

Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \left(2 \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{r^2} \right)^n = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(2 \frac{a}{r} \cos \theta \right)^i \left(\frac{a^2}{r^2} \right)^{n-i} = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^{i+2n-2i} \sum_{i=0}^n 2^i \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{n!}{i!(n-i)!} (\cos \theta)^i = \\ &= \frac{ke}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^m P_m(\cos \theta).\end{aligned}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получим:

– потенциал, создаваемый двумя зарядами равен: $\varphi(r, \theta) = k \frac{P}{r^2} P_1(\cos \theta)$, где $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$. При $\theta = 0$ получим: $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{P}{r^2}$, при $\theta = \pi$: $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{P}{r^2}$, что совпадает с полученными ранее результатами;

– потенциал, создаваемый тремя зарядами равен: $\varphi(r, \theta) = k \frac{D}{r^3} P_2(\cos \theta)$, где $P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$. При $\theta = 0$ получим: $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{D}{r^3}$, при $\theta = \pi$: $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{D}{r^3}$; потенциал, создаваемый четырьмя зарядами равен: $\varphi(r, \theta) = k \frac{Q}{r^4} P_3(\cos \theta)$, где $P_3(\cos \theta) = \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2}$. При $\theta = 0$ получим: $\varphi(r, \theta) \cong k \frac{Q}{r^4}$, при $\theta = \pi$: $\varphi(r, \theta) \cong -k \frac{Q}{r^4}$.

Таким образом, мультиполи, образованные зарядами, расположенными на плоскости или в пространстве, можно заменить меньшим количеством зарядов, расположенных на одной прямой.

Литература

1 Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Изд. 7-е. – М.: Наука, 1988. – 512 с. – Т. II. Теоретическая физика.

УДК 539.4:621.6

Е. А. Голубева, Р. А. Аль-Абси

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Рассматривается труба из неоднородных материалов под действием внутреннего давления с учетом явлений ползучести и релаксации. Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в трубе. Создается алгоритм и строится математическая модель реализации расчета напряжений и деформаций в трубе, затем строится вычислительная программа, по которой определяется напряжение и деформации в трубе из неоднородных материалов с учетом явлений ползучести и релаксации.

В представленной работе объектом исследования является труба из неоднородного материала под действием внутреннего давления с внутренним радиусом a и внешним радиусом R ; P – давление, оказанное на внутреннюю поверхность (рисунок 1):

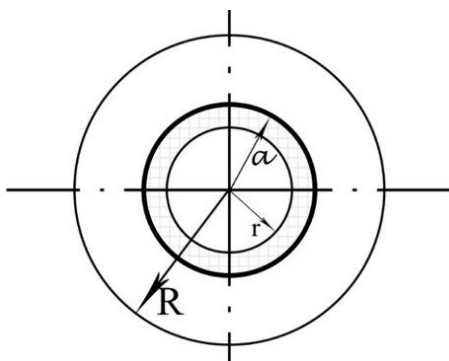


Рисунок 1 – Модель трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления

При исследовании напряженно-деформированного состояния трубы на основании решения упругой задачи используем методы расчета, представленные в работе [2]. Для рассматриваемой задачи деформации ε_r и ε_θ связаны с перемещением u формулами:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Для упругой задачи связь между напряжением и деформацией имеет следующий вид:

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta.$$

Напряжения σ_r и σ_θ удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия [2]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

Общее решение примет вид: $u = Ar^{m_1} + Br^{m_2}$.

Получим выражения:

– для напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} \left(r^{m_1} - r^{m_2}\right) r^{\beta-1}}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right)}, \quad \sigma_\theta = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (\eta_1 - \eta_2) r^\beta}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) (m_1(v-1) - v)(m_2(v-1) - v)};$$

– для деформаций:

$$\varepsilon_\theta = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+v)(1-2v)(r^{m_1-1} + r^{m_2-1})}{E_0 \left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2},$$

$$\varepsilon_r = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+v)(1-2v)(m_1 r^{m_1-1} \omega_2 + m_2 r^{m_2-1} \omega_1)}{E_0 \left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2}.$$

При написании компьютерной программы для расчета деформаций в трубе во времени использовали [2], получили формулы для нахождения деформаций.

Так, деформации и перемещение в вязкоупругой задаче при действии внутреннего давления $p(t)$ по принципу Вольтера выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta(r, t) &= -\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1-1} + r^{m_2-1})}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p, \\ \varepsilon_r(r, t) &= -\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(m_1 r^{m_1-1} \omega_2 + m_2 r^{m_2-1} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p, \\ u(r, t) &= -\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)(r^{m_1} \omega_2 + r^{m_2} \omega_1)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}\right) \omega_1 \omega_2} \tilde{E}_0^{-1} \cdot p,\end{aligned}$$

здесь оператор $\tilde{E}_0^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{E_0} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right]$ действует на функцию давления $p(t)$, а также введены обозначения $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – функция влияния (ядро ползучести, ядро релаксации), E – модуль упругости, t – время наблюдения.

