ЛЕКЦИЯ 8

Колебания

1Уравнение свободных колебаний под действием квазиупругой силы.
2 Гармонический осциллятор.
3 Энергия гармонического осциллятора.
4 Сложение гармонических колебаний.

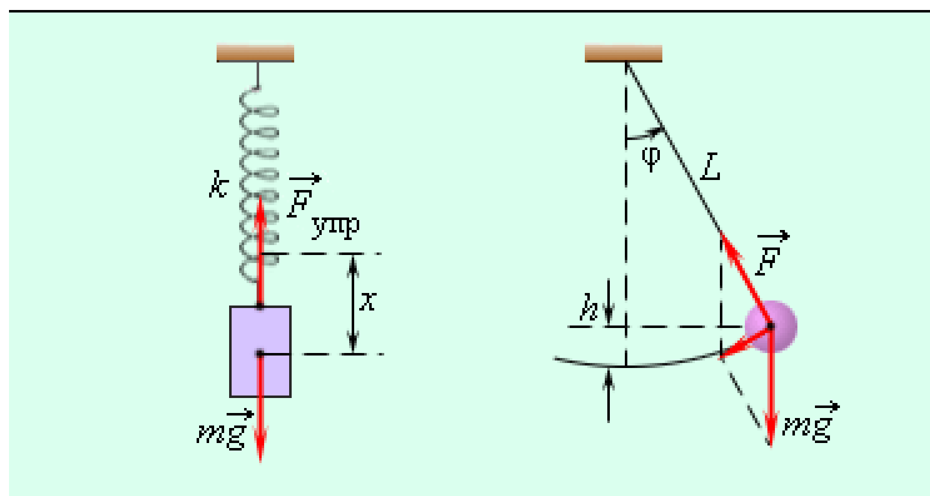
Колебания

- **Периодическая величина**: функция f(t) есть периодическая функция (величина) с периодом T если

$$f(t)=f(t+T)$$

- **Колебаниями** называются процессы, при которых какая-либо величина (физическая, географическая или любая другая) многократно принимает через равные последовательные промежутки времени одни и те же значения (или приблизительно одни и те же).

Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник



Свободные, собственные и вынужденные колебания

- Если система каким-либо образом выведена из равновесия и затем предоставлена самой себе (источник устранен), то в ней происходят колебания, которые называются свободными. Например, маятник или боксерская груша, выведенная из положения равновесия однократным ударом.
- Если свободные колебания происходят без потерь энергии, то они называются собственными, то есть, это- частный случай свободных колебаний

- Если система колеблется под воздействием ***периодически*** *изменяющейся внешней силы*, то такие колебания называются вынужденными. Например, мост под воздействием периодически повторяющейся внешней силы (проход строевым шагом колонны солдат).

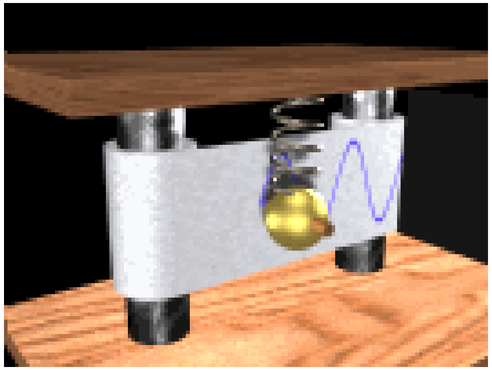
Гармонические колебания

Во многих случаях разнообразные периодические процессы могут быть представлены как суперпозиция гармонических колебаний. Гармоническими называются колебания с постоянной амплитудой *A*, происходящие **по закону синуса или косинуса**, то есть когда изменение физической величины *x(t)* выражается формулой:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

ω— круговая или циклическая частота колебаний.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



Квазиупругие силы

- Силы любого происхождения, **пропорциональные величине отклонения** системы от положения равновесия и направленные к положению равновесия называются **квазиупругими** силами. Колебания под действием квазиупругих сил будут гармоническими.
- Т.е принципиальное отличие квазиупругих ($-F=kx$) от постоянных (не зависящих от расстояния и направления перемещения) сил в том, что **воздействие постоянной силы приводит лишь к смещению положения равновесия,** ничего не меняя в характере самого движения.

Амплитуда, фаза, начальная фаза

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **Частота** ν — число колебаний в единицу времени, T — период колебаний, то есть время, через которое значения колеблющейся величины начинают повторяться.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Если период равен 1 с, то частота равна 1Гц

- **Фазой** колебаний называется величина $(\omega t + \varphi_0)$

φ_0— начальная фаза колебаний, то есть фаза при $t = 0$. Фаза характеризует отклонение величины x от нулевого значения в данный момент времени и определяется с точность до произвольного слагаемого кратного 2π

- **Амплитуда** – максимальное отклонение от положения равновесия

Период и частота колебаний

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **Период колебаний** T, - время, за которое фаза увеличивается 2π, то есть, значения колеблющейся величины начинают повторяться.

- **Частота** ν - число колебаний в единицу времени (за 1 секунду),

$$\nu = \frac{1}{T}$$

- **Круговая (циклическая) частота** $\boldsymbol{\omega}$ - число колебаний за 2π секунд,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Гармонический осциллятор

• Тело массы m, колеблющееся горизонтально под действием силы упругости пружины $F=-kx$ (k — коэффициент упругости, x — смещение тела относительно положения равновесия, знак “минус” означает, что упругая сила направлена противоположно направлению смещения x) согласно 2-му закону Ньютона запишем:

$$ma = -kx \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx$$

Обозначим:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ **уравнение гармонического осциллятора**

Решением является:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

• Частота ω_0 называется **собственной частотой** данного гармонического осциллятора.

