Тема 7 Детерминированные модели операций

Линейное программирование

Задачи оптимизации, в которых целевая функция линейна относительно независимых переменных (т.е. имеет вид $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - константы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - переменные, n-произвольное натуральное число), а условия, которые определяют допустимые значения этих переменных, имеют вид линейных уравнений и неравенств, относят к задачам *линейного программирования*

Начало линейному программированию положил в 1939 году советский математик-экономист Л. В. Канторович в своей работе «Математические методы организации и планирования производства». Позже американский математик Дж. Данциг предложил метод решения задач линейного программирования – симплексный метод, который до сегодняшнего дня является эффективнейшим.

Линейное программирование было развито в связи с задачами экономики, с поиском способов оптимального решения с использованием ограниченных ресурсов. Развитие и усложнение экономических процессов и вычислительной техники стимулирует широкое использование математических методов в управлении, содействует возрастанию роли линейного программирования как одного из актуальных разделов прикладной математики. «Семь раз примерь, один - отрежь», - говорит пословицам.

Исследование операций как раз и есть своеобразное математическое «примеривание» будущих решений, позволяющее экономить время, силы и материальные средства, избегать серьезных ошибок, на которых уже нельзя «учиться» (слишком дорого это обходится). Это сравнительно молодая наука (хотя понятие «молодости» в научном мире относительно; многие, едва возникшие науки «истлевают на корню», так и не найдя приложений).

Впервые название «исследование операций» появилось в годы второй мировой войны, когда в вооруженных силах некоторых стран (США, Англии) были сформированы специальные группы научных работников (физиков, математиков, инженеров), в задачу которых входила подготовка проектов решений для командующих боевыми действиями. Эти решения касались главным образом боевого применения оружия и распределения сил и средств по различным объектам. Подобного рода задачами (правда, под иными названиями) занимались и ранее, в частности, в нашей стране.

В дальнейшем исследование операций расширило область своих применений на самые разные области практики: промышленность, сельское хозяйство, строительство, торговля, бытовое обслуживание, транспорт, связь, здравоохранение, охрана природы и т. д.

Графический метод решения задач линейного программирования

Интерпретация метода

Наиболее наглядна интерпретация графического метода решения задачи линейного программирования для случая n =2. Оптимальный план, как правило, соответствует какой-то вершине многоугольника, изображающего допустимую область. Положение прямой, задающей целевую функцию, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи.

Первый шаг при использовании графического метода заключается в геометрическом представлении допустимых решений, т.е. построении области (допустимых) решений, в которой *одновременно* удовлетворяются все ограничения модели.

Пусть задана следующая модель:

найти max $z=3x_1+2x_2$

при ограничениях:

$$x_1+2x_2\le 6 \quad (1),$$

$$2x_1+x_2\le 8 \quad (2),$$

$$-x_1+x_2\le 1 \quad (3),$$

$$x_2\le 6 \quad (4),$$

$$x_1,x_2 \ge 0.$$

Условия неотрицательности переменных $x_1\ge 0$ и $x_2\ge 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом . Другие границы пространства решений изображены на плоскости x_1, x_2 прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака $\le$ на знак = . Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное пространство решений - многоугольник *ABCDEF* - показан на рис. 1.1.

В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений *ABCDEF,* все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются допустимыми.

Пространство решений содержит бесконечное допустимых решений. Оптимальное решение можно найти, если выяснить, в каком направлении возрастает целевая функция модели $z=3\ x_1\ +2\ x_2$. Для этого наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях z, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение. Чтобы найти оптимальное решение следует перемещать прямую, характеризующую доход, в направлении возрастания целевой функции, до тех пор пока она не сместится в область недопустимых решений. На рисунке видно, что оптимальному решению соответствует точка C.

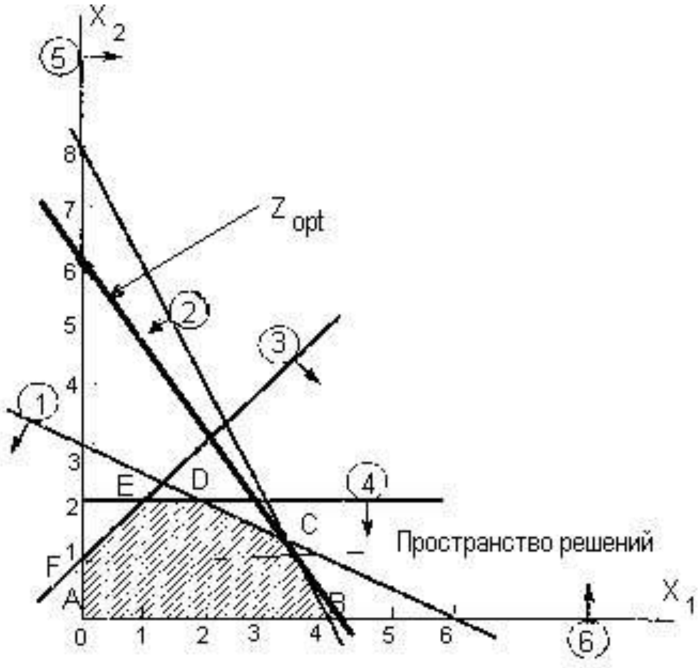

Рисунок 1.1. Многоугольник решений.

Так как точка *C* является точкой пересечения прямых (1) и (2), значения x_1 и x_2 в этой точке определяются решением системы двух уравнений:

$$x_1 + 2x_2 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 = 8.$$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$. Доход, получаемый в этом случае, составит $z = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3$.

Анализ на чувствительность

Первая задача. Анализ на **чувствительность к правой части ограничений** позволяет ответить на вопрос о допустимом изменении ресурсов без изменения точки оптимума, которая задаётся пересечением прямых (на рисунке 1.1 прямые (1) и (2)).Ограничения, задающие точку пересечения называют связывающими (активными), остальные ограничения не связывающими (неактивными). Для связывающего ограничения соответствующий ресурс называют дефицитным (он использован полностью), остальные – недефицитные. При анализе на чувствительность дефицитные ресурсы повышаются, что приводит к улучшению целевой функции, недефицитные уменьшаются. Изменения ресурсов не должны изменить найденное решение.

Для нашего примера увеличение дефицитного ресурса ограничения (1) приводит к её параллельному сдвигу и возможно до точки пересечения прямых (2) и (4). Координаты точки определяются решением системы уравнений (2)и (4), их решение $x_1=3$, $x_2=2$ и подстановка в (1) даёт $x_1+2x_2=7$. Аналогичные рассуждения для ограничения (2) дают нам точку пересечения прямых (1) и (6), откуда следует $x_1=6$, $x_2=0$ и подстановка в (2) даёт $2x_1+x_2=12$.

