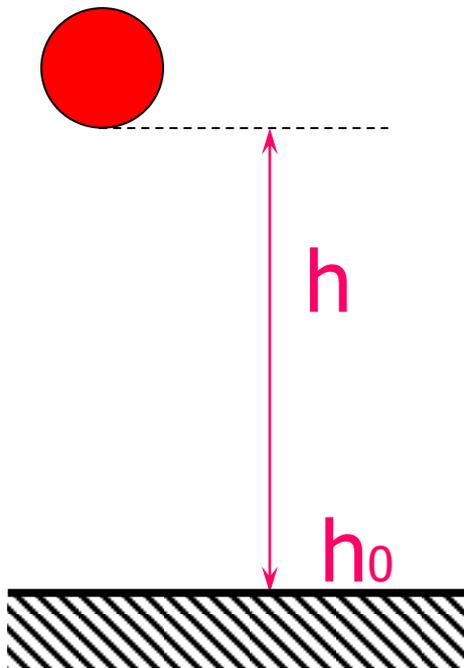


# Потенциальная энергия

Определим потенциальную энергию взаимодействия тела с Землей на высоте  $h$ .

Выберем уровень Земли за нулевой  $h_0$ .

Нулевой уровень энергии – уровень, на котором энергия считается равной нулю.

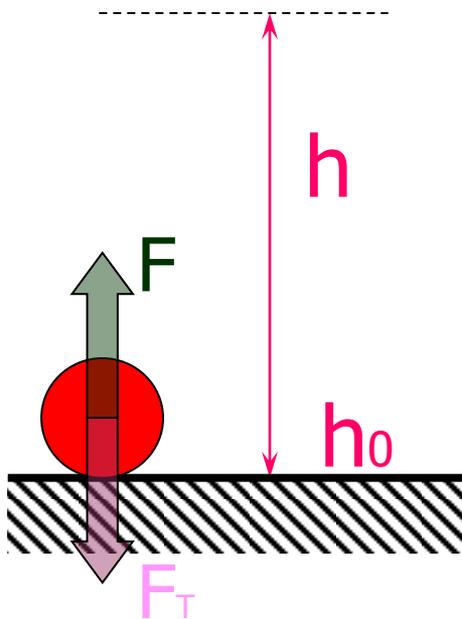


Энергия - это работа которую, нужно совершить, чтобы перевести тело из нулевого состояния ( $h_0=0$ ) в данное ( $h$ ).

Для равномерного подъема тела на высоту  $h$  к нему необходимо приложить силу  $F$ , равную силе тяжести  $F_T$

$$F = F_m$$

Под действием силы  $F$  тело начнет двигаться вверх, и пройдет путь  $h$ .

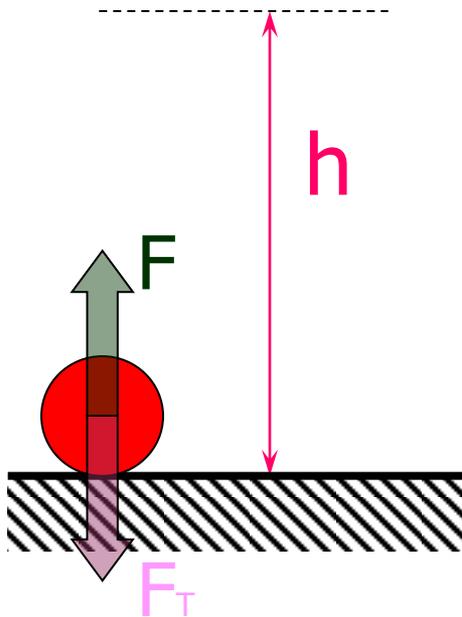


Энергия - это работа, которую нужно совершить, чтобы перевести тело из нулевого состояния ( $h_0=0$ ) в данное ( $h$ ).

