

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИФРАКЦИОННОЙ ТЕОРИИ
КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА*А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин и Н. Г. Цигуро*

Проведено сравнение результатов, полученных методом возмущений при расчете дифракционного расщепления частот встречных волн кольцевого лазера, с результатами, основанными на численном решении интегрального уравнения резонатора. Показано, что в области слабой дифракции метод возмущений приводит в ряде случаев, к радикальному искажению вида зависимости расщепления частот от параметров резонатора и к существенной погрешности в величине расщепления.

В работах [1-4] изложена теория дифракционных явлений в кольцевом лазере, основанная на применении метода возмущений при построении собственных колебаний открытого резонатора. Между тем неправомерность стандартного метода возмущений в теории открытого резонатора не вызывает сомнений. Действительно, как бы ни велика была апертура диафрагмы, найдутся такие типы колебаний не возмущенного дифракцией резонатора, для которых возмущение является сильным, и в рамках метода возмущений степень участия этих колебаний в формировании основной моды открытого резонатора окажется заметно искаженной. Так, хорошо известно [5], что асимптотика дифракционных потерь конфокального резонатора в области больших значений параметра Френеля, рассчитанная методом возмущений, существенно отличается от асимптотики точного аналитического решения.

Вместе с тем не исключено, что существует область параметров резонатора, внутри которой метод возмущений приводит к удовлетворительным результатам и для практических расчетов вполне приемлем. Отметим, что результаты такого рода будут действительно ценными лишь в том случае, если соотношения, даваемые методом возмущений, окажутся пригодными для аналитического исследования функциональных зависимостей.

Для выяснения возможностей метода возмущений в дифракционной теории кольцевого лазера сравним результаты расчета дифракционного расщепления частот встречных волн, выполненного методом возмущений, с результатами численного решения [6].

В отличие от [1-4], где метод возмущений используется для решения системы осцилляторных уравнений открытого резонатора, полученных методом Слэтера, применим метод возмущений для решения интегральных уравнений кольцевого резонатора, записанных в представлении не возмущенных дифракцией собственных функций [6]. Преимуществом такого подхода является сокращение размерности рядов теории возмущений, так как разложение поля ведется в поперечной плоскости резонатора, и суммирование по продольным индексам [1-4] оказывается излишним.

Как показано в [6], матричные уравнения кольцевого резонатора, сформированного квадратичным фазовым и амплитудным корректорами, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_n (\lambda - \lambda_n \langle n | \hat{h} | n \rangle) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \lambda_k \langle n | \hat{h} | k \rangle A_k, \\ B_n (\lambda - \lambda_n \langle n | \hat{h} | n \rangle) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \lambda_n \langle k | \hat{h} | n \rangle B_k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь A_k, B_k — поперечные распределения встречных волн в представлении не возмущенных дифракцией собственных функций, $\langle n | \hat{h} | k \rangle$ — матричные элементы оператора амплитудной коррекции в том же представлении. (Для случая П-образной коррекции матричные элементы рассчитаны в [6]). Собственное значение λ связано с частотой ν собственного колебания открытого резонатора соотношением

$$\lambda = \exp\left(-i\nu \frac{L}{c}\right), \quad (2)$$

где L — периметр резонатора. Не возмущенный дифракцией резонатор характеризуется спектром λ_n

$$\lambda_n = \exp\left(-i\omega_n \frac{L}{c}\right), \quad (3)$$

где

$$\omega_n = \frac{c}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos g \quad (4)$$

частоты собственных колебаний (g — параметр конфигурации).

Для решения (1) воспользуемся формально стандартным методом возмущений, вводя в правую часть (1) малый параметр и предполагая, что связь между типами колебаний, возникающая в результате дифракции, является слабым возмущением.

В нулевом приближении считаем, что не возмущенное дифракцией колебание — основная мода резонатора, сформированного квадратичным фазовым корректором

$$A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = \delta_{n0}. \quad (5)$$

При этом

$$\lambda^{(0)} = \lambda_0 \langle 0 | \hat{h} | 0 \rangle, \quad (6)$$

и возникающие в этом приближении дифракционные потери описываются диагональным элементом оператора амплитудной коррекции.

