

ЛЕКЦИЯ 9

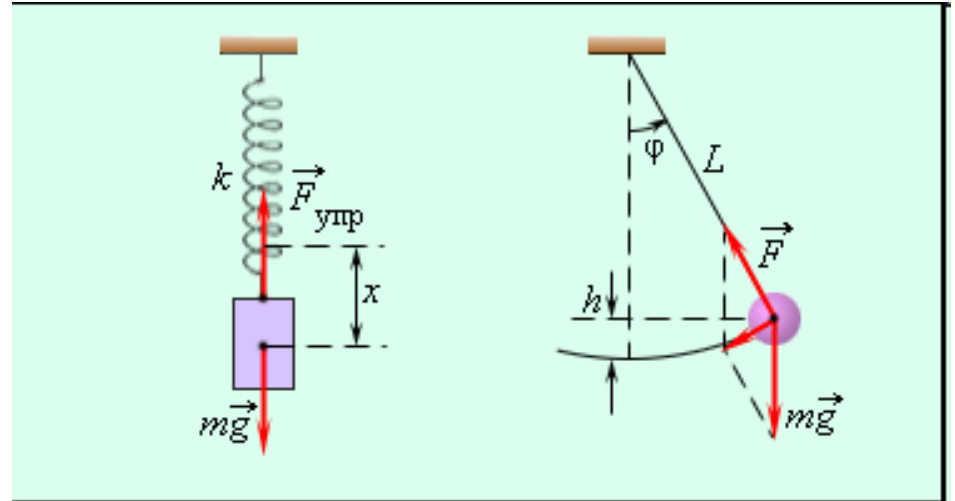
Колебания

- 1 Общие сведения о колебаниях.
- 2 Свободные гармонические колебания.
- 3 Энергия гармонического осциллятора.
- 4 Физический и математический маятники.

Колебания

- **Периодическая величина:** функция $f(t)$ есть периодическая функция (величина) с периодом T если
$$f(t) = f(t + T)$$
- **Колебаниями** называются процессы, при которых какая-либо величина (физическая, географическая или любая другая) многократно принимает через равные последовательные промежутки времени одни и те же значения (или приблизительно одни и те же).

Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник



Свободные, собственные и вынужденные колебания

- Если система каким-либо образом выведена из равновесия и затем предоставлена самой себе (источник устранен), то в ней происходят колебания, которые называются **свободными**. Например, маятник или боксерская груша, выведенная из положения равновесия однократным ударом.
- Если свободные колебания происходят без потерь энергии, то они называются **собственными**, то есть, это- частный случай свободных колебаний
- Если система колеблется под воздействием периодически изменяющейся внешней силы, то такие колебания называются **вынужденными**. Например, мост под воздействием периодически повторяющейся внешней силы (проход строевым шагом колонны солдат).

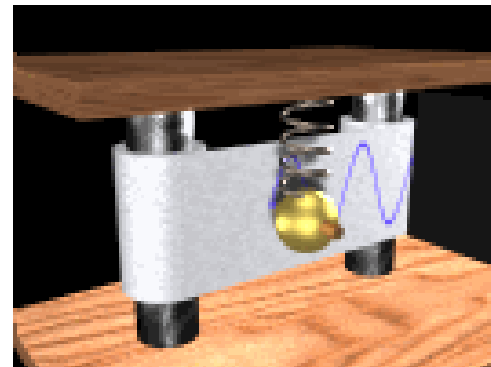
Гармонические колебания

Во многих случаях разнообразные периодические процессы могут быть представлены как суперпозиция гармонических колебаний. **Гармоническими** называются колебания с постоянной амплитудой A , происходящие **по закону синуса или косинуса**, то есть когда изменение физической величины $x(t)$ выражается формулой:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

ω — круговая или циклическая частота колебаний.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



Квазиупругие силы

- Силы любого происхождения, **пропорциональные величине отклонения** системы от положения равновесия и направленные к положению равновесия называются **квазиупругими** силами. Колебания под действием квазиупругих сил будут гармоническими.
- Т.е принципиальное отличие квазиупругих ($-F=kx$) от постоянных (не зависящих от расстояния и направления перемещения) сил в том, что **воздействие постоянной силы приводит лишь к смещению положения равновесия**, ничего не меняя в характере самого движения.