Для равномерного подъема тела на высоту  $h$  к нему необходимо приложить силу  $F$ , равную силе тяжести  $F_T$

$$F = F_m$$

Под действием силы  $F$  тело начнет двигаться вверх, и пройдет путь  $h$ .



Энергия - это работа, которую нужно совершить, чтобы перевести тело из нулевого состояния ( $h_0=0$ ) в данное ( $h$ ).

Определим работу силы  $F$ :

$$A = F \cdot S$$

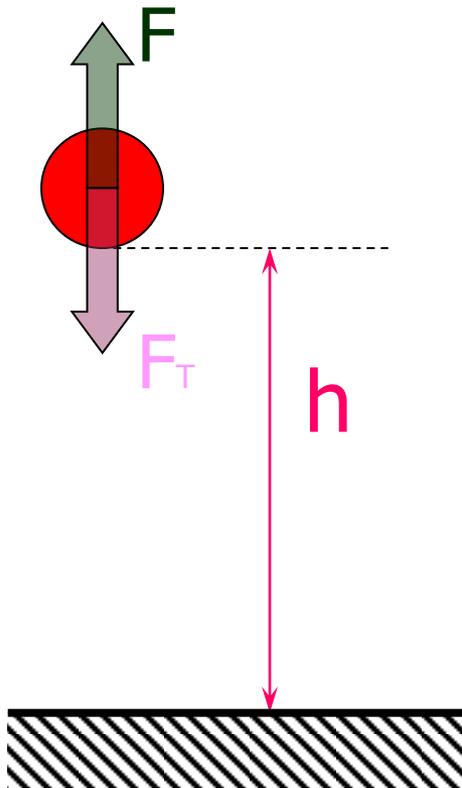
Так как  $F = F_m = mg$ , а путь

$$S = h$$

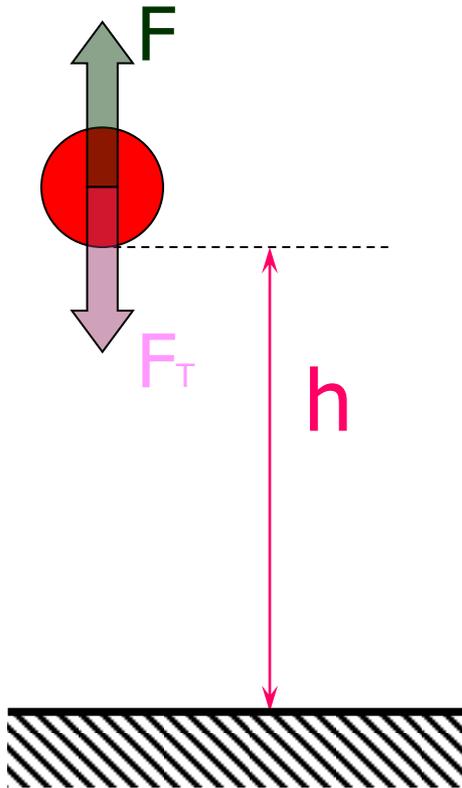
Тогда работа  $A = mg \cdot h$

Отсюда потенциальная энергия:

$$E_n = mgh$$



Энергия - это работа, которую нужно совершить, чтобы перевести тело из нулевого состояния ( $h_0=0$ ) в данное ( $h$ ).

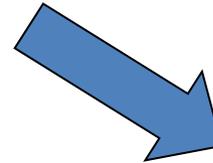
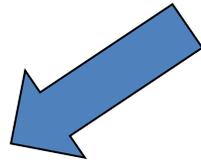


Потенциальная энергия взаимодействия тела с Землей равна произведению массы тела, ускорения свободного падения и высоты, на которой оно находится.

$$E_n = mgh$$

Итак:

# МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ



КИНЕТИЧЕСКАЯ  
энергия движения

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ  
энергия взаимодействия

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_n = mgh$$

$$[E] = [A] = 1 \text{ Дж}$$

# Превращение потенциальной энергии в кинетическую.

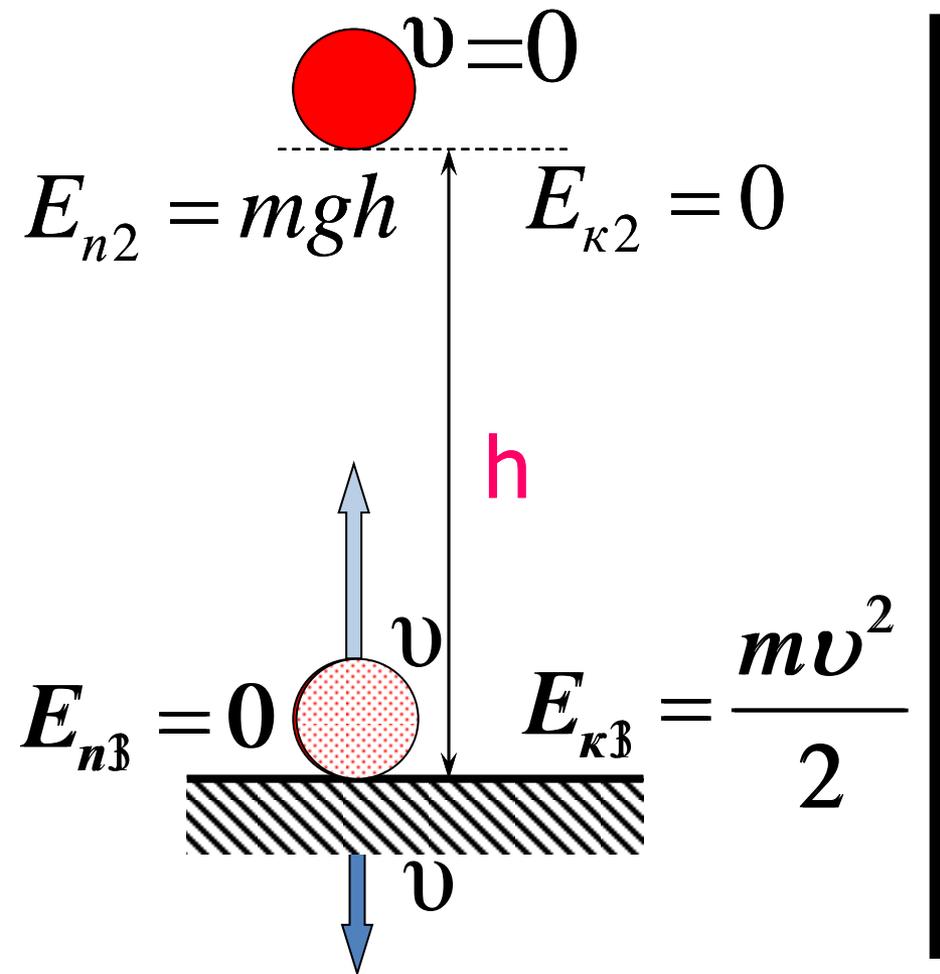
ПОДБРАСЫВАЯ ВВЕРХ МЯЧ, МЫ СООБЩАЕМ ЕМУ ЭНЕРГИЮ ДВИЖЕНИЯ – КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ.