В первом приближении получаем следующие поправки к собственному значению и коэффициентам разложения:

$$\lambda^{(1)} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n^{(1)} &= \frac{\lambda_0}{\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_n} \langle n | \hat{h} | 0 \rangle, \\ B_n^{(1)} &= \frac{\lambda_n}{\tilde{\lambda}_0 - \tilde{\lambda}_n} \langle 0 | \hat{h} | n \rangle, \quad n \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n \langle n | \hat{h} | n \rangle. \quad (9)$$

Из условия нормировки положим $A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 0$.

Отметим, что полученные соотношения формально применимы и для вырожденных резонаторов, так как диагональные элементы оператора амплитудной коррекции снимают вырождение спектра в нулевом приближении.

Используя результаты [6], запишем коэффициенты связи между основным и высшими типами колебаний в виде

$$\langle n | \hat{h} | 0 \rangle = \langle n | \hat{h} | 0 \rangle \exp [in\Omega(\xi)], \quad (10)$$

где

$$\Omega(\xi) = \arctg \left(\xi \sqrt{\frac{1-g}{1+g}} \right) \quad (11)$$

(ξ — параметр, характеризующий относительное положение фазового и амплитудного корректоров [6]), а матричные элементы, обозначенные в (10) фигурными скобками, — действительны.

Ограничимся рассмотрением случая симметричной амплитудной коррекции, когда в результате дифракции связанными оказываются лишь моды одинаковой четности. При этом [6]

$$\langle 2n | \hat{h} | 0 \rangle = - \frac{\exp(-c^2) H_{2n-1}(c)}{\sqrt{\pi} (2n)! 2^{2n-2}}, \quad (12)$$

где c — отношение диаметра диафрагмы к диаметру поперечного распределения невозмущенного колебания в плоскости диафрагмы, а H_k — полиномы Эрмита.

В работе [6] выведено соотношение, связывающее разность фаз дифракционных функционалов $\lambda_a - \lambda_b$, определяющую величину дифракционного расщепления частот встречных волн в кольцевом лазере, с компонентами спектра встречных волн A_n, B_n . Подставляя в это соотношение спектр волн, даваемый формулой теории возмущений (8), учитывая (10) и проводя элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \lambda_a - \lambda_b = & -4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \langle 2n | \hat{h} | 0 \rangle \langle 2m | \hat{h} | 0 \rangle \times \\ & \times \sin \frac{\Delta_{2n}}{2} \sin \frac{\Delta_{2m}}{2} \sin [2(n+m)(\Omega(\xi) - \Omega(\chi) - \Omega(-1))] \times \\ & \times \frac{[\langle 0 \rangle + \langle 2n \rangle] [\langle 0 \rangle + \langle 2m \rangle]}{[\langle 0 \rangle^2 + \langle 2n \rangle^2 - 2\langle 0 \rangle \langle 2n \rangle \cos \Delta_{2n}] [\langle 0 \rangle^2 + \langle 2m \rangle^2 - 2\langle 0 \rangle \langle 2m \rangle \cos \Delta_{2m}]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\Delta_{2n} = \frac{L}{c} (\omega_{2n} - \omega_0), \quad (14)$$

$$\langle 2n \rangle \equiv \langle 2n | \hat{h} | 2n \rangle, \quad (15)$$

χ ($\chi \geq \xi$) — параметр, характеризующий расположение тонкого слоя активной среды в резонаторе относительно фазового корректора: в плоскости $\chi=0$ среда расположена симметрично относительно фазового корректора, в плоскостях $\chi = \pm 1$ совмещена с ним. Формула для расчета коэффициентов Z_{nm} дана в [6].

Отметим некоторые особенности соотношения (13). Если $\xi = -1$ (диафрагма совмещена с фазовым корректором), дифракционное расщепление частот — нечетная функция χ .

При этом в плоскостях $\chi = \pm 1$ разность фаз дифракционных функционалов обращается в нуль лишь при конфокальной конфигурации резонатора ($g=0$), в то время как точное решение, в чем нетрудно убедиться из общих соображений, обращается в нуль при любой конфигурации резонатора.