Амплитуда, фаза, начальная фаза

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **Частота** ν — число колебаний в единицу времени, T — период колебаний, то есть время, через которое значения колеблющейся величины начинают повторяться.
$$\nu = \frac{1}{T}$$

Если период равен 1 с, то частота равна 1 Гц

- **Фазой** колебаний называется величина $(\omega t + \varphi_0)$

φ_0 — начальная фаза колебаний, то есть фаза при $t = 0$.

Фаза характеризует отклонение величины x от нулевого значения в данный момент времени и определяется с точностью до произвольного слагаемого кратного 2π

- **Амплитуда** — максимальное отклонение от положения равновесия

Период и частота колебаний

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **Период колебаний** T , - время, за которое фаза увеличивается на 2π , то есть, значения колеблющейся величины начинают повторяться.

- **Частота** ν - число колебаний в единицу времени (за 1 секунду),

$$\nu = \frac{1}{T}$$

- **Круговая (циклическая) частота** ω - число колебаний за 2π секунд,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Гармонический осциллятор

- Тело массы m , колеблющееся горизонтально под действием силы упругости пружины $F = -kx$ (k — коэффициент упругости, x — смещение тела относительно положения равновесия, знак “минус” означает, что упругая сила направлена противоположно направлению смещения x) согласно 2-му закону Ньютона запишем:

$$ma = -kx \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx$$

Обозначим:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{уравнение гармонического осциллятора}$$

Решением является:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Частота ω_0 называется **собственной частотой** данного гармонического осциллятора.

Скорость и ускорение в гармоническом колебательном движении точки определяются соответствующими производными по времени:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

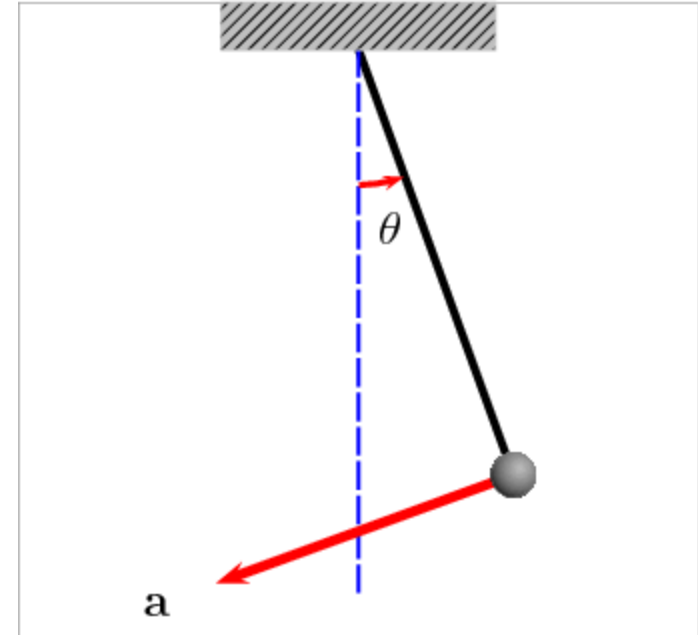
$$v_x = \dot{x} = -\omega A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

- **Скорость** изменяется по гармоническому закону, но **ее амплитуда больше амплитуды x в ω раз и опережает x на $\pi/2$**

- Ускорение изменяется по гармоническому закону, но **его амплитуда больше в ω^2 раз и опережает x на π**

-(т.е. в противофазе с x)

