программе. Как оказалось, то, что создано для человека не всегда лучшим образом подходит для компьютерных вычислений. В методе Гаусса нужно с помощью элементарных преобразований привести матрицу к единичному виду, параллельно выполняя те же действия с другой, единичной матрицей. Многие операции и перестановки будут сразу очевидны человеку, примерно знающему, что нужно делать, но для программы нужен или громоздкий алгоритм, пытающийся повторять логику человека или вычисления «напролом», приводящие к нарастающей погрешности (если не реализовать в Java функционал дробей). Метод треугольников вообще подходит только лишь для одного вида матриц. В результате с помощью рекурсии (прием в программировании, когда метод вызывает сам себя) был реализован метод алгебраических дополнений. Он заключается в следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T,$$

где A^{-1} – обратная матрица, $|A|$ – определитель матрицы A, A^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы А.

Матрица алгебраических дополнений – это матица миноров, но с измененными знаками определенных элементов. Т.е. при нахождении обратной матрицы нам понадобится вычислить некоторое количество определителей. А как найти определитель матрицы n на n? Основной задачей в этом будет нахождение n числа определителей миноров размером m на m, где $m = n - 1$. Как найти определитель матрицы m на m? Нужно будет найти m определителей миноров размером k на k, где $k = m - 1$. И так далее пока не дойдем до размера «2 на 2». Тут мы и получаем на цикл вызовов методов. Для вычисления минора находится определитель, а для вычисления определителя находятся миноры. Полученная матрица превращается в матрицу алгебраических дополнений, транспонируется и затем делится на определитель. Транспонирование и деление на число, как одни из отдельно доступных операций, вынесены в отдельные методы.

Литература

1 Wikipedia [Электронный ресурс] / Матрица (математика) – Википедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Матрица_(математика). – Дата доступа: 30.04.2018.

2 Onlinemschool [Электронный ресурс] / Матрицы: определения и основные понятия. – Режим доступа: http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix. – Дата доступа: 30.04.2018.

УДК 519.95

Н. А. Алёшин, Г. Л. Карасёва

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется специальная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями. Введено понятие структуры и определяющих элементов. Получена система нелинейных уравнений доводки. Исследованы достаточные условия, при выполнении которых система уравнений доводки имеет единственное решение, и это решение системы может быть построено методом Ньютона. Сформулирована лемма о невырожденности решения.

В классе кусочно-непрерывных функций рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(\alpha,u) = -\alpha \to \max_{\alpha,u}, \tag{1}$$
$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx\left(t^*\right) = g,$$
$$\left|d'x(t)\right| \le \alpha, \quad \left|u(t)\right| \le 1, \quad t \in T = \left[0, t^*\right].$$

Здесь $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R$, $A -$ постоянная $n \times n$ $-$ матрица, $b, d \in R^n$, $H \in R^{m \times n}$; $rankH = m < n$, .

Введем обозначения: $u(\cdot) = \left(u(t), t \in T\right)$, $x(\cdot) = \left(x(t), t \in T\right)$, которые будем использовать в дальнейшем.

Определения допустимой, оптимальной и субоптимальной пары $\left(\alpha, u(\cdot)\right)$ и соответствующих траекторий вводятся стандартно.

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}
&T_a = \left\{t \in T : \left|d'x(t)\right| = \alpha\right\} = \bigcup_{i \in N_a} T_{ai},\\
&T_{ai} = \left[\tau_i, \tau^i\right], \quad \tau_i \le \tau^i < \tau_{i+1}, \quad i \in N_a = \left\{1,\dots,n_0\right\};\\
&N_a^+ = \left\{i \in N_a :\ d'x(t) - \alpha = 0,\ t \in T_{ai}\right\}, \quad N_a^- = N_a \setminus N_a^+,\\
&N_{a*}^+ = \left\{i \in N_a^+ : \tau_i < \tau^i\right\}, \quad N_{a0}^+ = N_a^+ \setminus N_{a*}^+,\\
&N_{a*}^- = \left\{i \in N_a^i : \tau_i < \tau^i\right\}, \quad N_{a0}^- = N_a^- \setminus N_{a*}^-,\\
&N_{a*} = N_{a*}^+ \cup N_{a*}^-, \quad N_{a0} = N_{a0}^+ \cup N_{a0}^-, \quad T_{на} = T \setminus \bigcup_{i \in N_{a*}} T_{ai},
\end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $\left(\alpha^0, u^0(\cdot)\right)$, $x^0(\cdot)$ – оптимальная пара и соответствующая ей траектория. Обозначим через T^0, $T_i^0 = \left[\tau_i^0, \tau^{0i}\right]$, $i \in N^0$; N_*^0, N_0^0 множества и моменты, построенные по правилам (2).