Как следует из (13), компоненты спектра бегущих волн, распространяющиеся с той же фазовой скоростью, что и основная мода, не вносят вклад в дифракционное расщепление частот. Такая ситуация реализуется в резонаторе с вырожденной конфигурацией, когда собственные частоты ряда высших типов колебаний резонатора совпадают с частотой основного собственного колебания.

Таким образом, для расчета дифракционного расщепления частот можно формально пользоваться результатами, полученными методом возмущений без предварительного снятия вырождения

$$\lambda_a - \lambda_b = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^m Z_{nm} \{2n | \hat{\theta} | 0\} \{2m | \hat{\theta} | 0\} \times \\ \times \sin^{-1} \frac{\Delta_{2n}}{2} \sin^{-1} \frac{\Delta_{2m}}{2} \sin [2(n+m) (\Omega(\xi) - \Omega(\chi) - \Omega(-1))], \quad (16)$$

если при суммировании опустить вырожденные компоненты спектра.

Сравним зависимости разности фаз дифракционных функционалов от параметров резонатора, даваемые соотношением (13), а также упрощен-

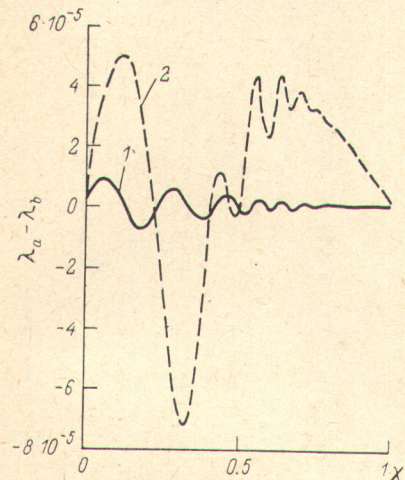


Рис. 1. Разность фаз дифракционных функционалов $\lambda_a - \lambda_b$ в зависимости от продольной координаты слоя активной среды χ .

1 — численное решение, 2 — теория возмущений. $g=0$, $\xi=-1$, $c=2.5$.

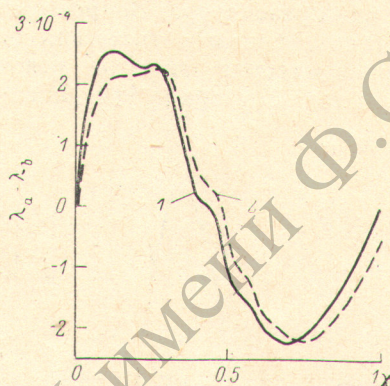


Рис. 2. Разность фаз дифракционных функционалов $\lambda_a - \lambda_b$ в зависимости от продольной координаты слоя активной среды χ .

1 — численное решение, 2 — теория возмущений. $g=0.4$, $\xi=-1$, $c=2.5$.

ной формулой (16) с результатами расчета, основанного на численном решении интегральных уравнений резонатора [6].

На рис. 1 представлена разность фаз дифракционных функционалов $\lambda_a - \lambda_b$ для конфокального резонатора в зависимости от параметра χ , характеризующего расположение слоя активной среды. Сплошная кривая соответствует численному решению [6], штриховая — расчету по формуле (13). При суммировании ряда теории возмущений (13), как и при построении численного решения [6], учитывалось 40 типов колебаний резонатора.

Как видно из рис. 1, теория возмущений в этом случае приводит к сильным искажениям формы зависимости дифракционного расщепления частот от продольной координаты слоя активной среды и к существенному отличию величины расщепления в особенности в области $\chi > 0.5$ от результата численного решения. Отметим, что по мере ослабления дифракции (увеличения параметра c) степень соответствия кривых лишь ухудшается.

Подобные искажения характерны не только для конфокального резонатора, но и для ряда других конфигураций. Например, в случае $g=0.7$, $c=2$ точное решение имеет девять нулей в интервале $0 < \chi < 1$, в то время как теория возмущений дает лишь один ноль.