Скорость и ускорение в гармоническом колебательном движении точки определяются соответствующими производными по времени:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

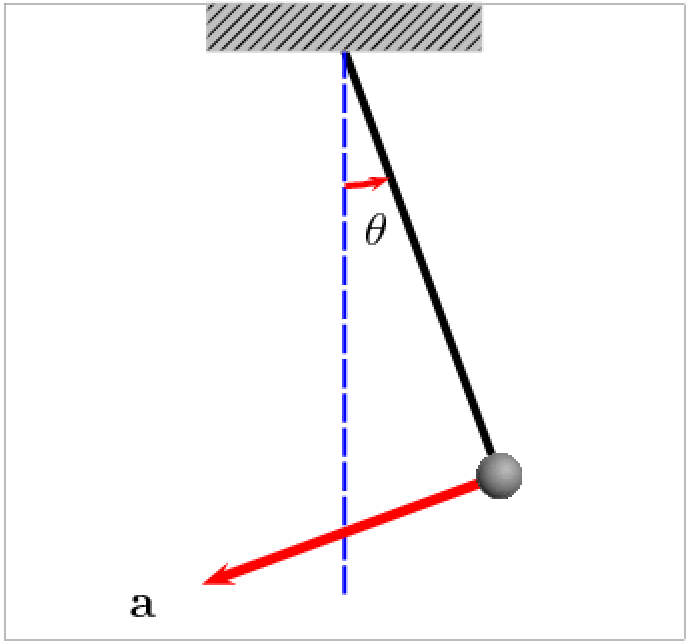
$$v_x = \dot{x} = -\omega A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = \omega A\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 x = \omega^2 A\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \pi\right)$$

- **Скорость изменяется по гармоническому закону**, но **ее амплитуда больше амплитуды x в ω раз и опережает x на π/2**

-Ускорение изменяется по гармоническому закону, но **его амплитуда больше в ω^2 раз и опережает x на π**

-(т.е. в противофазе с x)

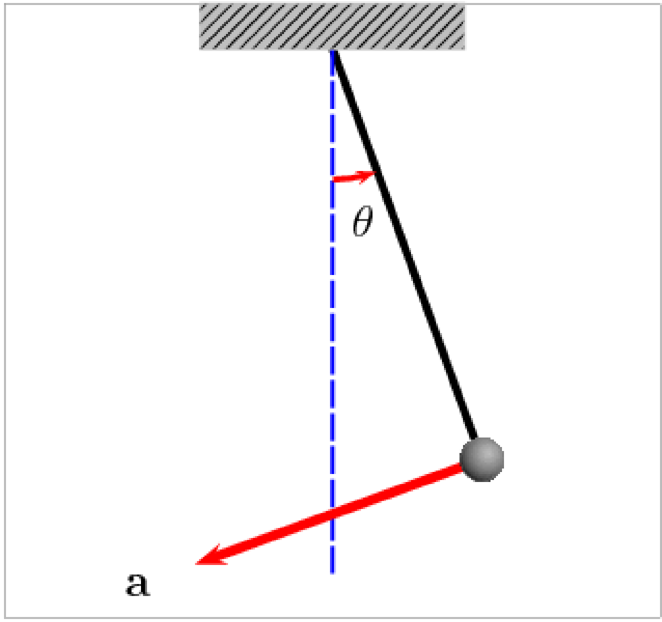


Способы представления гармонических колебаний

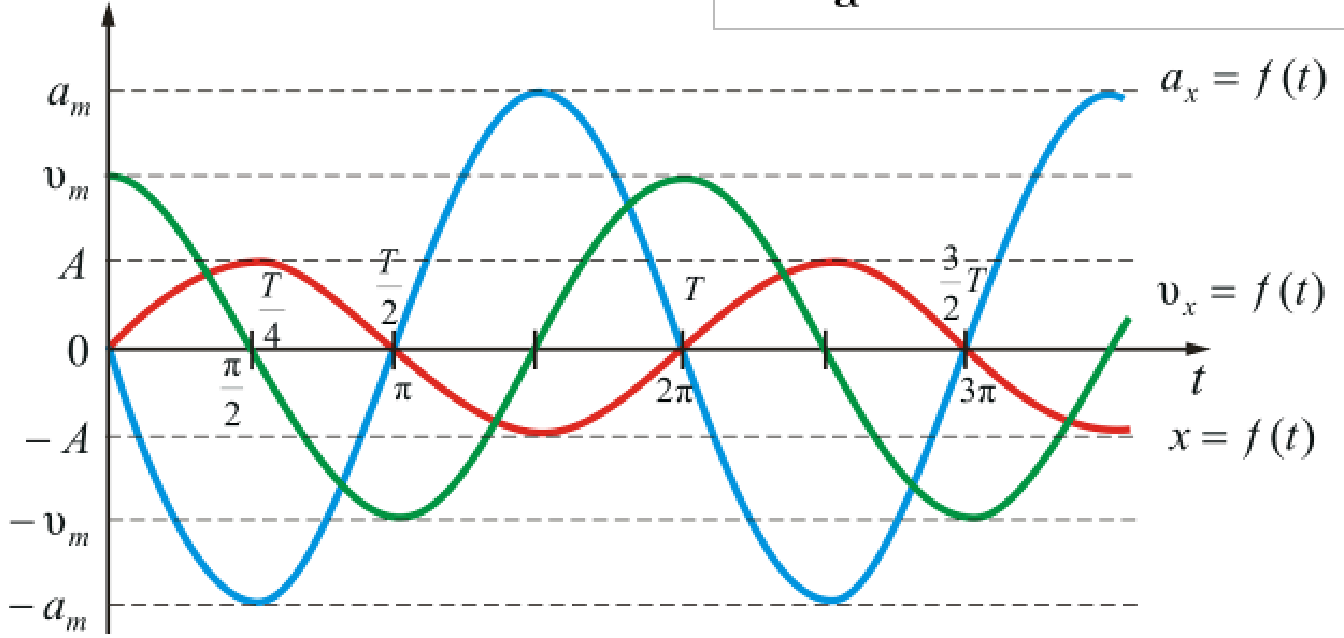
а) аналитический: $x = a\sin(\omega t + \alpha)$

$$\upsilon = \frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{d}t} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = \upsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathbf{d}^2 x}{\mathbf{d}t^2} = -\omega^2 a\sin(\omega t + \varphi) = -a_m \sin(\omega t + \varphi)$$



б) графический:



Кинетическая и потенциальная энергия колебаний

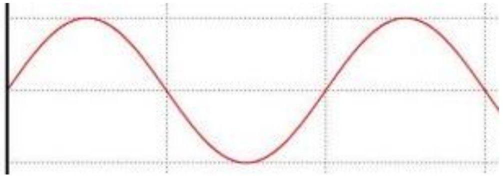
- Если проходим через положение равновесия, то вся энергия переходит в кинетическую (потенциальная =0) и, наоборот, в крайнем положении вся энергия переходит в потенциальную.