Для несвязывающего ограничения (4) прямую можно опустить до точки (C), координаты которой задают прямые (1) и (2), следовательно уравнение (4) примет вид x_2=4/3. Прямую (3) также можно опустить до точки оптимума (C) и ограничение примет вид: $-x_1+x_2=-2$.

Вторая задача анализа на чувствительность отвечает на вопрос: увеличение объёма какого из ресурсов наиболее выгодно? Для этого рассчитывается **ценность ресурса** как относительное приращение значения целевой функции $y_i=\Delta z_i/\Delta_i$ ресурса. Результаты анализа сводятся в таблицу. Из таблицы 1 видно, что выгоднее вначале увеличивать ресурс (2).

Таблица 1.1. Изменение ресурсов и их ценность

Ресурс	Тип	Max изменение Δ_i ресурса	Изменение дохода Δz_i	Ценность $y_i=\Delta z_i/\Delta_i$
1	Дефицит	7-6= 1	13-38/3=1/3	1/3
2	Дефицит	12-8= 4	18-38/3=16/3	4/3
3	Недефицит	-2-1= -3	0	0
4	Недефицит	4/3-2= -2/3	0	0

Третья задача анализа на чувствительность отвечает на вопрос допустимого **изменения коэффициентов целевой функции**. Вариация коэффициентов может привести к другому решению, поэтому обычно решается вопрос : каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции не меняющий решения. Изменение одного из коэффициентов целевой функции меняет угол наклона прямой, отображающей целевую функцию, не изменяя при этом точку оптимума, что приводит к вращению прямой вокруг точки оптимума в секторе прямых, определяющих решение. Так, для нашего примера, сектор задаётся прямыми (1) и (2), в котором проходит прямая Z_{opt}. Записав целевую функцию $z=3x_1+2x_2$ в виде $z=C_1x_1+C_2x_2$, фиксируя один из коэффициентов и приравнивая поочередно к прямым (1) и (2), находим допустимый диапазон.

Таблица 1.2. Изменение коэффициентов целевой функции

Коэффициент	Min	Max
C_1	1	4
C_2	3/2	6

Симплекс – алгоритм.

Стандартная модель

Для построения общего метода решения задач ЛП соответствующие модели должны быть представлены в *стандартной форме*:

1) все ограничения записываются в виде равенств с *неотрицательной правой частью;*

2) значения всех переменных модели неотрицательны;

3) целевая функция подлежит максимизации или минимизации.

Любую линейную модель можно привести к стандартной по следующим правилам:

1. Исходное ограничение, записанное в виде неравенства типа ≤ (≥), можно представить в виде равенства, прибавляя остаточную переменную к левой части ограничения (вычитая избыточную переменную из левой части).

2. Правую часть равенства всегда можно сделать неотрицательной, умножая обе части, на -1.

3. Любую переменную y_i, не имеющую ограничения в знаке, можно представить как разность двух *неотрицательных* переменных:

$y_i=y'_i-y''_i$, где $y'_I,y''_i\geq 0$.

Такую подстановку следует использовать во всех ограничениях, которые содержат исходную переменную y_i, а также в выражении для целевой функции. Обычно находят решение задачи, в котором фигурируют переменные y'_i и y''_i , а затем с помощью обратной подстановки определяют величину y_i. Важная особенность переменных y'_i и y''_i состоит в том, что при любом допустимом решении только одна из этих переменных может принимать положительное значение, т. е. если $y'_i >0$ то $y''_i=0$, и наоборот. Это позволяет рассматривать y'_i как *остаточную* переменную, а y''_i — как *избыточную* переменную, причем лишь одна из этих переменных может принимать положительное значение.

Стандартная модель может быть записана в форме уравнений, в матричной форме или в виде таблицы.

Симплекс-метод

При анализе графического метода решения задач линейного программирования было отмечено, что оптимальному решению всегда соответствует одна из *угловых* (или *экстремальных)* точек пространства решений. Именно этот результат и положен в основу построения симплекс-метода.

Симплекс-метод не обладает той наглядностью, которая характерна для геометрического представления пространства решений. В его вычислительной схеме реализуется упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой исходной *допустимой* угловой точки (обычно начала координат), осуществляются последовательные переходы от одной *допустимой* экстремальной точки к другой до тех пор, пока не будет найдена точка, соответствующая оптимальному решению.

Идею симплекс-метода можно проиллюстрировать на примере модели, рассмотренной выше при графическом решении. Исходной точкой алгоритма является начало координат (точка *А* на рисунке). Решение, соответствующее этой точке, обычно называют *начальным решением.* От исходной точки осуществляется переход к некоторой смежной угловой точке. В рассматриваемом случае это может быть либо точка В, либо точка *F*. Выбор точки зависит от коэффициентов целевой функции. Так как коэффициент целевой функции при x_1 больше коэффициента при x_2, а целевая функция подлежит *максимизации,* требуемое направление перехода соответствует увеличению x_1, что приводит к экстремальной точке В. После этого указанный процесс повторяется, чтобы выяснить, существует ли другая экстремальная точка, соответствующая лучшему допустимому решению (в данном случае большему значению целевой функции). Используя, как и ранее, информацию о целевой функции, можно определить, имеется ли на данном шаге алгоритма такая точка. В результате такой итеративный процесс позволяет найти оптимальную угловую точку С.

Выбор каждой последующей экстремальной точки при использовании симплекс-метода определяется следующими двумя правилами:

1. Каждая *последующая* угловая точка должна быть *смежной* с предыдущей. Например, в пространстве решений, изображенном на рисунке 1.1, невозможен прямой переход от точки А к точке С. Этот переход осуществляется по *границам* (ребрам) пространства решений: от точки А к точке В и лишь затем от точки В к точке С.
2. Обратный переход к предшествующей экстремальной точке не может производиться. Так, при движении в пространстве решений, представленном на рисунке 1.1, не должно быть обратного перехода от точки В к точке А.

Подводя итог изложению идей симплекс-метода, еще раз обратим внимание на то, что отыскание оптимального решения начинается с некоторой *допустимой* угловой точки, и все переходы осуществляются только к *смежным* точкам, причем перед новым переходом каждая из полученных точек проверяется на оптимальность. Таким образом, в данном случае для нахождения оптимального решения требуются три итерации (получаемые решения изображаются точками А, В и С).

Свойство однозначности экстремальных точек позволяет определить их *алгебраическим* методом. Будем считать, что линейная модель стандартной формы содержит *m* уравнений и n неизвестных ($m \le n$), а правые части ограничений - неотрицательные. Тогда все допустимые экстремальные точки определяются как все однозначные неотрицательные решения системы m уравнений, в которых n - m переменных равны нулю.