Введём обозначения:

$$L_* = N_0^*,\ L_0 = \left\{i \in N_0^0 : u^0\left(\tau_i^0 - 0\right) = u^0\left(\tau_i^0 + 0\right)\right\}, \quad L = L_* \bigcup L_0;\ \ p = \left|L\right|;$$
$$L_R = \left\{i \in L_* :\ u^0\left(\tau_i^0 - 0\right) \ne u^0\left(\tau_i^0 + 0\right)\right\};\ L^R = \left\{i \in L_* :\ u^0\left(\tau^{0i} - 0\right) \ne u^0\left(\tau^{0i} + 0\right)\right\}$$

(без ограничения общности будем считать, что $\tau_i^0 \le \tau^{0i} < \tau_{i+1}^0, i = \overline{1, p-1}; \tau^{00} = 0, \tau_{p+1}^0 = t^*$)

$$l_0 = 0, \text{ если } \tau^{0p} < \tau_{p+1}^0, \quad l_0 = 1, \text{ если } \tau^{0p} = \tau_{p+1}^0;$$
$$k_i = u^0\left(\tau^{0i} + 0\right),\ i = \overline{0, p - l_0};\ \mu_i = \operatorname{sign} d'x^0\left(\tau_i^0\right), \quad i = \overline{1, p};$$
$$\left\{\ t_{ij}^0,\ j = \overline{1, p_i}\right\} = \left\{\ t \in \left]\tau^{0i}, \tau_{i+1}^0\right[: u^0(t-0) \ne u^0(t+0)\right\},$$
$$t_{ij}^0 < t_{ij+1}^0, \quad j = \overline{1, p_i - 1}, \quad i = \overline{0, p - l_0}.$$

Совокупность

$$S = \left\{p, l_0, L, L_*, L_0, L_R, L^R, p_i, k_i, i = \overline{0, p - l_0}; \mu_i, i = \overline{1, p}\right\} \tag{3}$$

назовём структурой решения задачи (1).

Введём совокупность параметров

$$\theta^0 = \left\{\alpha^0; t_{ij}^0\ j = \overline{1, p_i}; i = \overline{0, p - l_0}; \tau_i^0, i \in L; \tau^{0i}, i \in L_*; \overline{v}_i^0, i \in L; y^0\right\}, \tag{4}$$

которую назовём определяющими элементами решения задачи (1) [1].

Вектор (4) является решением системы нелинейных уравнений построенных на основании критерия оптимальности [2].

$$G_1(\theta) = H\chi\left(\theta, t^*\right) - g = 0,\ \ G_2(\theta) = \left(d'\chi\left(\theta, \tau_i\right) - \mu_i \cdot \alpha,\ i \in L\right) = 0,$$

$$G_3(\theta)=\left(d'\dot\chi(\theta,\tau_i-0),\ i\in L\setminus L_R;\quad d'\dot\chi\left(\theta,\tau^i+0\right),\ i\in L_*\setminus L^R\right)=0, \tag{5}$$

$$G_4(\theta)=\sum_{i\in L}\mu_i\cdot\overline{v}_i-1=0,\ \ G_5(\theta)=\left(\psi'\left(\theta,t_{ij}\right)b,\ j=\overline{1,p_i};\ i=\overline{0,p-l_0}\right)=0,$$

$$G_6(\theta)=\left(\overline{v}_i-\psi'(\theta,\tau_i+0)b/d'b,\ i\in L_R\right)=0,\ \ G_7(\theta)=\left(\psi'\left(\theta,\tau^i\right)b/d'b,\ i\in L^R\right)=0.$$