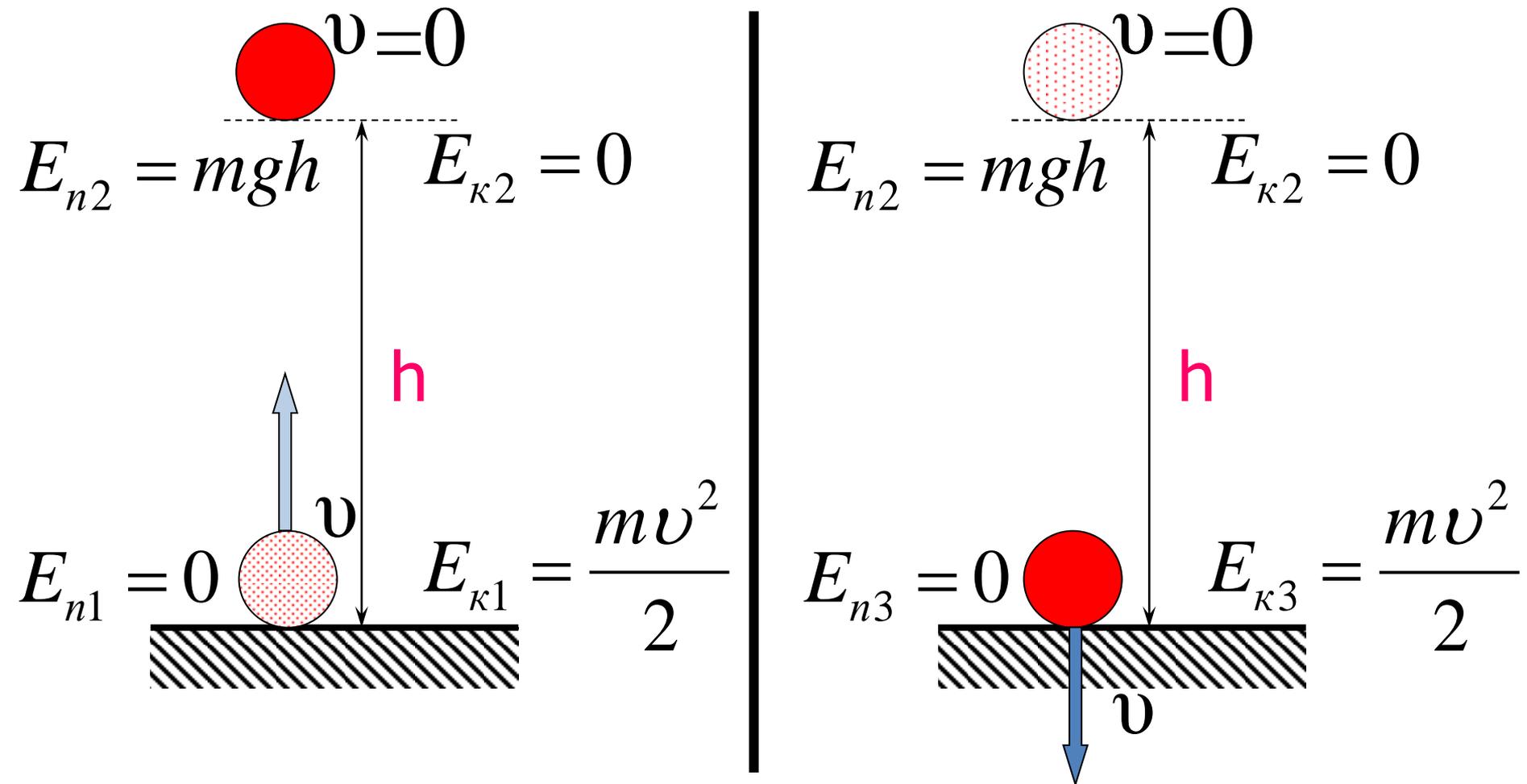
ПОДНЯВШИСЬ, МЯЧ ОСТАНАВЛИВАЕТСЯ, А ЗАТЕМ НАЧИНАЕТ ПАДАТЬ. В МОМЕНТ ОСТАНОВКИ (В ВЕРХНЕЙ ТОЧКЕ) ВСЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПОЛНОСТЬЮ ПРЕВРАЩАЕТСЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ.

ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ВНИЗ ПРОИСХОДИТ ОБРАТНЫЙ ПРОЦЕСС.

Итак, при возрастании кинетической энергии тела потенциальная энергия взаимодействия уменьшается.