Однозначные решения такой системы уравнений, получаемые путем приравнивания к нулю *(n* - m) переменных, называются *базисными решениями.* Если базисное решение удовлетворяет требованию неотрицательности правых частей, оно называется *допустимым базисным решением.* Переменные, имеющие нулевое значение, называются *небазисными переменными,* остальные — *базисными переменными.*

Из вышеизложенного следует, что при реализации симплекс-метода алгебраическое определение базисных решений соответствует идентификации экстремальных точек, осуществляемой при геометрическом представлении пространства решений. Таким образом, максимальное число итераций при использовании симплекс-метода равно максимальному числу базисных решений задачи линейного программирования, представленной в стандартной форме. Это означает, что количество итерационных процедур симплекс-метода не превышает $C_m^n = n!/[(n-m)!m!]$.

Вторая из ранее отмеченных закономерностей оказывается весьма полезной для построения вычислительных процедур симплекс-метода, при реализации которого осуществляется последовательный переход от одной экстремальной точки к другой, смежной с ней. Так как смежные экстремальные точки отличаются только *одной* переменной, можно определить каждую последующую (смежную) экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных (нулевых) переменных текущей базисной переменной. Любую последующую экстремальную точку всегда можно определить путем взаимной замены по одной переменной в составе базисных и небазисных переменных (предыдущей смежной точки). Этот фактор существенно упрощает реализацию вычислительных процедур симплекс-метода.

Рассмотренный процесс взаимной замены переменных приводит к необходимости введения двух новых терминов. Включаемой переменной называется небазисная в данный момент переменная, которая будет включена в множество базисных переменных на следующей итерации (при переходе к смежной экстремальной точке). *Исключаемая переменная* — это та базисная переменная, которая на следующей итерации подлежит исключению из множества базисных переменных.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Используя линейную модель стандартной формы, определяют *начальное допустимое базисное решение* путем приравнивания к нулю *n-m* (небазисных) переменных.

Шаг 1. Из числа текущих небазисных (равных нулю) переменных выбирается *включаемая в новый базис переменная,* увеличение которой обеспечивает улучшение значения целевой функции. Если такой переменной нет, вычисления прекращаются, так как текущее базисное решение оптимально. В противном случае осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. Из числа переменных текущего базиса выбирается *исключаемая переменная,* которая должна принять нулевое значение (стать небазисной) при введении в состав базисных новой переменной.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым составам небазисных и базисных переменных. Осуществляется переход к шагу 1.

Поясним процедуры симплекс-метода на примере рассмотренной выше модели.

Сначала необходимо представить целевую функцию и ограничения модели в стандартной форме:

$$z-3x_1-2x_2=0 \quad \text{(целевая функция)}$$

$$x_1+2x_2+s_1=6$$

$$
\begin{array}{llll}
2x_1 + x_2 & +s_2 & & =8 \\
-x_1 + x_1 & & +s_3 & =1 \\
\quad x_2 & & & +s_4=2
\end{array}
\qquad \text{(ограничения).}
$$

Как отмечалось ранее, в качестве начального пробного решения используется решение системы уравнений, в которой две (6—4) переменные принимаются равными нулю. Это обеспечивает *единственность* и *допустимость* получаемого решения. В рассматриваемом случае очевидно, что подстановка $x_1=x_2=0$ сразу же приводит к следующему результату: $s_1=6$, $s_2=8$, $s_3=1$, $s_4=2$ (т. е. решению, соответствующему точке А на рисунке 1.1). Поэтому точку А можно использовать как начальное допустимое решение. Величина z в этой точке равна нулю. Преобразовав уравнение целевой функции так, чтобы его правая часть стала равной нулю, можно убедиться в том, что правые части уравнений целевой функции и ограничений полностью характеризуют начальное решение. Это имеет место во всех случаях, когда начальный базис состоит из *остаточных* переменных.
Полученные результаты удобно представить в виде таблицы 1.3.

Таблица 1.3. Исходная симплекс-таблица.

Базисные переменные	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**
Z	1	-3	-2	0	0	0		0
S_1	0	1	2	01	0	0		6
S_2	0	2	1	0	1	0	0	8
S_3	0	-1	1	0	0	1		1
S_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Таблица 1.3 интерпретируется следующим образом. Столбец «Базисные переменные» содержит переменные пробного базиса s_1, s_2, s_3, s_4, значения которых приведены в столбце «Решение». При этом подразумевается, что небазисные переменные x_1 и x_2 (не представленные в первом столбце) равны нулю. Значение целевой функции $z=3\times0+2\times0+0\times6+0\times8+0\times1+0\times2$ равно нулю, что и показано в последнем столбце таблицы.

Так как столбец z в анализе не участвует, то его из таблицы можно исключить.

Как определить, является ли полученное пробное решение наилучшим (оптимальным)? Анализируя z-уравнение, нетрудно заметить, что обе небазисные переменные x_1 и x_2, равные нулю, имеют *отрицательные* коэффициенты. Это эквивалентно наличию *положительных* коэффициентов при этих переменных в исходной целевой функции. Так как мы имеем дело с задачей *максимизации,* значение z может быть улучшено при увеличении как x_1, так и x_2 . Однако всегда выбирается переменная с большим абсолютным значением отрицательного коэффициента (в z-уравнении), так как в этом случае оптимум достигается быстрее.

Это правило составляет основу используемого в вычислительной схеме симплекс-метода условия оптимальности, которое состоит в том, что, если в задаче максимизации *все* небазисные переменные в z-уравнении имеют *неотрицательные* коэффициенты, полученное решение является оптимальным. В противном случае в качестве новой базисной переменной следует выбрать ту, которая имеет наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Применяя условие оптимальности к таблице 1.3, выберем в качестве переменной, включаемой в базис, переменную x_1. Исключаемая переменная должна быть выбрана из совокупности базисных переменных s_1, s_2, s_3, s_4. Процедура выбора исключаемой переменной предполагает проверку *условия допустимости,* требующего, чтобы в качестве исключаемой переменной выбиралась та из переменных текущего базиса, которая первой обращается в нуль при увеличении включаемой переменной x_1 вплоть до значения, соответствующего смежной экстремальной точке. Это должно, конечно, выполняться без использования графического метода решения, однако геометрическая интерпретация поможет сформулировать *условие допустимости* в алгебраическом представлении.

В рамках алгебраического представления каждая из таких точек пересечения определяется отношением постоянной правой части ограничения к соответствующему *положительному* коэффициенту при включаемой переменной x_1 . Если коэффициент при x_1 имеет отрицательное или нулевое значение, прямая, представляющая соответствующее ограничение, не пересекается с осью x_1 в области положительных значений. Переменная x_1 достигает максимально допустимого значения, равного 4, в точке В; при этом исключаемой из базиса переменной становится s_2.

Интересующее нас отношение (фиксирующее искомую точку пересечения и идентифицирующее исключаемую переменную) можно определить непосредственно из симплекс-таблицы 1.2. Для этого в столбце, соответствующем вводимой переменной x_1, вычеркиваются отрицательные и нулевые элементы ограничений. Затем вычисляются отношения постоянных, фигурирующих в правых частях этих ограничений, к оставшимся элементам столбца, соответствующего вводимой переменной x_1. Исключаемой переменной будет та переменная текущего базиса, для которой указанное выше отношение минимально.