Здесь

$$\theta=\left(\alpha;t_{ij},\ i=\overline{1,p_i};\ i=\overline{0,p-l_0};\ \tau_i,\ i\in L;\ \tau^i,\ i\in L_*;\overline{v}_i,\ i\in L;\ y\right), \tag{6}$$

$\chi(\theta,t),\ \psi(\theta,t),\ t\in T,$ – решение системы

$$\dot\chi=A(\theta,t)\chi+b\omega(\theta,t),\quad \chi(0)=x_0, \tag{7}$$

$$\dot\psi=-A'(\theta,t)\psi,\ \ \psi'\left(t^*\right)=-y'H,\ \ \psi(\tau_i-0)=\psi(\tau_i+0)-d\overline{v}_i,\ \ i\in L; \tag{8}$$

$$A(\theta,t)=A,\ t\in T\setminus\bigcup_{i\in L_*}\left[\tau_i,\tau^i\right];\ A(\theta,t)=ZA,\ \omega(\theta,t)=0,\ t\in\left[\tau_i,\tau^i\right],\ i\in L_*; \tag{9}$$

$$\omega(\theta,t)=(-1)^j k_i,\ t\in\left[t_{ij},t_{ij+1}\right[,\ \ j=\overline{0,p_i},\quad i=\overline{0,p-l_0};\ \left(t_{0i}=\tau^i,\ t_{ip_i+1}=\tau_{i+1}\right).$$

Исследуем достаточные условия, при выполнении которых система (6) имеет единственное решение в окрестности точки $\theta=\theta^0$ (4) и это решение системы может быть построено методом Ньютона.

Введём в рассмотрение функцию $\eta(t)=\eta(\theta,t),\ t\in T$:

$$\eta(t)=\omega(\theta,r),\ t\in T\setminus\bigcup_{i\in N_*}\left[\tau_i,\tau^i\right[,\ \ \eta(t)=-d'A\chi(\theta,t)/d'b,\ t\in\left[\tau_i,\tau^i\right[,\ \ i\in N_*.$$

Будем считать $\Delta\eta(t)=\eta(t-0)-\eta(t+0)$.

В векторе параметров θ выделим компоненты $\theta=\left(\theta_{(1)},\theta_{(2)},\theta_{(3)},\theta_{(4)}\right)$,

$$\theta_{(1)}=\left(\alpha,\ t_{ij},\ j=\overline{1,p_i};i=\overline{0,p};\ \tau_i,\ i\in N_{*r};\ \tau^i,\ i\in N_*^r\right),$$

$$\theta_{(2)}=y,\ \ \theta_{(3)}=\left(\overline{v}_i,\ i\in N\right),\ \ \theta_{(4)}=\left(\tau_i,\ i\in N\setminus N_{*r};\ \tau^i,\ i\in N_{*n}^r\right).$$

Подсчитаем матрицу Якоби уравнений (5) относительно векторов параметров θ.

$$\Phi(\theta)=\begin{pmatrix}\overline{A}(\theta) & B(\theta)\\ D(\theta) & \tilde{A}(\theta)\end{pmatrix},$$

где

$$\overline{A}(\theta)=\begin{pmatrix}\partial G_i/\partial\theta_{(1)}\\ i=\overline{1,3}\end{pmatrix}=\overline{A}(\theta)\,diag\left(-1;\Delta\eta(t),t\in T_{(1)}\right),$$

$$T_{(1)}=\left\{t_{ij},\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{0,p};\ i\in N_{*r};\ i\in N_*^r\right\},\ \ T_{(4)}=\left\{\tau_i,\ i\in N\setminus N_{*r};\ i\in N_{*n}^r\right\}.$$

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}A_i(\theta)\\ i=\overline{1,3}\end{pmatrix},\ \ A_1(\theta)=\left(0;\ HF_\theta\left(t^*,t\right)b,\ t\in T_{(1)}\right),$$

$$A_2(\theta)=\begin{pmatrix}1;\ d'F_\theta(\tau_k,t)b,\ t\in T_{(1)}\\ k\in N\end{pmatrix},\ \ A_3(\theta)=\begin{pmatrix}0;\ d'AF_\theta(\tau,t)b,\ t\in T_{(1)}\\ \tau\in T_{(4)}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}(\theta)=\begin{pmatrix}\partial G_i/\partial\theta_{(j)},\ j=\overline{2,4}\\ i=\overline{4,7}\end{pmatrix}=A'(\theta)\,diag\left(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{m+p},\mu(\tau),\ \tau\in T_{(4)}\right),$$