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m\omega_0{}^2A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2}=\frac{kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2},\ T_{макс}=\frac{kA^2}{2}$$

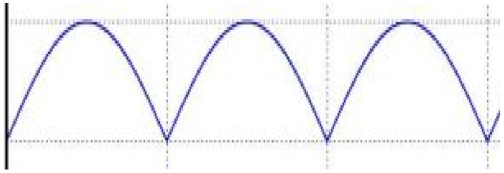
$$U=\frac{kx^2}{2}=\frac{kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2},\ U_{макс}=\frac{kA^2}{2}=T_{макс}$$

$$E=T+U=\frac{kA^2}{2}(\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)+\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0))=\frac{kA^2}{2}=const$$

Сравнивая графики $\sin^2$ и sin можно видеть, что **Т и U изменяются с частотой 2ω_0** . Т.е. энергия от Т к U и наоборот в процессе колебаний перекачивается в два раза быстрее.

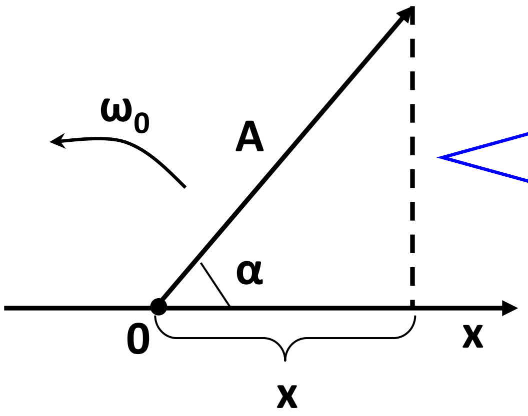


$\sin x$



$\sin^2 x$

Графическое изображение колебаний



Колебание представляется с помощью **вектора амплитуды**.

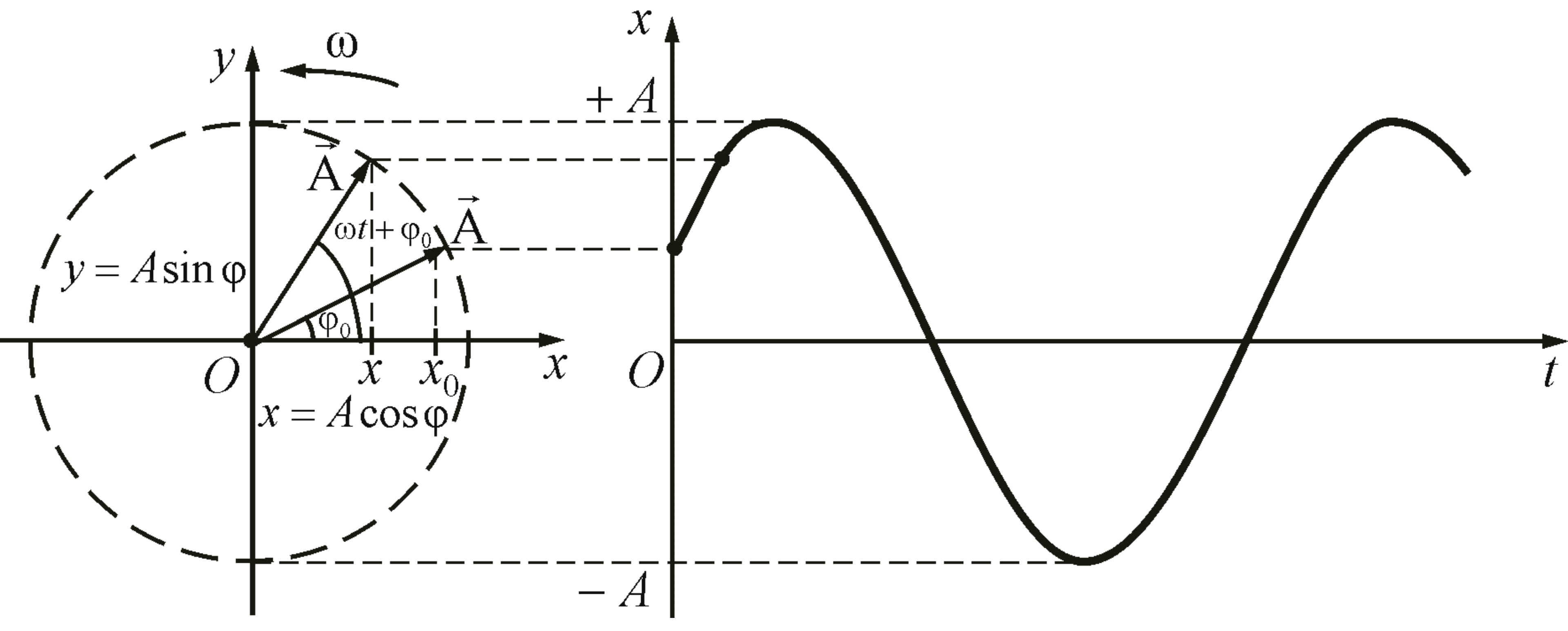
Проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора - **A**, круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора **ω_0** и начальной фазой, равной углу , образуемому вектором с осью в начальный момент времени **α**.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Изображение колебаний в виде векторов на плоскости называется **векторной диаграммой**

Графическое изображение колебаний

Проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора - **A**, круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора ω_0 и начальной фазой, равной углу , образуемому вектором с осью в начальный момент времени **α**.