Симплекс-таблица 1.4, получаемая после проверки *условия допустимости* (т. е. после вычисления соответствующих отношений и определения исключаемой переменной) приведена ниже. Для удобства описания вычислительных процедур, осуществляемых на следующей итерации, введем ряд необходимых определений. Столбец симплекс-таблицы, ассоциированный с вводимой переменной, будем называть *ведущим столбцом.* Строку, соответствующую исключаемой переменной, назовем *ведущей строкой* (уравнением), а элемент таблицы, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, будем называть *ведущим элементом.*

Ведущий столбец

Таблица 1.4.Определение ведущего элемента.

Базисные переменные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение b	Отношения
z	-3	-2	0	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	0	6	6/1
S_2	2	1	2	1	0	0	8	8/2
S_3	-1	1	0	0	1	0	1	

S_4	0	1	0	0	0	1	2

Ведущая строка

Ведущий элемент

После того как определены включаемая и исключаемая переменные (с использованием условий *оптимальности* и *допустимости),* следующая итерация (поиск нового базисного решения) осуществляется методом исключения переменных, или *методом Гаусса — Жордана.* Этот процесс *изменения базиса* включает вычислительные процедуры двух типов.

Тип 1 (формирование ведущего уравнения).

Новая ведущая строка = Предыдущая ведущая строка/ Ведущий элемент

Тип 2 (формирование всех остальных уравнений, включая z-уравнение).

Новое уравнение = Предыдущее уравнение—

— (*Коэффициент ведущего столбца предыдущего уравнения*) *(Новая ведущая строка).*

Выполнение процедуры типа 1 приводит к тому, что в новом ведущем уравнении ведущий элемент становится равным единице. В результате осуществления процедуры типа 2 все остальные коэффициенты, фигурирующие в *ведущем столбце,* становятся равными нулю. Это эквивалентно получению базисного решения путем *исключения* вводимой переменной из всех уравнений, кроме ведущего.

Применяя к исходной таблице процедуру 1, мы делим s_2-уравнение на ведущий элемент, равный 2. Так как в столбце базисных переменных x_1 занимает место переменной s_2, указанная процедура приводит к следующим изменениям исходной симплекс-таблицы (таблица 1.5).

Таблица 1.5. Новая разрешащая строка.

Базисные переменные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**
Z							
S_1 $\mathbf{X_1}$ S_3 S_4	1	1/2	0	1/2	0	0	8/2=4

Заметим, что в столбце «Решение» теперь фигурирует новое значение переменной x_1(=4), которое равно минимальной величине отношений, анализируемых при проверке условия допустимости.

Чтобы составить новую симплекс-таблицу, выполним необходимые вычислительные процедуры типа 2.

1. z-уравнение.

Предыдущее z-уравнение: (-3 -2 0 0 0 0 0)

-(-3) × Новая ведущая строка: (3 3/2 0 3/2 0 0 12)

=Новое z-уравнение: (1 0 -1/2 0 3/2 0 0 12)

2. s_1-уравнение

Предыдущее s_1-уравнение: (1 2 1 0 0 0 6)

-(1) × Новая ведущая строка: (-1 -1/2 0 -1/2 0 0 -4)

= Новое s_1-уравнение: (0 3/2 1 -1/2 0 0 2)

3. s_3-уравнение.

Предыдущее s_3-уравнение: (-1 1 0 0 1 0 1)

-(-1) × Новая ведущая строка: (1 1/2 0 1/2 0 0 4)

= Новое s_3-уравнение: (0 3/2 0 1/2 1 0 5)

4. s_4-уравнение. Новое s_4-уравнение будет таким же, как и предыдущее, поскольку соответствующий коэффициент ведущего столбца равен нулю.

Новое решение, полученное с помощью рассмотренных операций, представлено в таблице 1.6.

В новом решении x_1=4 и x_2=0 (точка B на рисунке 1.1). Значение z возросло с 0 до 12. Это увеличение обусловлено тем, что прирост x_1 на единицу обеспечивает увеличение z на 3 единицы; таким образом, прирост целевой функции z составляет: 3×4=12.

Заметим, что симплекс-таблица 1.6 обладает такими же характеристиками, как и предыдущая: только небазисные переменные x_2 и s_2 равны нулю, а значения базисных переменных, как и раньше, представлены в столбце «Решение». Это в точности соответствует результатам, получаемым при использовании метода Гаусса—Жордана.

Таблица 1.6. Промежуточное решение.

Базисные переменные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**	Отношения
Z	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
S_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	2/(3/2)
X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	4/(1/2)
S_3	0	3/2	0	1/2	0	0	5	5/(3/2)
S_4	0	1	0	0	0	1	2	2/1

Из таблицы 1.6 следует, что на очередной итерации в соответствии с условием оптимальности в качестве вводимой переменной следует выбрать x_2, так как коэффициент при этой переменной в z-уравнении равен -1/2. Исходя из условия допустимости, определяем, что исключаемой переменной будет s_1. Отношения, фигурирующие в правой части таблицы 1.6, показывают, что в новом базисном решении значение включаемой переменной x_2 будет равно 4/3 (= минимальному отношению). Это приводит к увеличению целевой функции на (4/3) × (1/2)=2/3.

К получению симплекс-таблицы 1.7, соответствующей новой итерации, приводят следующие вычислительные операции метода Гаусса—Жордана.

1) Новое ведущее (s_1)-уравнение=Предыдущее s_1-уравнение / (3/2).

2) Новое z-уравнение = Предыдущее z-уравнение—(-1/2) × Новое ведущее уравнение.

3) Новое x_1-уравнение = Предыдущее x_1-уравнение—(1/2) × Новое ведущее уравнение.

4) Новое s_3-уравнение = Предыдущее s_3-уравнение — (3/2) × Новое ведущее уравнение.

5) Новое s_4-уравнение == Предыдущее s_4-уравнение— (1) × Новое ведущее уравнение.

В результате указанных преобразований получим симплекс-таблицу 1.7.

Таблица 1.7.Оптимальное решение.

Базисные переменные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	$12^2/_3$
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

В новом базисном решении $x_1=3^1/_3$ и $x_2=^1/_3$ (точка С на рисунке 1.1). Значение z увеличилось с 12 (симплекс-таблица 1.6) до $12^2/_3$ (симплекс-таблица 1.7). Этот результирующий прирост целевой функции $(12^2/3-12)=2/3$ обусловлен увеличением x_2 от 0 до 4/3, так как из z-строки симплекс-таблицы 1.6 следует, что возрастанию данной переменной на единицу соответствует увеличение целевой функции на $^1/_2$.