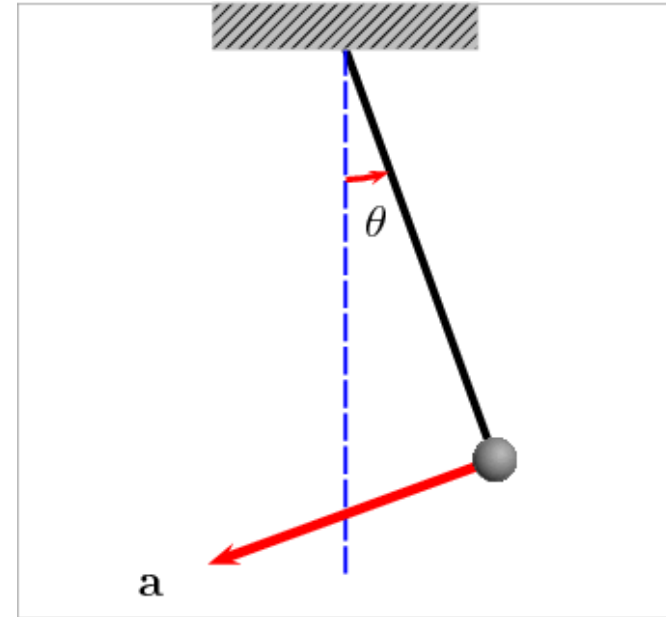


Способы представления гармонических колебаний

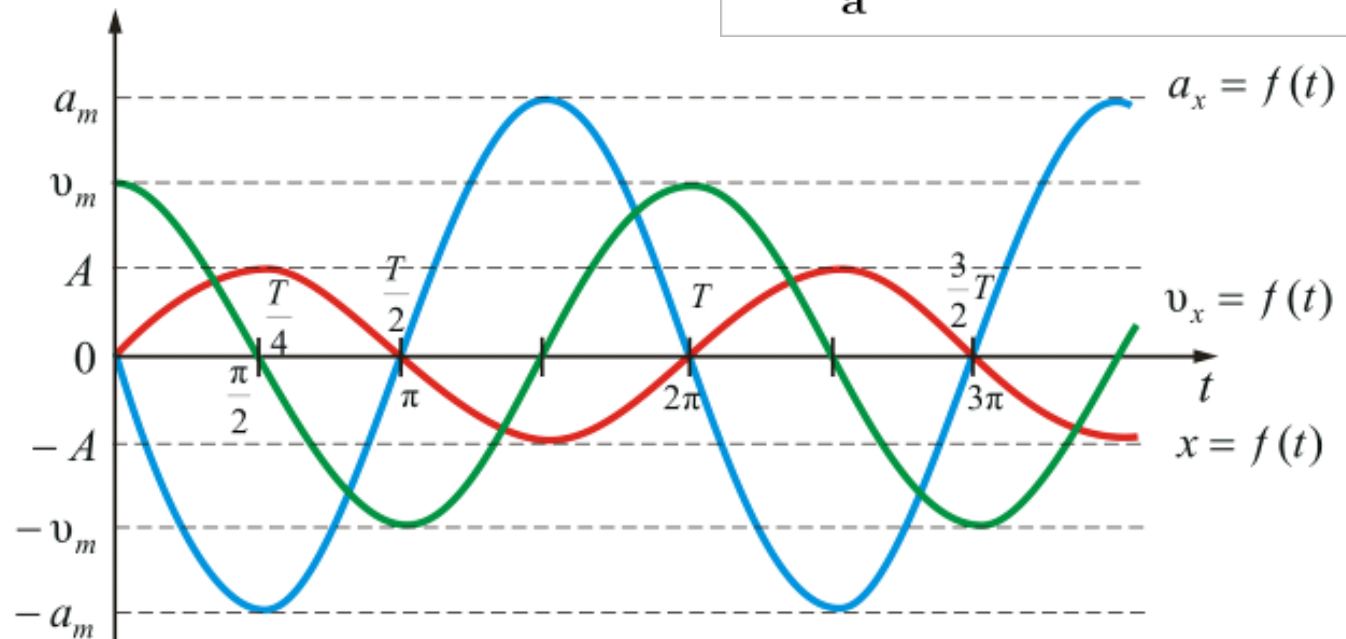
а) аналитический: $x = a \sin(\omega t + \alpha)$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = v_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \varphi) = -a_m \sin(\omega t + \varphi)$$



б) графический:



Кинетическая и потенциальная энергия колебаний

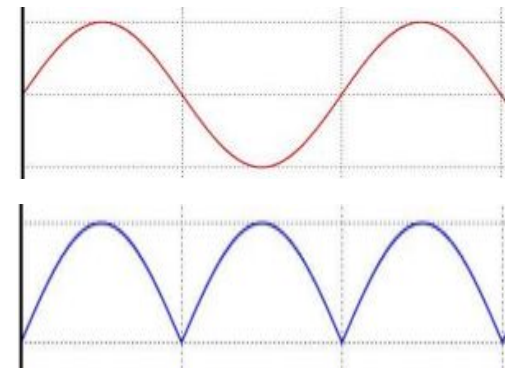
- Если проходим через положение равновесия, то вся энергия переходит в кинетическую (потенциальная = 0) и, наоборот, в крайнем положении вся энергия переходит в потенциальную.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}, T_{\max} = \frac{kA^2}{2}$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}, U_{\max} = \frac{kA^2}{2} = T_{\max}$$

$$E = T + U = \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)) = \frac{kA^2}{2} = \text{const}$$

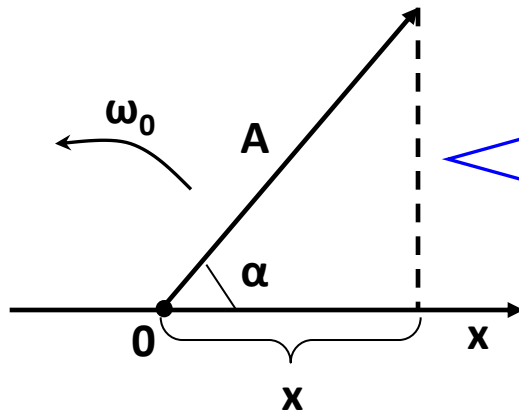
Сравнивая графики $\sin^2$ и $\sin$ можно видеть, что **T и U изменяются с частотой $2\omega_0$** . Т.е. энергия от T к U и наоборот в процессе колебаний перекачивается в два раза быстрее.



$\sin x$

$\sin^2 x$

Графическое изображение колебаний



Колебание представляется с помощью
вектора амплитуды.

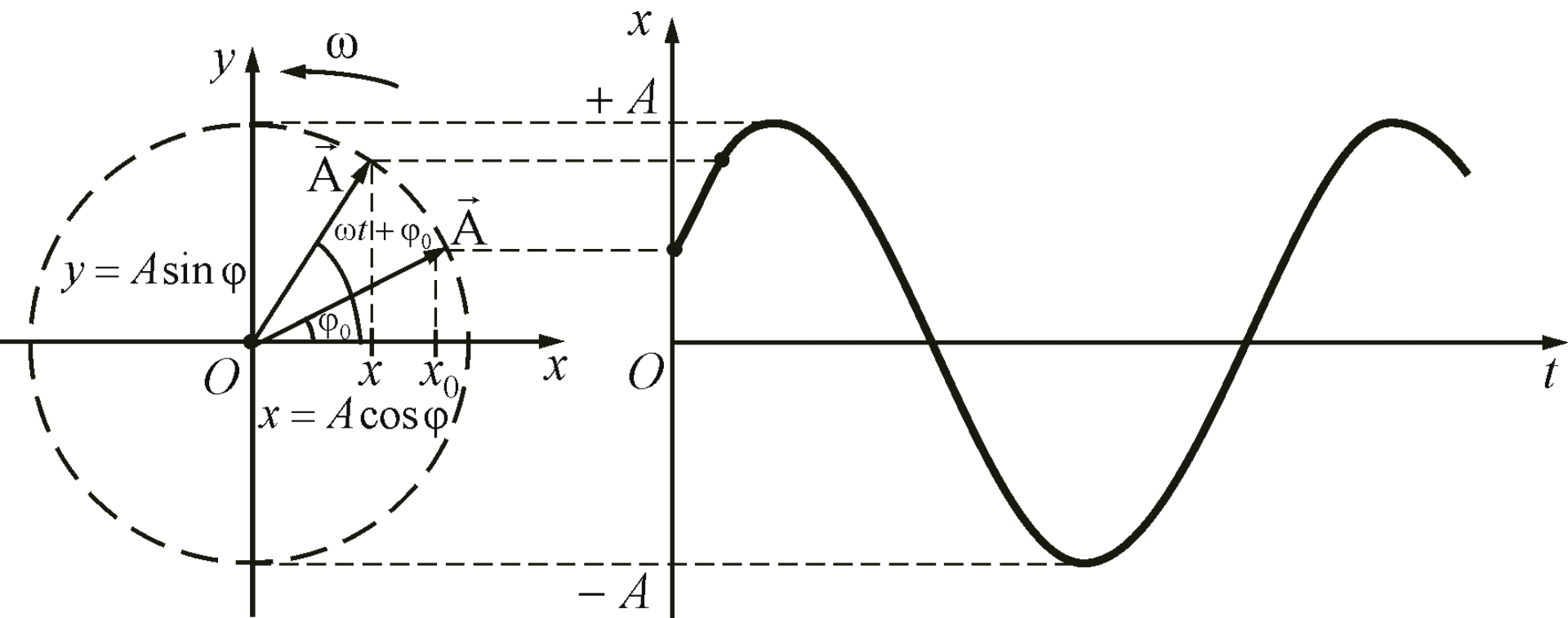
Проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора - A , круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора ω_0 и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени α .