Вместе с тем можно так подобрать параметры резонатора, чтобы достичь хорошего совпадения результатов теории возмущений и численного решения (рис. 2).

На рис. 3 представлено максимальное по модулю значение разности фаз дифракционных функционалов $\max_{\chi \in (0,1)} |\lambda_a - \lambda_b|$ в зависимости от параметра конфигурации резонатора g . В случае $c=2$, которому соответствуют

кривые на этом рисунке, результаты, полученные методом возмущений дают тот же порядок величины, что и численное решение практически для любой конфигурации резонатора. Однако, как показывает анализ, в этом случае и в особенности при ослаблении дифракции (увеличении c) метод возмущений приводит к существенно более медленной зависимости $\max_{\chi \in (0,1)} |\lambda_a - \lambda_b|$ от g , так что выбор оптимальной конфигурации резонатора на основе результатов метода возмущений становится нереальным.

Обратимся к краткому анализу результатов работ [1-4], в которых на основе метода возмущений рассчитывалось дифракционное расщепление частот встречных волн кольцевого лазера. В отличие от изложенной выше теории в работах [1-4] метод возмущений использовался при решении системы осцилляторных уравнений для быстрых амплитуд собственных колебаний резонатора. Вопросы, связанные со степенью соответствия двух подходов к теории открытого резонатора (метода Слэтера [1-4] и общепри-

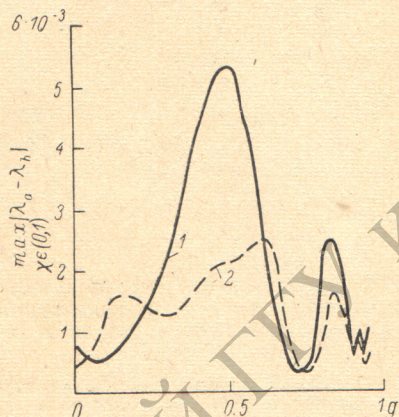


Рис. 3. Максимальное значение разности фаз дифракционных функционалов $\max_{\chi \in (0,1)} |\lambda_a - \lambda_b|$ в зависимости от параметра конфигурации g .

1 — численное решение, 2 — теория возмущений. $\xi = -1$, $c = 2$.

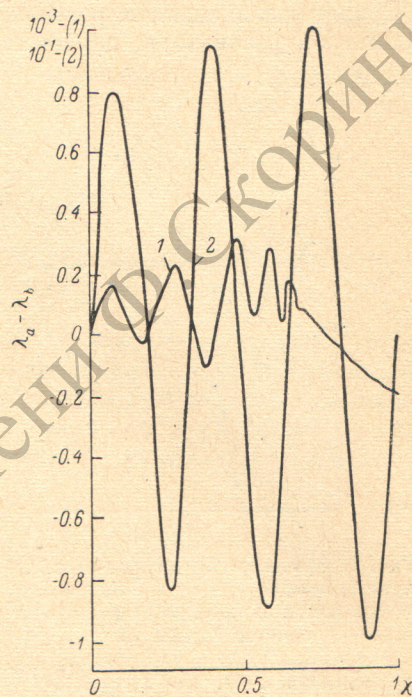


Рис. 4. Разность фаз дифракционных функционалов $\lambda_a - \lambda_b$ в зависимости от продольной координаты слоя активной среды χ .

1 — с учетом вырождения спектра резонатора, 2 — без учета вырождения спектра резонатора. $g = 0.75$, $\xi = -1$, $c = 2$.

нятого метода интегральных уравнений, например [7]), подробно рассмотрены в работе [8], где показано, что в первом порядке теории возмущений (без снятия вырождения спектра резонатора в нулевом приближении) результаты решения осцилляторных уравнений [1-4] и матричных уравнений (1) совпадают. Таким образом, соотношение (16) полностью соответствует результатам [1-4] (формула (15.41) [4], если в ней провести суммирование по продольным индексам и учесть второе слагаемое в Z_{nm} [6], которым пренебрегли в [1-4]).