Симплекс-таблица 1.7 соответствует оптимальному решению задачи, так как в z-уравнении ни одна из небазисных переменных не фигурирует с отрицательным коэффициентом. Получением этой результирующей таблицы и завершаются вычислительные процедуры симплекс-метода.

В рассмотренном выше примере алгоритм симплекс-метода использован при решении задачи, в которой целевая функция подлежала максимизации. В случае минимизации целевой функции в этом алгоритме необходимо изменить только условие оптимальности: в качестве новой базисной переменной следует выбирать ту переменную, которая в z-уравнении имеет наибольший положительный коэффициент. Условия допустимости в обоих случаях (максимизации и минимизации) одинаковы. Представляется целесообразность дать теперь окончательные формулировки обоим условиям, используемым в симплекс-методе.

Условие оптимальности. Вводимой переменной в задаче максимизации и (минимизации) является *небазисная* переменная, имеющая в z-уравнении наибольший отрицательный (положительный) коэффициент. В случае равенства таких коэффициентов для нескольких небазисных переменных выбор делается произвольно. Если все коэффициенты при небазисных переменных в z-уравнении неотрицательны (неположительны), полученное решение является оптимальным.

Условие допустимости. В задачах максимизации и минимизации в качестве исключаемой переменной выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к (положительному) коэффициенту ведущего столбца минимально. В случае равенства этого отношения для нескольких базисных переменных выбор делается произвольно.

Анализ на чувствительность

Результирующая таблица позволяет непосредственно, либо с помощью несложных дополнительных вычислений получить требуемую информацию для задач анализа.

Ответ на вопрос второй задачи о ценности ресурсов и их статусе содержится непосредственно в таблице. **Статус ресурсов** устанавливается по значению остаточных переменных, если их значение равно нулю (свободные переменные), то соответствующий им ресурс дефицитный, иначе – недефицитный. Из результирующей таблицы следует, что дефицитные ресурсы связаны с переменными S_1 и S_2 и **значения коэффициентов в строке Z** при этих переменных непосредственно **указывают** их **ценность**.

Чтобы определить **интервал изменения ресурса** нужно выполнить дополнительные вычисления. Если на Δ_i меняется величина S_i, то в столбец-решение **b** нужно ввести поправки $+\Delta_i*S_i$, так что новый столбец-решение будет равен $\mathbf{b}+\Delta_i*\mathbf{S_i}$, где $\mathbf{S_i}$ вектор столбец таблицы, соответствующий дефицитному ресурсу S_i. Но базис можно менять только до нулевого значения, отсюда и находится диапазон Δ_i.

Из приведенного выше примера следует

$\mathbf{b}=(12^2/_3,4/3,10/3,3,2/3)$, $\mathbf{S_1}=(1/3,2/3,-1/3,-1,-2/3)$,

$\mathbf{b}+\Delta_1*\mathbf{S_1}=(12^2/_3+1/3\Delta_1,4/3+2/3\Delta_1,10/3-1/3\Delta_1,3-1\Delta_1,2/3-2/3\Delta_1)$,

откуда – ($-2\le\Delta_1\le1$),так что $4\le S_1\le7$.

Аналогично для $\mathbf{S_2}=(4/3,-1/3,2/3,1,1/3)$ имеем

$\mathbf{b}+\Delta_2*\mathbf{S_2}=(12^2/_3+4/3\Delta_2,4/3-1/3\Delta_2,10/3+2/3\Delta_2,3+1\Delta_2,2/3+1/3\Delta_2)$,

откуда –($-2\le\Delta_2\le4$),так что $6\le S_2\le12$.

Максимальное изменение коэффициентов целевой функции (третья задача анализа на чувствительность) определяется следующим образом. Вектор-строка для базисной переменной x_i умножается коэффициент δ_i и прибавляется к строке **z** , так как переменная x_i должна остаться в базисе, то элемент единичной матрицы в строке $\mathbf{x_i}$ не учитывается, считается равным нулю, обозначим её через $\mathbf{x_{i\sim}}$. Для случая max решение остаётся оптимальным, пока не появится отрицательный коэффициент в строке $\mathbf{z}+\delta_i*\ \mathbf{x_{i\sim}}$ (для min наоборот). Если в таблице присутствует столбец **z**, то его следует исключить из рассмотрения, так как он просто обозначает базисную переменную и обычно в таблицах не используется.

Покажем эти действия на нашем примере.

Исходная целевая функция $z=3x_1+2x_2=c_1\ x_1+c_2\ x_2$, получен вектор

$\mathbf{Z}=(0, 0, 1/3, 4/3, 0, 0, 12^2/_3)$

После преобразования ветора $\mathbf{X_1}=(1, 0, -1/3, 2/3, 0, 0, 10/3)$ имеем

$\mathbf{X_{1\sim}}=(0, 0, -1/3, 2/3, 0, 0, 10/3)$ и

$\mathbf{Z+\delta_1 * X_{1\sim}}$=(0, 0, 1/3-1/3 δ_1, 4/3+2/3 δ_1, 0, 0, $12^2/_3$+10/3 δ_1)
Решение: ($-2\le\delta_1\le1$), $C_1=c_1+\delta_1$, $1\le C_1\le4$.
Аналогично $\mathbf{X_2}$=(0, 1, 2/3, -1/3, 0, 0, 4/3) преобразуется в
$\mathbf{X_{2\sim}}$=(0, 0, 2/3, -1/3, 0, 0, 4/3) и результирующая
$\mathbf{Z+\delta_2 * X_{2\sim}}$=(0, 0, 1/3+2/3 δ_2, 4/3-1/3 δ_2, 0, 0, $12^2/_3$+4/3 δ_2)
Решение: ($-1/2\le\delta_2\le4$) , $C_2=c_2+\delta_2$, $3/2\le C_2\le6$.
Результаты анализа совпадают с полученными ранее при геометрическом решении.

Целочисленное программирование

На практике часто встречаются задачи, совпадающие по постановке задачи с задачами линейного программирования, но отличающиеся той особенностью, что искомые значения переменных непременно должны быть целыми (например, количество станков, неделимых единиц продукции и т.д.). Такие задачи называют задачами целочисленного программирования; дополнительное условие целочисленности переменных существенно затрудняет их решение.

Задачи, сформулированные в терминах линейного программирования и содержащие требование: все или некоторые искомые значения — целые числа, играют важную роль в исследованиях различных прикладных проблем. Появление указанного требования приводит к пересмотру некоторых представлений. В первую очередь это относится к области определения задачи, которая отождествляется теперь с совокупностью дискретных точек — узлов целочисленной решетки (если все искомые значения целочисленны), или с набором непересекающихся линий, плоскостей и т. п. Соответствующие коррективы приходится вносить и в методологию поиска оптимальных решений, причем серьезные трудности вызывает разработка теоретически обоснованных методов получения X* , z*.