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [3]:

$$R(\tau) = A' \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta' \tau^\alpha; \alpha); \quad K(\tau) = A' \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta \tau^\alpha; \alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг – Леффлера $E_p(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр, A' , β , λ , α – реологические параметры.

Были рассмотрены различные примеры реализации расчета напряжения и деформации, а также был разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, которая реализовывает расчет напряженно-деформированного состояния в трубе из неоднородных материалов для упругой задачи.

На основании решения упругой задачи для неоднородной трубы было построено решение для вязкоупругого случая, в котором характеристики трубы изменяются во времени. Результаты для вязкоупругой задачи представлены на рисунке 2 и созданы в среде Mathcad с использованием слабосингулярного ядра Ржаницына – Колтунова при $\delta' = 0$ в виде графиков, берем $R(t) = A e^{-\lambda t} t^{\alpha-1}$ и резольвенту

$$K(t) = A t^{-1} e^{-\lambda t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A \Gamma(\alpha) t^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha)} \right],$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $A = 0,015$, $\lambda = 0,05$, $\alpha = 0,075$ определялись с помощью обработки результатов эксперимента по методу наименьших квадратов.

Экспериментальные исследования подтверждают достоверность предложенных теоретических зависимостей для определения параметров ядра Ржаницына – Колтунова и его резольвент. Разработанная методика позволяет исследовать и создавать методы для реализации расчета напряженно-деформированного состояния труб из неоднородных материалов, а также определять их физико-механические свойства. Предлагаемые

подходы могут быть использованы в теплоэнергетике, а также машиностроении и других конструкциях из композитов.

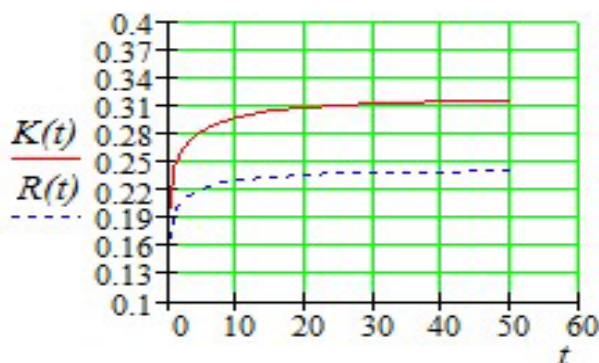


Рисунок 2 – Графики, иллюстрирующие изменения ядер $R(t)$ и $K(t)$ во времени, необходимых для описания явлений релаксации и ползучести

Литература

- 1 Колтунов, М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. – М., 1976. – 276 с.
- 2 Tutuncu, N. Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels / N. Tutuncu, M. Ozturk // Composites: Part B. – 2001. – № 32. – Р. 683–686.
- 3 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Мн., 1988. – 271 с.

УДК 621.893

Ф. А. Григорьев

ТРИБОТЕХНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, КОРРОЗИОННАЯ АКТИВНОСТЬ И ОКИСЛИТЕЛЬНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ РАСТИТЕЛЬНЫХ МАСЕЛ

Исследованы образцы рапсового, подсолнечного, кукурузного и льняного масел. Приведены результаты триботехнических испытаний масел на четырехшариковой машине трения, оценки их коррозионной активности и окислительной стабильности. Обоснован выбор рапсового масла для создания биоразлагаемых смазочных материалов, показана возможность применения льняного масла в качестве противоизносной присадки.

Расширение жизненного пространства человека влечет за собой негативные последствия для окружающей среды. Одним из возможных путей уменьшения влияния техногенных факторов на живую природу является применение биоразлагаемых смазочных материалов в машиностроении и промышленности [1].

Несмотря на значительный интерес, проявляемый в настоящее время к растительным маслам, в современной литературе встречаются противоречивые сведения об их триботехнических свойствах. Так, например, в работе [2] делается вывод, что чистое рапсовое масло не обладает явными преимуществами в сравнении с чистым минеральным, в то время как данные, приведенные в [3], свидетельствуют об обратном.

По сравнению с минеральными маслами смазочные материалы на основе растительного сырья являются возобновляемым ресурсом и утилизируются за счет естественных процессов разложения. Одним из их недостатков является высокая коррозионная активность. Известно, что до 12% состава растительных масел составляют жирные