где числа $\mu(\tau),\ \ \tau\in T_{(4)},$ определим следующим образом

$$\mu\left(\tau^i\right)=\frac{\psi'\left(\tau^i\right)b}{d'b},\ \ \mu\left(\tau_i\right)=\frac{\psi'\left(\tau_i-0\right)b}{d'b},\ \ i\in N_*,\ \ \mu\left(\tau_i\right)=\overline{\nu}_i,\ \ i\in N_0.$$

$$D(\theta)=\begin{pmatrix}\partial G_i/\partial\theta_{(1)}\\ i=\overline{4,7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_i\\ i=\overline{4,7}\end{pmatrix}+diag\Big(0,\dot\psi'\left(\theta,t_{ij}\right)b,\ j=\overline{1,p_i},\ i=0,p,$$

$$\dot\psi'\left(\theta,\tau_i-0\right)b,\ i\in N_{*r},\ \dot\psi'\left(\theta,\tau^i+0\right)b,\ i\in N_*^r\Big),\ \ D_4=0,$$

$$D_5=\Big(0,\ \psi'\left(\theta,\tau_k-0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_\theta\left(\tau_k,\tau_i\right)b,\ i,k\in N_{*r},\ k\neq i,$$

$$-\psi'\left(\theta,\tau^k+0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_\theta\left(\tau^k,\tau_i\right)b,\ i,k\in N_{*r},\ k\in N_*^r\Big),$$

$$D_6=\Big(0,\ \psi'\left(\theta,\tau_k-0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_{(\theta)}\left(\tau_k,\tau^i\right)b,\ i\in N_*^r,\ k\in N_{*r},$$

$$-\psi'\left(\theta,\tau^k+0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_\theta\left(\tau^k,\tau^i\right)b,\ i,k\in N_*^r,\ k\neq i\Big),$$

$$D_7=\Big(0,\ \psi'\left(\theta,\tau_k-0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_\theta\left(\tau_k,\tau^i\right)b,\ i\in N_*^r,\ k\in N_{*r},$$

$$-\psi'\left(\theta,\tau^k+0\right)\frac{bd'}{d'b}AF_\theta\left(\tau^k,\tau^i\right)b,\ i,k\in N_*^r,\ k\neq i\Big).$$

$$B(\theta)=\begin{pmatrix}\partial G_i/\partial\theta_{(j)},\ j=\overline{2,4}\\ i=\overline{1,3}\end{pmatrix},$$

$$\partial G_i/\partial\theta_{(j)}=0,\ \ i=\overline{1,3};\ \ j=\overline{2,3};\ \ \partial G_1/\partial\theta_{(4)}=\left(HF_\theta\left(t^*,t\right)b\Delta\eta(t),\ t\in T_{(4)}\right),$$

$$\partial G_2/\partial\theta_{(4)}=\begin{pmatrix}d'F_\theta\left(\tau_k,t\right)b\Delta\eta(t),\ t\in T_{(4)}\\ k\in N\end{pmatrix},$$

$$\partial G_3/\partial\theta_{(4)}=\begin{pmatrix}d'AF_\theta\left(\tau_k,t\right)\ b\Delta\eta(t),\ t\in T_{(4)}\\ \tau\in T_{(4)}\end{pmatrix}+$$

$$+diag\Big(d'A\dot\chi\left(\theta,\tau_i-0\right)-d'Ab\Delta\eta\left(\tau_i\right),\ i\in N\setminus N_{*r};$$

$$d'A\dot\chi\left(\theta,\tau^i+0\right)-d'Ab\Delta\eta\left(\tau^i\right),\ i\in N_{*n}^r\Big),$$

$F_\theta\left(t,\tau\right),\ t\geq\tau,$ – фундаментальная матрица решений системы

$$\dot x=A\left(\theta,t\right)x;\ \ F_\theta\left(t,\tau\right)\equiv0,\ \ t>\tau.$$