Метод отсекающих плоскостей

Разработан Р.Гомори для задач целочисленного программирования и наиболее прост в реализации для полностью целочисленных задач**.**

Временно отбросив условия целочисленности, отыскивается оптимальный план задачи линейного программирования. Если окажется, что он не удовлетворяет условию целочисленности, то формируется дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением, которому заведомо удовлетворяет любое целочисленное и не удовлетворяет найденное решение и для новой задачи вновь отыскивается оптимальное решение и так далее циклически до получения решения. Алгоритм решения полностью целочисленных задач иногда называют дробным из-за того, что коэффициенты дополнительного отсечения меньше единицы. Так как все переменные целочисленны, то подбором соответствующих множителей целевую функцию Z также можно считать целочисленной и поэтому строку Z можно считать обычным условием, однако в этом случае может нарушиться условие оптимальности.

Пусть получено оптимальное решение, приведенное в таблице 1.8.

Таблица 1.8. Решение задачи без учета целочисленности.

Базис	Решение	x_1	…	x_m	w_1	…	w_j	…	w_r
z	β_0	0	…	0	c_1		c_j		c_r
x_1	β_1	1	…		α_{11}		α_{1j}		α_{1r}
…	…	0	…						
x_m	β_m	0	…	1	α_{m1}		α_{mj}		α_{mr}

Для любой строки $x_i= \beta_i-\Sigma\ \alpha_{ij}\ w_j=$, j=1,m. Любая из строк с нецелым x_i может быть выбрана в качестве производящей для построения отсечения.

Выделяя из β_i и α_{ij} нижнюю целую часть и остатки f_i и f_{ij} соответственно, $0<f_i<1, 0\le f_{ij}<1$, можно записать условие отсечение в виде

$S_i= -f_i+\Sigma\ f_{ij}\ w_j$ и добавить его к полученной ранее таблице, как показано ниже в таблице 1.9.

Таблица 1.9. Добавление отсечения.

Базис	Решение	x_1	…	x_m	w_1	…	w_j	…	w_r	s_i
z	β_0	0	…	0	c_1		c_j		c_r	0
x_1	β_1	1	…		α_{11}		α_{1j}		α_{1r}	0
…	…	0	…							0
x_m	β_m	0	…	1	α_{m1}		α_{mj}		α_{mr}	0
s_i	$-f_i$	0	0	0	$-f_{i1}$		$-f_{ij}$		$-f_{ir}$	1

Выбор столбца k производится по min отношению коэффициентов целевой функции к отрицательным коэффициентам f_{ij} , взятых по абсолютному значению. Такой метод решения носит название двойственного, так как используется свойство двойственной задачи: целевая функция переходит в столбец-решение.

Для ускорения решения выбор производящей строки производится по эмпирическому правилу:

1) i определяется $\max_i\{f_i\}$,

2) если f_i одинаковы, то выбор i определяется по выполнению условия для строк i и k: остатки $f_{ij} \le f_{kj}$, (правило Парето).

3) Паретовское правило может быть заменено эмпирическим:

$\max_i\{f_i/\Sigma f_{ij}\}$, где сумма берется по j-м элементам i-ой строки.

Рассмотрим выше приведенное решение, дополнив его условием целочисленности. Оптимальное решение без ограничений на целочисленность дано ниже в таблице 1.10, где добавочные переменные переобозначены через X_i.

Таблица 1.10. Решение без учета целочисленности.

Базисные переменные	Решение **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1

Матрица остатков будет следующей (табл.1.11).

Таблица 1.11. Матрица остатков.

Базисные переменные	Остатки $\mathbf{f_i}$	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	f_{i4}	f_{i5}	f_{i6}
Z	2/3	0	0	1/3	1/3	0	0
X_2	1/3	0	0	2/3	2/3	0	0
X_1	1/3	0	0	2/3	2/3	0	0
X_6	2/3	0	0	1/3	1/3	0	0

Строка X_6 (и Z) по первому правилу даёт $S_1=-2/3+1/3X_3+1/3X_4$ и добавление в таблицу 1.10 даёт таблицу 1.12.

Таблица 1.12. Включение отсечения.

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	0
S_1	-2/3			-1/3	-1/3			1

Используя свойство двойственного метода находим переменную X_3, которую следует перевести в базис. Преобразования дают таблицу 1.13.

Таблица 1.13. Оптимальное целочисленное решение.

Базисные переменные	Решение **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	0	2/3	0	0	1
X_2	0	0	1	0	-1	0	0	2
X_1	4	1	0	0	1	0	0	1
X_5	1	0	0	0	2	1	0	-3
X_6	2	0	0	0	1	0	1	-2/3
X_3	2			1	1			-3

Полученное решение оптимально и целочисленно.

Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ — один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, каждое из которых этим же способом снова разбивается на подмножества. Процесс продолжается до тех пор, пока не получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи.

Для задач линейного программирования решение ищется следующим образом.

Первоначально находим оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Пусть им является план $\mathbf{X}_0$. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи и $F_{max} = F(\mathbf{X}_o)$.

Если же среди компонент плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи. Покажем, как это можно сделать, предварительно отметив, что

$F(\mathbf{X}_0) \geq F(\mathbf{X})$ для всякого последующего плана **X**.

Предполагая, что найденный оптимальный план $\mathbf{X}_0$ не удовлетворяет условию целочисленности переменных, тем самым считаем, что среди его компонент есть дробные числа. Пусть, например, переменная x_{i_0} приняла в плане X_0 дробное значение. Тогда в оптимальном целочисленном плане ее значение будет по крайней мере либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_{i_0}, либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_{i_0} + 1$. Определяя эти числа, находим решение двух задач линейного программирования:

$$(I)\begin{cases} F = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, \ (t = \overline{1,m}) \\ x_{t0} \leq K_t \\ x_j \geq 0, \ (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} F = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, \ (t = \overline{1,m}) \\ x_{t0} \geq K_t + 1 \\ x_j \geq 0, \ (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Возможен один из следующих четырех случаев решения задач линейного программирования (I) и (II):

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нем и дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).
3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и он вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение. Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные (I) и (II).

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и строим две задачи, аналогичные (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану $\mathbf{X}_0$ задачи, а каждая соединенная с ней ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. При этом на каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение функции является наибольшим. Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные компоненты, и значение функции на нем окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нем является максимальным.

Итак, процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ включает следующие основные этапы:

1. Находят решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляют дополнительные ограничения для одной из переменных, значение которой в оптимальном плане задачи является дробным числом.
3. Находят решение задач (I) и (II), которые получаются из предыдущей задачи в результате присоединения дополнительных ограничений.
4. В случае необходимости составляют дополнительные ограничения для переменной, значение которой является дробным, формулируют задачи, аналогичные задачам (I) и (II), и находят их решение. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая целочисленному плану задачи и такая, что значение функции в этой вершине больше или равно значению функции в других возможных для ветвления вершинах.