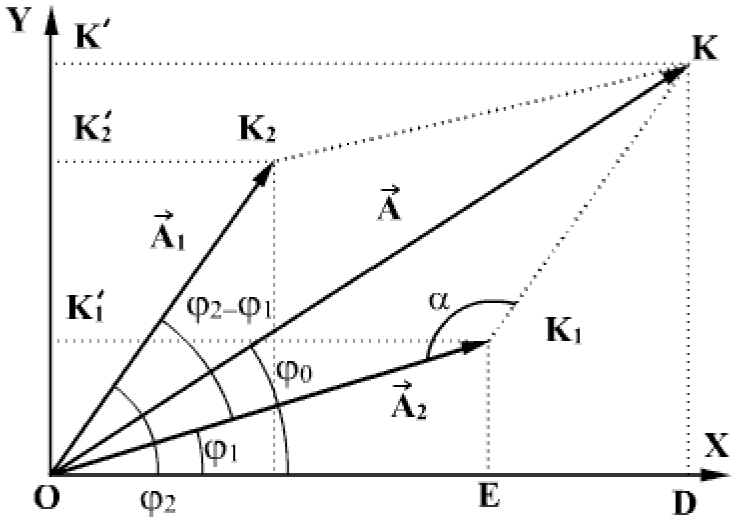
Сложение колебаний

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся в следующим образом:

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{A}$

Сложение колебаний



A_1 и A_2- амплитуды складываемых колебаний под углами φ_1 и φ_2 к оси x

A - вектор амплитуды суммарного колебания.

$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

Определим модуль амплитуды А результирующего колебания. В ΔOK_1K угол $OK_1K = [\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]$ (из равенства противоположных углов параллелограмма).
Следовательно $2(\varphi_2-\varphi_1)+2\alpha=2\pi$
Отсюда $\alpha = [\pi-(\varphi_2-\varphi_1)]$
Согласно теореме косинусов
$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos[\pi-(\alpha_2-\alpha_1)]= A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)$

Начальная фаза φ_0 результирующего колебания определяется из ΔOKD

$$\boxed{tg\varphi_0 = \frac{KD}{OD} = \frac{KC+CD}{OE+ED} = \frac{A_2\sin\varphi_2 + A_1\sin\varphi_1}{A_2\cos\varphi_2 + A_1\cos\varphi_1}}$$

Сложение колебаний

Проанализируем выражение для амплитуды.

$A^2=A_1{}^2+A_2{}^2-2A_1A_2\cos[\pi-(\alpha_2-\alpha_1)]= A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)$

1)Если разность фаз обоих колебаний $(\phi_2- \phi_1)$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме A_1 и A_2.

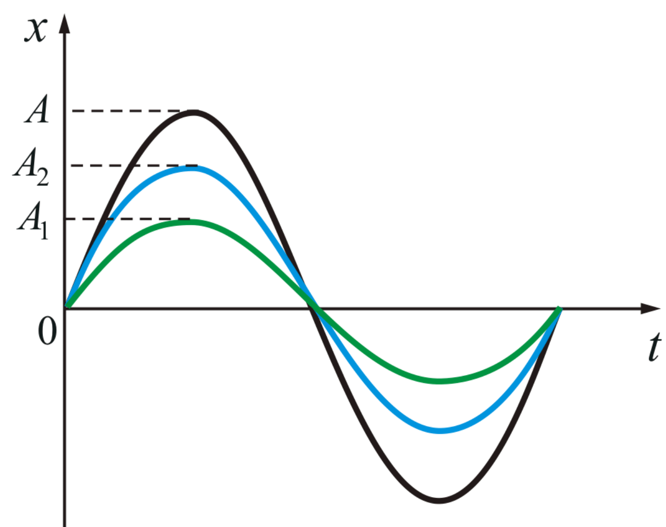
2) Если разность фаз обоих колебаний $(\phi_2- \phi_1)$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т.е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна $| A_1- A_2. |$.

Сложение колебаний

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ **(*m*= 0,1,2,….)** тогда $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

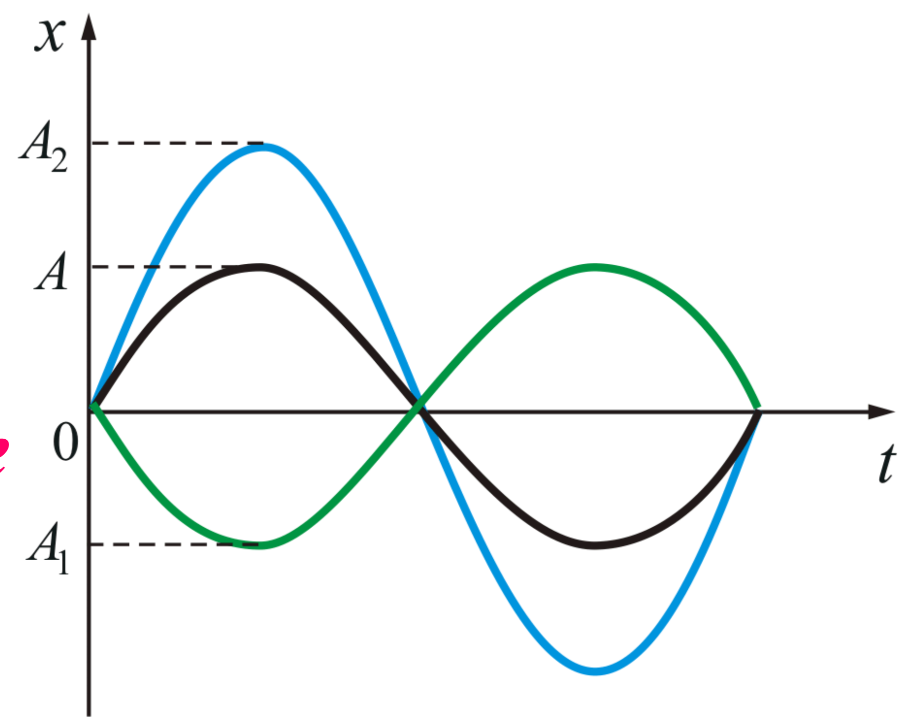
колебания ***синфазны***



Сложение колебаний

2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m = 0,1,2,\ldots.$) тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна разности амплитуд складываемых колебаний.

колебания в ***противофазе***



Биения

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются БИЕНИЯМИ.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны a, а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид: $x_1 = a\cos\omega t$, $x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t$.