На рис. 4 представлена зависимость разности фаз дифракционных функционалов от продольной координаты слоя активной среды, рассчитанная по формуле (16) (кривая 1) и по формуле (13) (кривая 2). Нетрудно убедиться в радикальном различии кривых как по форме, так и по порядку величины, что полностью исключает возможность расчета $\lambda_a - \lambda_b$ по упрощенной формуле (16) — вырождение спектра резонатора непременно должно учитываться при использовании метода возмущений.

В работах [1-4] содержатся также и результаты, учитывающие вырождение. Но при этом делается дополнительное приближение

$$|\langle n | \hat{h} | n \rangle - 1| \ll 1 \quad (17)$$

для любого n , которое приводит к тому, что соответствующее соотношение для $\lambda_a - \lambda_b$ (нижняя формула на стр. 282 [4]) существенно отличается от (13) после суммирования по продольным индексам. Приближение (17) — естественно для схемы метода возмущений [1-4], где решается система быстрых уравнений, и предположение о том, что в нулевом приближении возбуждается не только одна поперечная, но и одна продольная мода резонатора, — существенно упрощает решение. К сожалению, приближение (17) неоправдано в теории открытого резонатора, так как найдутся такие типы колебаний, для которых диагональные матричные элементы возмущения существенно отличаются от единицы, причем индексы таких колебаний не велики даже при слабой дифракции (рис. 5).

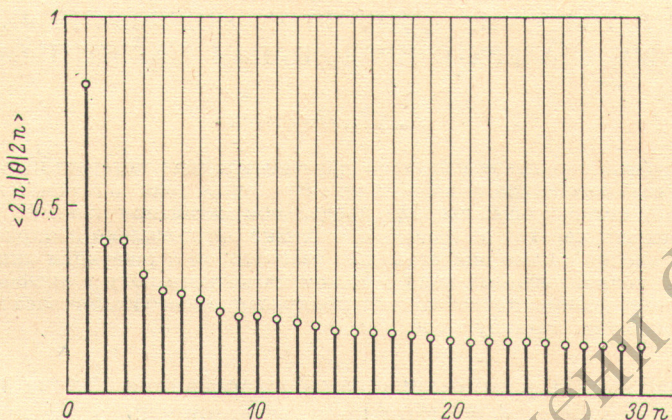


Рис. 5. Диагональные элементы оператора П-образной амплитудной коррекции ($c=2$).

Отметим, что приближение (17) существенно искажает величину разности фаз $\lambda_a - \lambda_b$, даваемую теорией возмущений. Так, для конфигурации резонатора, которой соответствуют кривые на рис. 4, в приближении (17) получим результат, на порядок меньший, чем при расчете по формуле (13).

В заключение, подчеркнем, что стандартная теория возмущений не может служить аналитическим аппаратом для исследования зависимостей дифракционного расщепления частот от параметров резонатора, так как приводит к громоздким соотношениям в виде двукратных рядов, при суммировании которых следует учитывать достаточно большое число членов и пользоваться численными методами. В то же время подход, который основан на численном решении матричных уравнений резонатора [6] и который в вычислительном плане не существенно сложнее теории возмущений, приводит к значительно более точным результатам, в ряде случаев радикально и главное непредсказуемо отличающимся от соответствующих результатов теории возмущений как по величине, так и по форме зависимостей.

Авторы благодарны И. П. Мазанько за внимание, проявленное к настоящей работе, и П. Б. Наумову за помощь в численных расчетах.

Литература

- [1] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 31, 952, 1971.
- [2] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 32, 132, 1972.
- [3] Т. В. Гусева, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 36, 975, 1974.
- [4] Волновые и флуктуационные процессы в лазерах (под ред. Ю. Л. Климонтова и чл.), гл. XI, XV. «Наука», М., 1974.
- [5] Л. А. Вайнштейн. В сб.: Электроника больших мощностей, № 4, 106. «Наука», М., 1965.
- [6] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро. Опт. и спектр., 47, 948, 1979.
- [7] Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и открытые волноводы. «Сов. радио», М., 1966.
- [8] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро. Опт. и спектр., 47, 739, 1979.

Поступило в Редакцию 20 ноября 1978 г.