Рассмотрим решение на предыдущем примере. Для удобства оптимальное решение без учета целочисленности приведено ниже в таблице 1.14.

Шаг1. Пусть разбиение на два подмножества задаёт переменная X_1.Тогда нужно ввести два ограничения: $X_1 \le 3$ и $X_1 \ge 4$.

Рассмотрим левую ветвь.

Таблица 1.14. Оптимальное решение без учета целочисленности.

Базисные переменные	Решение **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0

X_5	3	0	0	-1	1	1	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1

Добавляя переменную S_1 в левую часть получим ограничение-равенство в виде S_1=3-X_1 и заменяя X_1 строкой из таблицы 1.14 (X_1 базисная), получим новую таблицу 1.15.

Таблица 1.15. Введено отсечение S_1=3-X_1

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	$12^{2}/_{3}$	0	0	1/3	4/3	0	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	0
S_1	-1/3	0	0	1/3	-2/3	0	0	1

Заметим, что ограничение в стиле метода отсекающих плоскостей имеет вид: S_1 = -1/3-(1/3 X_3 -2/3 X_4) или 1/3 X_3 -2/3 X_4) ≤ -1/3.

Решая обычным образом, получим оптимальное решение (табл. 1.16).

Таблица 1.16.Оптимальное решение с S_1 = 3 - X_1.

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	1	0	0	0	2
X_2	3/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2
X_1	3	1	0	0	0	0	0	1
X_5	5/2	0	0	-1/2	0	1	0	3/2
X_6	1/2	0	0	-1/2	0	0	1	1/2
X_4	1/2	0	0	-1/2	1	0	0	-3/2

Шаг2. Рассмотрим следующее разбиение по X_2≤1 и X_2≥2 и вновь пойдём по левой ветви. Получим: X_2+S_2=1, S_2 = -1/2-(-1/2 X_3+1/2 S_1). Результат преобразований представлен в таблице 1.17.

Шаг 3. Возвращаясь к шагу 2, выберем правую ветвь X_2≥2, соответствующее отсечение S_2=-1/2-(1/2 X_3-1/2 S_1) и после преобразований получим таблицу 1.18.

Таблица 1.17. Введено отсечение S_1 = 3 - X_1 и S_2 = 1 - X_2.

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2
Z	11	0	0	0	0	0	0	3	2
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1
X_1	3	1	0	0	0	0	0	1	
X_5	2	0	0	0	0	1	0	-1.2	-2

X_6	1	0	0	0	0	0	1	1/2	
X_4	1	0	0	0	1	0	0	-2	-1
X_3	1	0	0	1	0	0	0	-1	-2

Таблица 1.18. Введено отсечение $S_1 = 3 - X_1$ и $S_2 = X_2 - 2$.

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2
Z	10	0	0	3	0	0	0	2	4
X_2	2	0	1	0	0	0	0	-1/2	-1
X_1	2	1	0	1	0	0	0	1	2
X_5	1	0	0	1	0	1	0	3/2	3
X_6	0	0	0	0	0	0	1	1/2	1
X_4	2	0	0	-2	1	0	0	-3/2	-3
S_1	1	0	0	-1	0	0	0	1	-2

Полученное решение хуже, чем в шаге 2.

Шаг 4. Возвращаемся к шагу 1 и выберем правую ветвь $X_1 \geq 4$, что соответствует сечению $S_1 = -2/3-(-1/3\ X_3+2/3\ X_4)$. Результат в таблице 1.19.

Таблица 1.19. Введено отсечение $S_1 = X_1 – 4$.

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	0	2/3	0	0	1
X_2	0	0	1	0	-5/3	0	0	2
X_1	4	1	0	0	4/3	0	0	-1
X_5	1	0	0	0	3	1	0	-3
X_6	2	0	0	0	5/3	0	1	-2
X_3	2	0	0	1	2	0	0	-3

Все переменные целочисленные, решение наилучшее, что определяет конец поиска.

Сравнивая решение методом Гомори и найденное, заметим, что строка Z и столбец-решение совпадают.

Двойственная задача линейного программирования.

1. Двойственные задачи

Для прямой задачи линейного программирования всегда можно составить так называемую двойственную, для которой так же существует свой алгоритм решения

– двойственный симплекс метод, который позволят более эффективно решать многие задачи линейного программирования.

Само понятие двойственности служит иллюстрацией одного из законов диалектики, а именно закона единства и борьбы противоположностей. Для сравнения к аналогичным в математике относят такие понятия как «плюс» и «минус», «дифференцирование» и «интегрирование».

Двойственная задача является транспонированной матрицей по отношению к прямой и её решение так же транспонировано по отношению к прямой задаче.

В теории линейного программирования установлено, что каждой задаче линейного программирования может быть поставлена в соответствие другая вполне определенная задача линейного программирования, такая, что при решении одной из них одновременно решается и другая. Эти задачи были названы парой взаимодвойственных (или взаимно сопряженных) задач. Результаты исследований, связанных с двойственностью, составили значительную часть теории линейного программирования и на них базируются некоторые эффективные методы решения линейного программирования.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,}\\
&\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,}\\
&\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,}\\
&\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{(1.1)}\\
&\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,}\\
&\text{при } \mathbf{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots\ x_n \ge 0}
\end{aligned}$$

или в матричной форме записи

$$\mathbf{max\ z = cx;\ Ax \le b;\ x \ge 0.} \qquad \mathbf{(1.2)}$$

Теперь путём введения m-мерной вектор-строки **y**, произведём построение стандартной задачи вида:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n;}\\
&\mathbf{b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \ge c_1;}\\
&\mathbf{b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \ge c_2;}\\
&\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{(1.3)}\\
&\mathbf{b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \ldots + b_{mn}y_n \ge c_m;}
\end{aligned}$$

или в матричной форме

$\mathbf{min\ w = by;\ A^Ty \ge c;\ y}$ **нет ограничения в знаке.** **(1.4)**

Задача (1.3) называется *двойственной* к задаче (1.1), а задача (1.1) называется *прямой* по отношению к задаче (1.3).

Из сопоставления задач (1.1) и (1.3) определяются правила в соответствии с которыми одна стандартная задача (прямая) преобразуется в другую (двойственную). Переменных y_i в задаче (1.3) такое же количество, сколько ограничений в матрице **A** задачи (1.1). Матрица условий в задаче (1.3) - траспонированная матрица условий задачи (1.1). Задача максимизации переходит в задачу минимизации, при этом ограничения-неравенства вида меньше или равно заменяются ограничениями вида больше или равно. Вектор **C** коэффициентов целевой функции прямой задачи становится вектором ограничений двойственной задачи, а вектор **b** ограничений задачи (1.1) становится вектором коэффициентов целевой функции двойственной задачи (1.3).Обратим внимание на то, что если одна из двойственных задач стандартная, то и другая стандартная. Система ограничений в обоих случаях задана неравенствами. Поэтому задачи (1.1) и (1.3) называются *симметричными.* Связь между ограничениями симметричных задач удобно отразить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,\ldots,m \leftrightarrow y \ge 0,\ i=1,\ldots,m;$$

$$x \ge 0,\ i=1,\ldots,n \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ i=1,\ldots,n,$$

откуда видно, что каждому ограничению одной задачи сопоставлена переменная с тем же номером другой задачи, а каждой переменной одной задачи сопоставлено ограничение с тем же номером другой задачи.