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = a(\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t,$$

Во втором сомножителе мы пренебрегли $\Delta\omega/2$, т.к. $\Delta\omega/2 \ll \omega$

Результирующее колебание x можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда $a_б$ которого изменяется по следующему периодическому закону

$$a_б = |2a\cos\Delta\omega/2t|,$$

$$x = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t$$

График функции изображен на следующем слайде

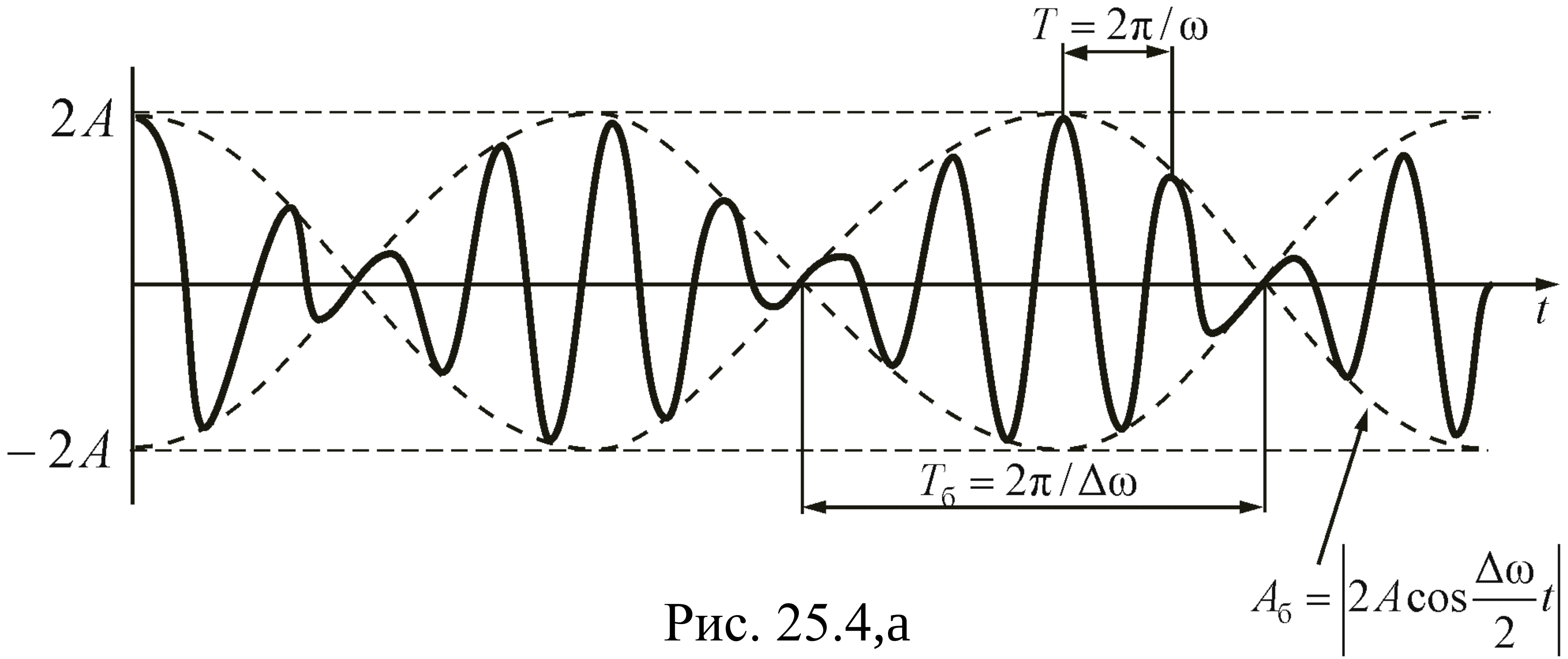
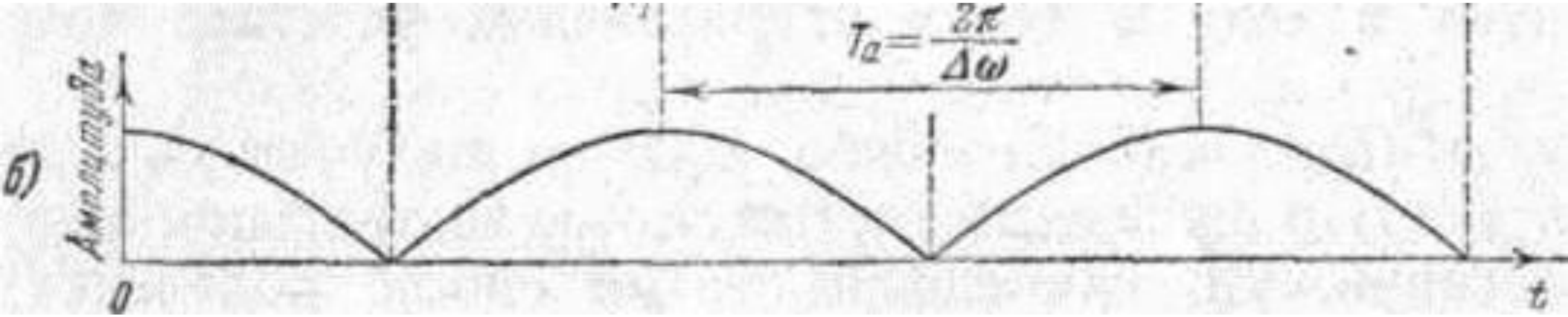


Рис. 25.4,а

$x = a(\cos\omega t + \cos(\omega+\Delta\omega)t = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t$

$2a\cos\Delta\omega/2t$ изменяется гораздо медленнее, чем $\cos\omega t$. Ввиду условия $\Delta\omega/2 << \omega$ за то время, за которое множитель $\cos\omega t$



совершает несколько полных колебаний, **$2a\cos\Delta\omega/2t$** почти не изменится. Это дает основание рассматривать данное колебание как гармоническое колебание частоты ω, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть **$2a\cos\Delta\omega/2t$** , т.к. он изменяется в пределах от $-2a$ до **$+2a$**, в то время как амплитуда по определению – положительная величина. График амплитуды показан на рис. Аналитическое выражение для амплитуды, очевидно, имеет вид **$a_б = |2a\cos\Delta\omega/2t\,|$**.