И наоборот, при уменьшении кинетической энергии тела потенциальная энергия взаимодействия увеличивается.



Рассмотрим систему тел, между которыми действуют только консервативные силы . Изменение энергии тела происходит:

1) за счет внутренних сил равна изменению потенциальной энергии тела

$$\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2}$$

2) За счет внешних сил, работа которых равна  $A$

Полная работа равна изменению кинетической энергии тела:

$$E_{p_1} - E_{p_2} + A = E_{k_2} - E_{k_1}$$

$$(E_{p_2} + E_{k_2}) - (E_{p_1} + E_{k_1}) = A$$

$$E_{\text{полн}2} - E_{\text{полн}1} = A$$

# Потенциальное поле сил.

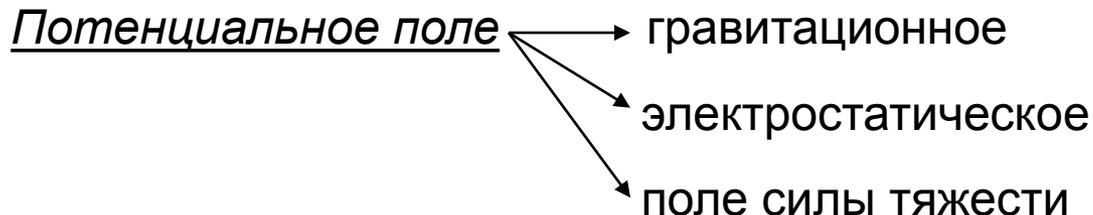
потенциальные - силы зависят только от положения тела в пространстве

Силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве называются консервативными

Силы, работа которых *зависит* от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, называются неконсервативными.

Консервативными системами называются такие системы, в которых действие внешних сил не приводит к переходу одного вида энергии в другой.

Диссипативными называются системы, в которых действие внешних сил приводит к переходу одного вида энергии в другой.



$$E_{\text{полн}2} - E_{\text{полн}1} = A$$

Приращение полной энергии системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, равно работе внешних сил, приложенных к телам системы.

Если система замкнута, то  $A=0$ , тогда  $\Delta E_{\text{полн}}=0$ ,

$$E_{\text{полн}} = \text{const}$$

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной

Неконсервативные силы рассматриваются как внешние (трение)

### Общий закон

В замкнутой системе, изолированной от внешних воздействий, остается постоянной сумма всех видов энергии

# Энергия.

## кинетическая энергия

движение тела

$$\Delta s = V_{\text{cp}} \cdot \Delta t = [(V_1 + V_2)/2] \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = 2\Delta s / (V_1 + V_2).$$