Исследуем матрицу $\Phi(\theta)$ при $\theta=\theta^0$, где θ^0 – решение уравнений (5). В матрице $\Phi\left(\theta^0\right)$ блоки $B\left(\theta^0\right)$ и $D\left(\theta^0\right)$ принимает вид

$$B\left(\theta^0\right)=diag\left(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m+p},\ d'\ddot\chi\left(\theta^0,\tau_i^0-0\right),\ i\in N\setminus N_{*r},\ d'\ddot\chi\left(\theta^0,\tau^{0i}+0\right),\ i\in N_{*n}^r\right)$$

$$D\left(\theta^0\right)=diag\Big(0,\ \dot\psi'\left(\theta^0,t_{ij}^0\right)b,\ j=\overline{1,p_i},\ i=\overline{0,p},$$

$$\dot\psi'\left(\theta^0,\tau_i^0-0\right)b,\ i\in N_{*r};\ \dot\psi'\left(\theta^0,\tau^{0r}+0\right)b,\ i\in N_*^r.$$

Очевидно, что матрица $\Phi\left(\theta^0\right)$ невырождена тогда и только тогда, когда невырождена матрица

$$\bar{\Phi}(\theta^0) = \begin{pmatrix} A(\theta^0) & \bar{B}(\theta^0) \\ \bar{D}(\theta^0) & A'(\theta^0) \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{B}(\theta^0) = diag\left(\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{m+p}, b_i = d'\ddot{\chi}(\theta^0, \tau_i^0 - 0) / \mu(\tau_i^0), i \in N \setminus N_{*r}, \right.$$

$$\left. b^i = d'\ddot{\chi}(\theta^0, \tau^{0i} + 0) / \mu(\tau^{0i}), i \in N_{*n}^r \right);$$

$$D(\theta^0) = diag\left(0, d_{ij} = \dot{\psi}'(\theta^0, t_{ij}^0)\, b / \Delta\eta(t_{ij}^0), j = \overline{1, p_i}, i = \overline{0, p},\right.$$

$$d_i = \dot{\psi}'(\theta^0, \tau_i^0 - 0)\, b / \Delta\eta(\tau_i^0), i \in N_{*r};$$

$$\left. d^i = \dot{\psi}'(\theta^0, \tau^{0r} + 0) b / \Delta\eta(\tau^{0i}), i \in N_*^r \right).$$

По построению

$$b_i \geq 0,\ i \in N \setminus N_{*r};\ b^i \geq 0,\ i \in N_{*n}^r;$$

$$d_{ij} \leq 0,\ j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{0, p};$$

$$d_i \leq 0,\ i \in N_{*r};\ d^i \leq 0,\ i \in N_*^r.$$

Из соотношений оптимальность (2.3) следует, что

$$b_i \geq 0,\ i \in N \setminus N_{*r};\ b^i \geq 0,\ i \in N_{*n}^r;$$

$$d_{ij} \leq 0,\ j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{0, p};$$

$$d_i \leq 0,\ i \in N_{*r};\ d^i \leq 0,\ i \in N_*^r.$$

Лемма. Пусть

$$\dot{\psi}^{0/}(t_{ij}^0) b \neq 0,\ \ j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{0, p},\ \dot{\psi}^{0/}(\tau_i^0)\, b \neq 0,\ i \in N_{*r},$$

$$\dot{\psi}^{0/}(\tau^{0i} + 0)\, b \neq 0,\ i \in N_*^r,$$

$$d'\ddot{x}^0(\tau_i^0) \neq 0,\ i \in N \setminus N_{*r},$$

$$d'\ddot{x}^0(\tau^{0i} + 0) \neq 0,\ i \in N_{*n}^r,$$

$$rank \begin{pmatrix} A_1(\theta^0) \\ A_1(\theta^0) \end{pmatrix} = m + p,$$

тогда матрица $\bar{\Phi}(\theta^0)$ невырождена.

Литература

1 Алёшин, Н. А. Структура и определяющие элементы специальной задачи оптимального управления / Н. А. Алешин // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» – г. Брест 19–20 октября 2017 г.

2 Алёшин, Н. А. Критерий оптимальности специальной задачи оптимального управления / Н. А. Алешин, Г. Л. Карасёва // «Творчество молодых – 2017»: Сборник научных работ студентов, магистрантов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины» в 4-х частях / М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – Ч. 1. – С. 167–170.