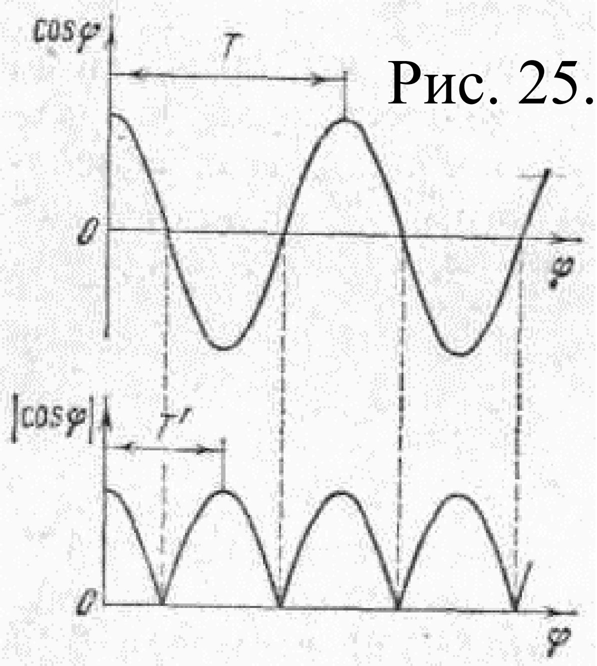


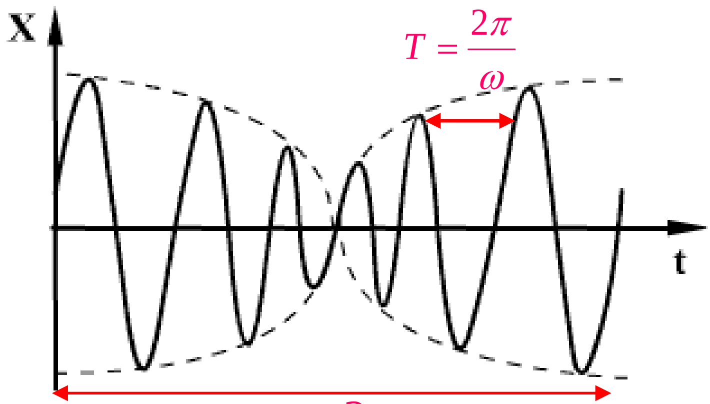
Рис. 25.5

Функция /cos – периодическая функция с частотой, в 2 раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля (см. рис. на котором сопоставлены графики косинуса и его модуля), т.е. с частотой **Δω.** Т.о., частота пульсаций амплитуды – её называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний.

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями - наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Биения

Биения **-** гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой



частоты двух складываемых колебаний мало отличаются друг от друга, амплитуды одинаковы и начальные фазы $\phi_0=0$

$x_1 = A\cos(\omega t)$

$x_2 = A\cos(\omega+\Delta\omega)\, t$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos(\omega t)}$$

Число **n** биений в секунду определяется разностью частот складываемых колебаний $\mathbf{n=\upsilon_1-\upsilon_2}$

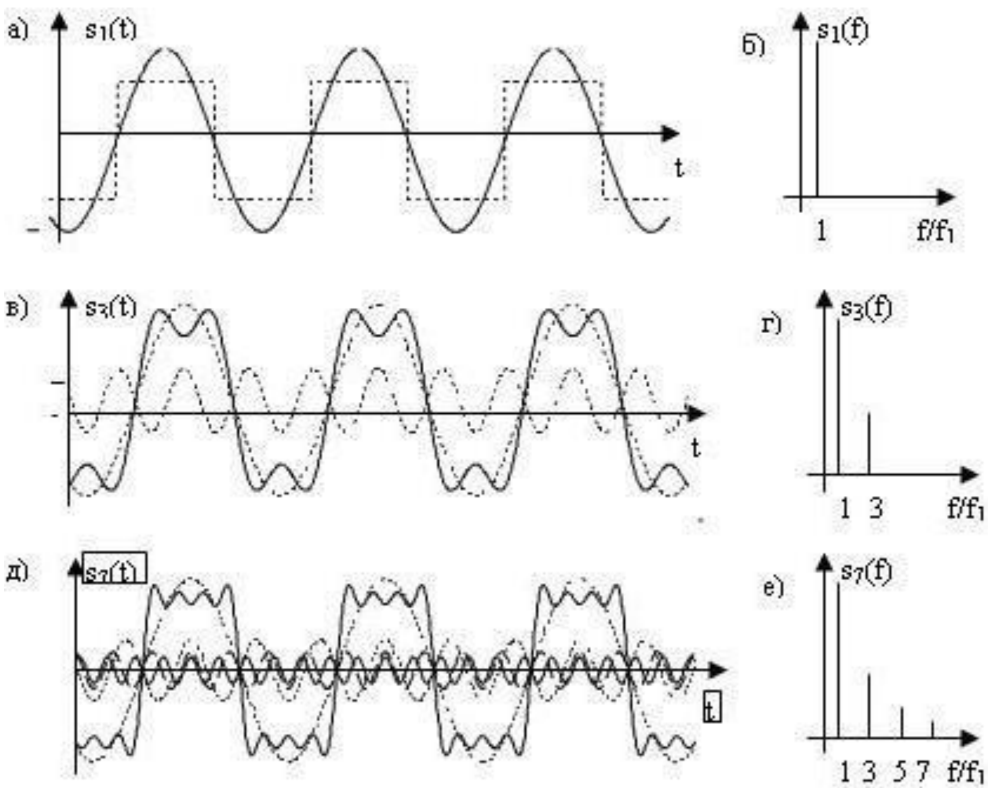
Гармонический анализ

Любые сложные периодические колебания $S = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте ω_0:

$$S(t)=f(t)=a_0/2+a_1\cos(\omega_0 t+\varphi)+a_2\cos(2\omega_0 t+\varphi_2)+..+a_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

Представление периодической функции в таком виде связывают с понятием ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ, ИЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУРЬЕ. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, . . ., называются ПЕРВОЙ (ИЛИ ОСНОВНОЙ), второй, третьей и т.д. ГАРМОНИКАМИ сложного периодического колебания.

Графическое представление спектра сигналов выполняют в виде набора вертикальных отрезков, начинающихся на оси абсцисс (на оси частот). При этом положение отрезка на оси абсцисс (от начала координат) отражает частоту соответствующей гармоники, а длина отрезка соответствует амплитуде этой гармоники.



С увеличением количества гармоник форма синтезированного сигнала все более приближается к прямоугольной, а различие между прямоугольной волной и сигналом, образованным суммой гармонических составляющих, становится все меньше.