$$x = A \cos (\omega_0 t + \alpha)$$

Изображение колебаний в виде векторов на плоскости называется **векторной диаграммой**

Графическое изображение колебаний

Проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора - A , круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора ω_0 и начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени α .

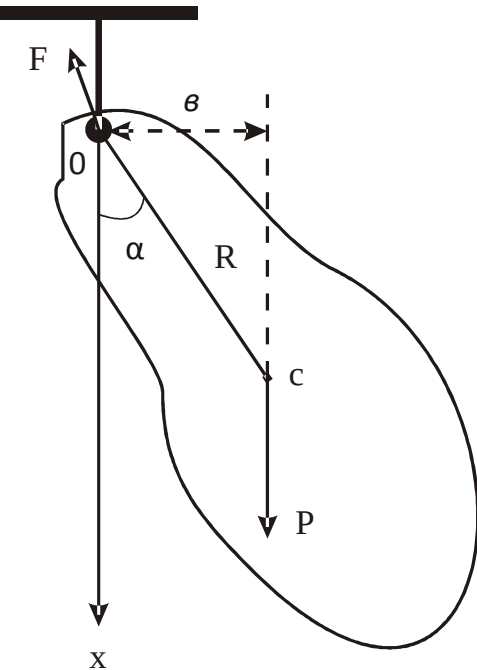


Физический маятник

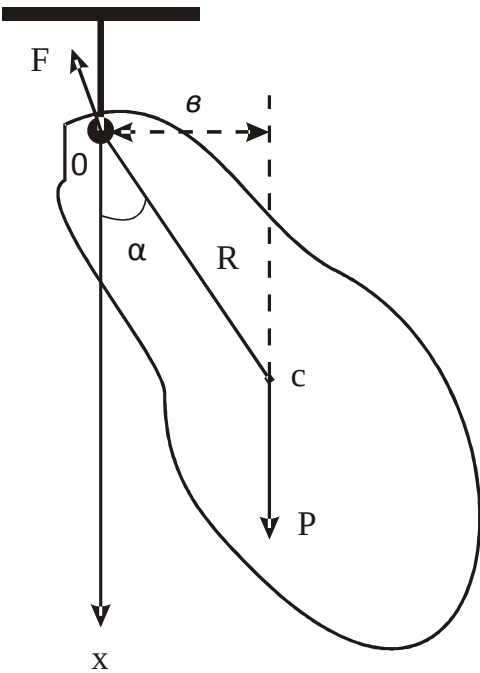
Физическим маятником называется твердое тело, которое может колебаться вокруг горизонтальной оси (возможно только при условии, что центр масс тела не лежит на этой оси). Т.е. нужен ненулевой момент сил. Движение такого маятника можно описать основным уравнением динамики для вращательного движения тела:

$$I\beta = \sum N_{вн} e_{ш}$$

где I — момент инерции маятника относительно горизонтальной оси вращения через точку O . Внешних сил здесь две: сила F упругого происхождения (изгибает ось), действующая на маятник со стороны оси в точке O и сила тяжести P , приложенная в центре масс. Величина и направление силы F нам неизвестны, но это неважно, так как она проходит через ось вращения и поэтому ее момент равен нулю (плечо равно нулю).