$$F \cdot \Delta t = mV_2 - mV_1 = m(V_2 - V_1)$$

$$F \cdot 2\Delta s = m(V_2 - V_1) \cdot (V_2 + V_1) = m(V_2^2 - V_1^2)$$

$$F \cdot \Delta s = mV_2^2/2 - mV_1^2/2, \text{ причем}$$

$$F \cdot \Delta s = A$$

$$E_{\text{кин}} > 0 \quad (V^2 > 0 \quad m > 0)$$

$$E_{\text{кин}} = mV^2/2 + \text{const}$$

$$V=0 \quad E_{\text{кин}} = 0 \quad \longrightarrow \text{const} = 0$$

## потенциальная энергия

нахождением тела в потенциальном поле сил

$$A = \Delta E_p = m \cdot g (h_1 - h_2)$$

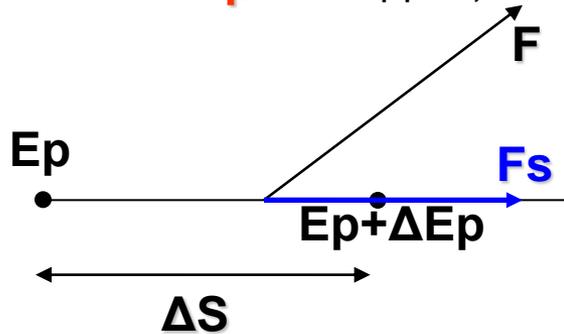
$$E_p = m \cdot g h + \text{const}$$

$$E_p > 0 \quad E_p < 0$$

$$E_{\text{полн}} = mV^2/2 + mgh = E_{\text{кин}} + E_p$$

## Связь между потенциальной энергией и силой

Каждой точке потенциального поля соответствует с с одной стороны некоторое значение вектора силы  $\mathbf{F}$ , действующей на тело, с другой стороны – некоторое значение  $E_p$ . Найдем, есть ли связь между этими величинами.



$$dA = \vec{F}_s \cdot dS = -dE_p$$

Т.к. работа совершается за счет потенциальной энергии  $E_p$ , она равна убыли  $E_p$ .

$$F_s = -\frac{dE_p}{dS}$$

$$F_s = -\frac{\partial E_p}{\partial S}$$

-это частная производная, т.к. энергия может меняться и вдоль других направлений.

## Условия равновесия механической системы

В замкнутой системе полная энергия остается постоянной, поэтому кинетическая энергия  $E_k$  может возрасти только за счет уменьшения потенциальной энергии  $E_p$ .

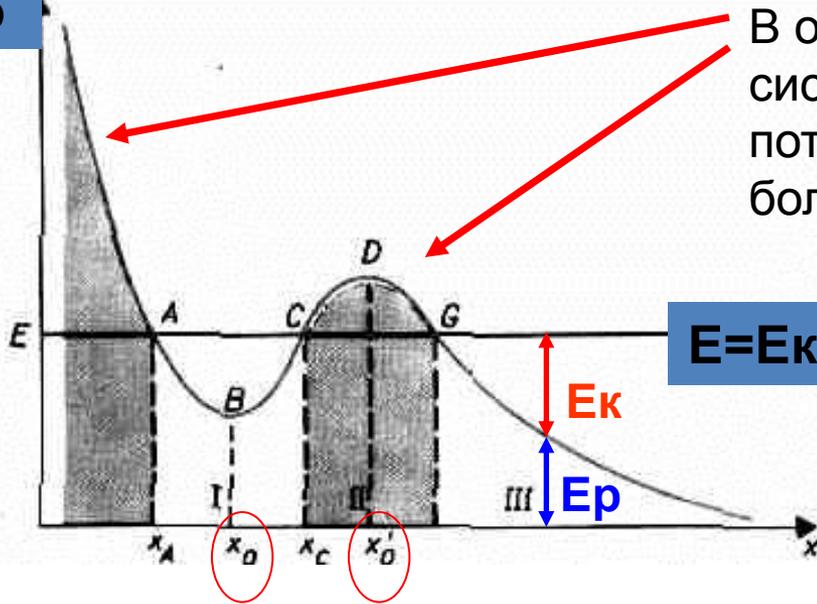
Если система находится в таком состоянии, что скорость всех тел равна нулю, а  $E_p$  имеет минимальное значение, то без воздействия извне тела системы не могут придти в движение, т.е. система будет находиться в равновесии

Т.о. для замкнутой системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует минимуму потенциальной энергии.

Условие минимума  $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$   $\longrightarrow$   $F_x = 0$

Т.е. силы, действующие на тело равны нулю

$E_p$



В области заштрихованные серым система проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может быть больше полной энергии системы.

иначе  $E_k$  будет меньше нуля, что невозможно

$E = E_k + E_p$

$x_0$  – точка устойчивого равновесия. Здесь потенциальная энергия частицы минимальна.

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \longrightarrow F_x = 0$$

При смещении частицы из положения  $x_0$  (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы

Точка  $x_0'$  соответствует положению неустойчивого равновесия, так как при смещении частицы из положения  $x_0'$  появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.