Формирование прямоугольного сигнала (меандра) из суммы первых гармоник: а), в), д) - временное представление первых гармоник и их суммы; б), г), е) - спектральное представление соответствующих наборов гармоник

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Найдем результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω, которые происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y. Начало отсчета для простоты выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запише

(1) $$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

где α — разность фаз обоих колебаний, A и B равны амплитудам складываемых колебаний. Уравнение траектории результирующего колебания определим ис

Записывая складываемые к

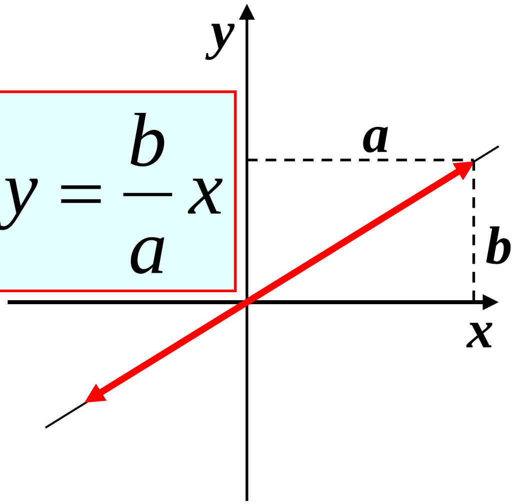
$$\frac{x}{A} = \cos\omega t$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$$

и заменяя во втором уравнении cosωt на $\frac{x}{A}$ и sinωt на $\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$, найдем после несложных преобразований уравнение эллипса, у которого оси ориенти ординатных осей:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.



$$y = \frac{b}{a}x$$

A. Разность фаз φ = 0. В этом случае уравнение эллипса принимает вид

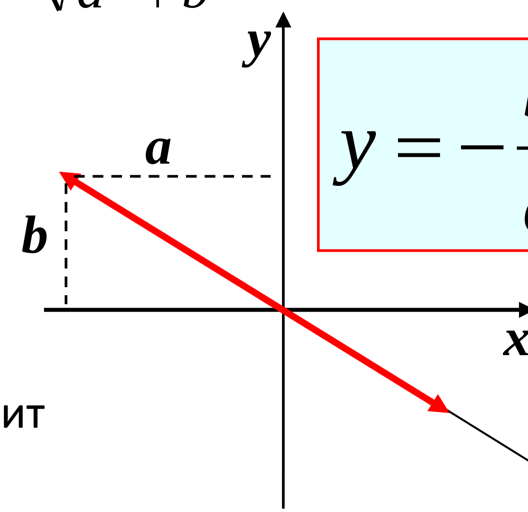
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\omega t$$

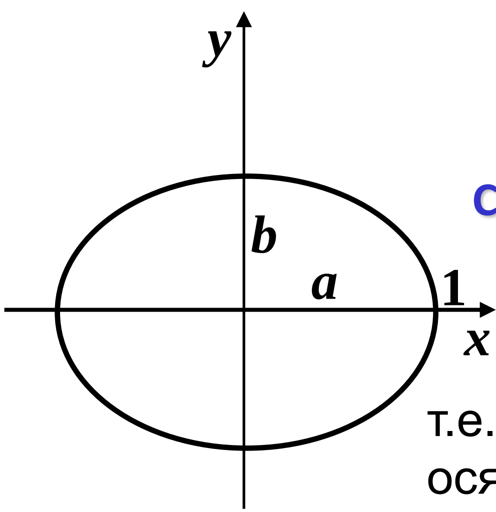
Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой ω и амплитудой $\sqrt{a^2 + b^2}$

B. Разность фаз φ±π В этом случае уравнение эллипса принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$



$$y = -\frac{b}{a}x$$

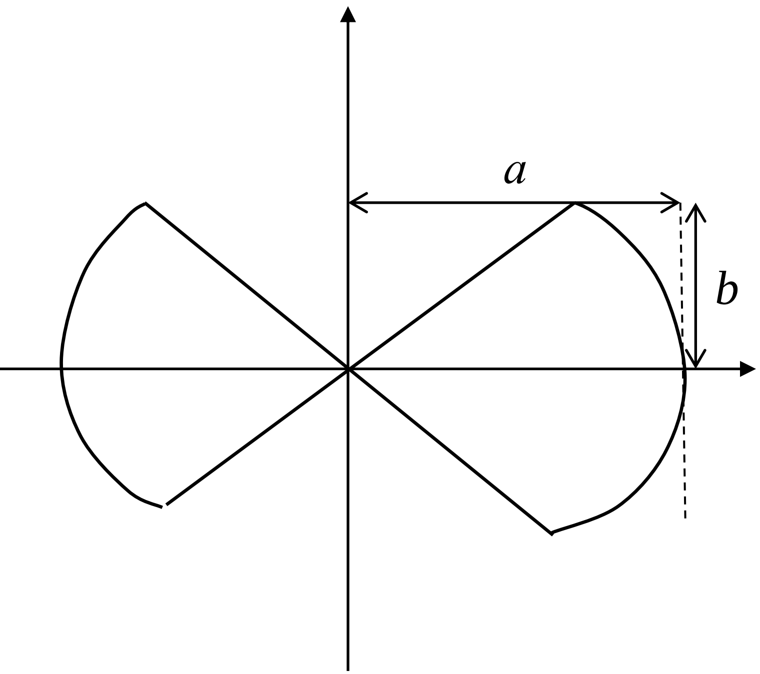


C. При φ±π/2, уравнение переходит

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

т.е.в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

Фигуры Лиссажу.



Если частоты взаимно-перпендикулярных колебаний не одинаковы, но **кратны**, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**.