Физический маятник



Момент силы тяжести:

$$N = [RP] = -Rmg \sin \alpha = -Pv$$

где $v = R \sin \alpha$ - плечо силы тяжести. Знак «минус» означает, что при $\alpha > 0$, то есть при отклонении против часовой стрелки момент силы вызывает вращение по часовой стрелке (в направлении противоположном первоначальному отклонению). Т.е момент силы тяжести действует аналогично квазиупругой силе $-kx$. Итак, получаем:

$$I \alpha'' = -mgR \sin \alpha$$

При малых α (при $\alpha \ll 1$ в радианной мере) $\sin \alpha \approx \alpha$ и

$$\alpha'' + \omega^2 \alpha = 0, \quad \text{где}$$

$$\omega^2 = \frac{mgR}{I}$$

R- расстояние от оси вращения до центра масс

Физический маятник

В результате имеем дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого как нам уже известно является функция:

$$\alpha(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

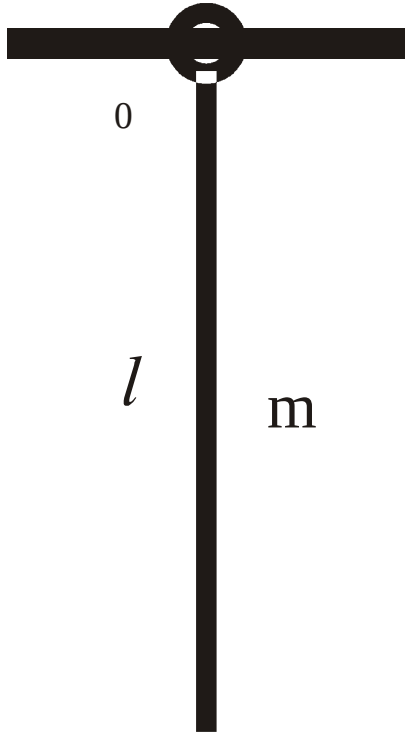
где циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$$

а период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}}$$

Колебания однородного стержня



Найдем, для примера, частоту колебаний однородного стержня, качающегося на оси, проходящей через его край.

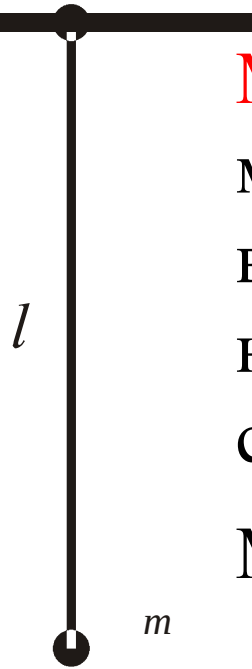
По теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси 0 равен:

$$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m(l/2)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mg \frac{l}{2}}{\frac{1}{3} ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Математический маятник



Математическим маятником называется тело, массу которого можно считать сосредоточенной в одной точке, подвешенное на невесомой, нерастяжимой нити. Он оказывается частным случаем физического маятника.

Момент инерции материальной точки $I = ml^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Т.е. из-за разного характера распределения массы есть отличие в частоте колебаний математического маятника и стержня той же длины и массы.

Математический и физический маятники

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}}$$

Приведённая длина — это условная характеристика физического маятника. Она численно равна длине математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.

Приведённая длина вычисляется следующим образом:

$$l = \frac{J}{ma}$$

где J — момент инерции относительно точки подвеса, m — масса, a — расстояние от точки подвеса до центра масс.

Период колебаний математического маятника зависит от его длины и ускорения силы тяжести и не зависит от массы груза.

Измерив период колебаний маятника, можно определить ускорение свободного падения g в данном месте.

Частота **собственных** колебаний зависит только от свойств системы

($\omega_0^2 = k/m$ для математического и $\omega_0^2 = mgR/J$ для физического маятников),