отношение частот 1:2 и разность фаз π/2

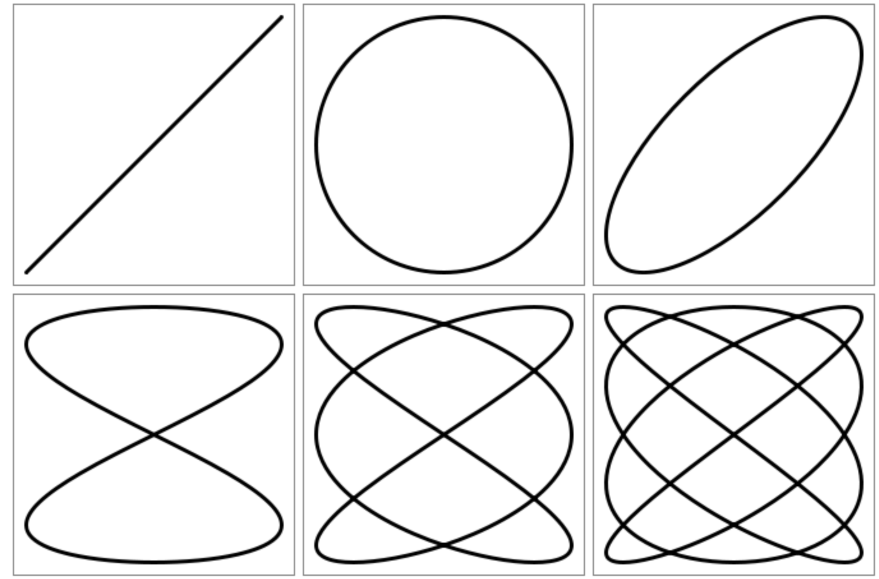
$$x = \boldsymbol{a} \cos \omega t$$

$$y = \boldsymbol{b} \cos (2\omega t + \pi/2)$$

Фигуры Лиссажу.

Фигу́ры Лиссажу́ — замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Впервые изучены французским учёным Жюлем Антуаном Лиссажу (Lissajous).

Вид фигур зависит от соотношения между периодами (частотами), фазами и амплитудами обоих колебаний. В простейшем случае равенства обоих периодов фигуры представляют собой эллипсы, которые при разности фаз 0 или π вырождаются в отрезки прямых, а при разности фаз и равенстве амплитуд превращаются в окружность. Если периоды обоих колебаний неточно совпадают, то разность фаз всё время меняется, вследствие чего эллипс всё время деформируется.

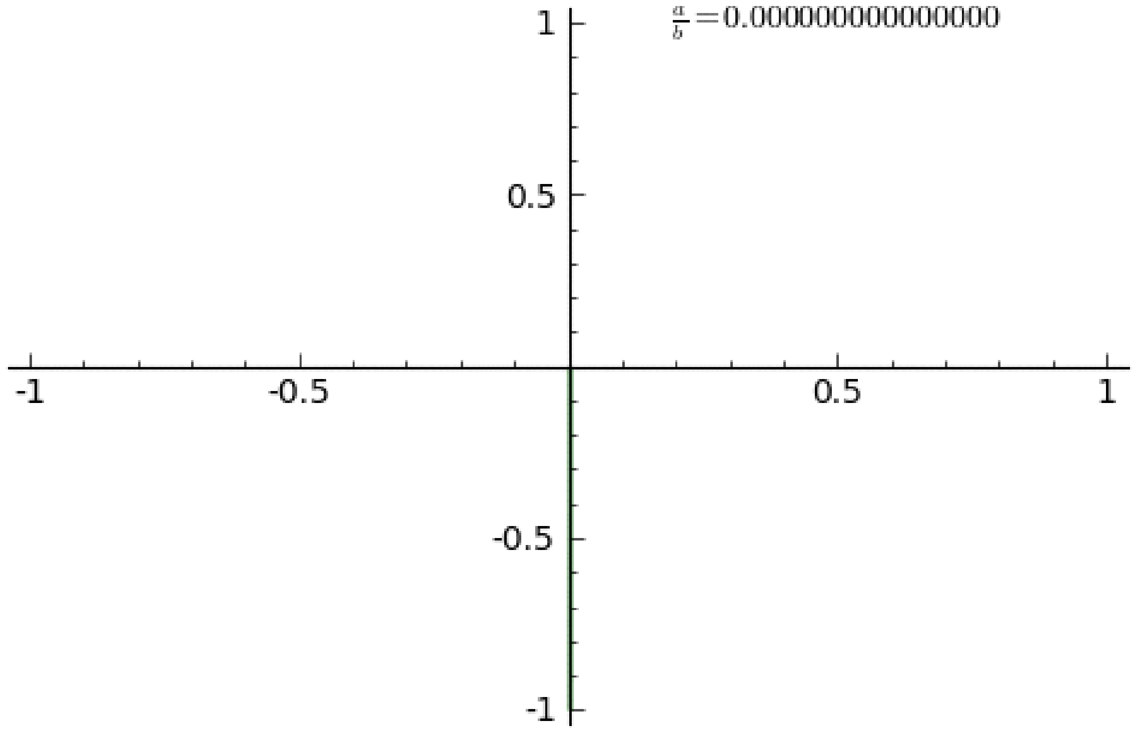


$$\begin{cases} x(t) = A\sin(at+\delta) \\ y(t) = B\sin(bt) \end{cases}$$

Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и расположены по обе стороны от них на расстояниях, равных амплитудам колебаний.

Фигуры Лиссажу.

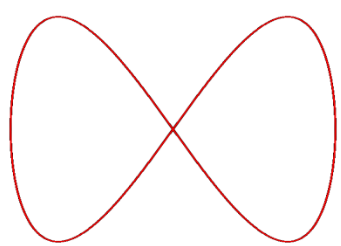
$$\begin{cases} x(t) = A\sin(at+\delta) \\ y(t) = B\sin(bt) \end{cases}$$



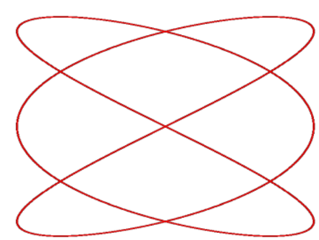
Анимация показывает изменение кривых при постоянно возрастающем соотношении a/b от 0 до 1 с шагом 0.01. (δ=0)

При существенно различных периодах фигуры Лиссажу не наблюдаются. Однако, если периоды относятся как целые числа, то через промежуток времени, равный наименьшему кратному обоих периодов, движущаяся точка снова возвращается в то же положение — получаются фигуры Лиссажу более сложной формы.

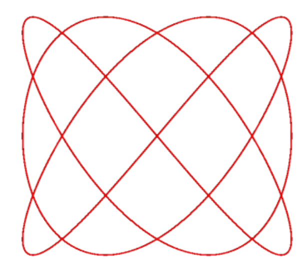
Примеры фигур Лиссажу при δ = π/2,



a = 1, b = 2 (1:2)



a = 3, b = 2 (3:2)



a = 3, b = 4 (3:4)