Рассмотрим теперь каноническую задачу

$$\max z=cx;\ xA = b;\ x \ge 0. \qquad (1.5)$$

Правила построения двойственной задачи можно применить к задаче (1.5), если предварительно записать ее в виде стандартной задачи. В итоге задача, двойственная канонической, имеет вид

$$\min w=by;\ Ay \ge c \qquad (1.6)$$

При этом следует отметить, что на вектор **y** не накладывается условие неотрицательности.

Можно также проверить, что задача, двойственная задаче (1.6), совпадает с задачей (1.5), а двойственная задаче (1.3), совпадает с задачей (1.1). Поэтому двойственные задачи называют также *взаимодвойственными,* причём взаимодвойственные задачи (1.5) и (1.6) называются *несимметричными,* так как в прямой задаче ситема ограничений задана равенствами, а в двойственной — неравенствами, в прямой задаче все переменные неотрицательные, в двойственной могут быть отрицательные.

1.1.Основные теоремы двойственности

Для определенности будем формулировать основные утверждения применительно к симметричной паре двойственных задач (1.2) и (1.4). Дадим определения множествам

$$x=\{x\ \ Ax \le b,\ x \ge 0\}; \qquad y=\{y\ \ yA \ge c,\ y \ge 0\},$$

Лемма 1.1 *Для любых допустимых планов х принадлежащих X, у принадлежащих Y прямой и двойственной задач справедливо неравенство*

$$\mathbf{cx \leq yb.} \qquad \mathbf{(1.7)}$$

Так как х принадлежит **X**, у принадлежит **Y**, то **Ax < b, y > 0**. Отсюда следует, что **yAx < yb**.

Аналогично из того, что **yA ≥ c, x ≥ 0**, следует **yAx ≥ cx**. Таким образом, **cx < yAx < yb**,что и требовалось доказать.

Доказательство для несимметричной пары двойственных задач проводится аналогично. Неравенство (1.7) называют *основным, неравенством* теории двойственности. Его экономический смысл в том, что при любом допустимом плане производства **X** общая стоимость всего продукта не больше суммарной оценки ресурсов, отвечающей любому допустимому вектору оценок у.

Лемма 1.2. *Если для некоторых допустимых планов х принадлежащих* ***X****, у принадлежащих* ***Y*** *пары двойственных задач выполняется равенство*

$$\mathbf{cx^* = y^*b}, \qquad \mathbf{(1.8)}$$

то векторы ***x**** *и* ***y**** *являются оптимальными планами соответствующих задач.*

Предварительно напомним, что вектор **x*** оптимален тогда и только тогда, когда для любого допустимого вектора **x** имеет место неравенство **cx ≤ cx***. Пусть **x** - допустимое решение прямой задачи. Тогда в соответствии с леммой 1.1 и условием (1.8) имеем **cx ≤ y*b=cx*.** Оптимальность вектора у* доказывается аналогично.

Лемма 1.2 формулирует критерий оптимальности для задач линейного программирования. Согласно этой лемме, если среди допустимых решений найдутся векторы **x*** и **y***, удовлетворяющие условию (1.8), то они будут оптимальными решениями соответствующих задач. С экономической точки зрения это означает, что планы производства и оценки ресурсов являются оптимальными, если цена всей продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Первая теорема двойственности (теорема существования). *Если прямая и двойственная задачи допустимы, то они оптимальные решения, причём их целевые функции равны.*

Данная теорема представляет основной результат теории линейного программирования. Среди различных методов ее доказательства есть методы, использующие свойства решения задачи линейного программирования и особенности процедуры симплекс-метода.

Вторая теорема двойственности (теорема о равновесии, теорема о дополняющей нежёсткости). *Допустимые решения двойственных задач* ***x*** *принадлежащих* ***X****,* ***y*** *принадлежащих* ***Y*** *оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия: во-первых* ***(ya-c)x=0****; во-вторых* ***y(b-ax)=0****.*

Эти условия называются *условиями дополняющей не жесткости.* Приведем доказательство для случая, когда прямая задача является стандартной задачей линейного программирования.

Как показано при доказательстве леммы 2.1. для любых **x** из **X**, **y** из **Y** имеет место соотношение

$$\mathbf{cx < yAx < yb} \qquad \mathbf{(1.9)}$$

Пусть первое и второе условие выполняются. Тогда в выражении (1.9) оба неравенства становятся равенствами, откуда следует cx = yb и в соответствии с леммой 1.2 **x** и **y** - оптимальные решения прямой и двойственной задач.

Предположим, что какое-либо условие не выполняется, например второе условие.

В силу неотрицательности выражения в скобках и вектора **y** оно будет иметь вид **y(b-ax) > 0**, откуда получаем **yb > yax** и, следовательно, **cx < yb**. Отсюда по крайней мере одно из решений **x**, **y** не является оптимальным для соответствующей ему задачи. Аналогично рассматривается невыполнение первого условия.

Таким образом, оптимальные решения пары взаимодвойственных задач обладают свойством ортогональности: если j-я компонента оптимального вектора **x** положительна, то j-е ограничение двойственной задачи должно выполняться как равенство. Аналогично, если положительна j-я компонента оптимального вектора **y**, то должно выполняться как равенство j-е ограничение прямой задачи. Дадим экономическую интерпретацию условиям дополняющей нежёсткости.

Согласно первому условию, если некоторый продукт j входит в оптимальный план производства, $x_j > 0$, то при оптимальной системе цен двойственной задачи затраты ресурсов на его изготовление совпадают со стоимостью этого продукта.

По второму условию, если в оптимальной системе цен какой-то ресурс j получает отличную от нуля цену $y_j > 0$, то в соответствии с оптимальным планом производства исходной задачи этот ресурс будет израсходован полностью. Обращаясь к системам ограничений прямой задачи (1.1) и двойственной задачи (1.3), можно дополнить интерпретацию первого и второго условий следующим образом. Из ограничений (1.3) и первого условия получаем: если затраты ресурсов на выпуск какого-либо продукт j превышают его стоимость, то этот продукт не производится, $x_j = 0$. Из ограничений задачи (1.1) и второго условия получаем: если какой-то ресурс i расходуется не полностью, то его цена $y_i=0$.

Таким образом, каждому ресурсу можно присвоить оценку, являющуюся характеристикой его дефицитности. Ресурсы, используемые в производстве, не равнозначны. Те из них, которые при оптимальном плане производства используются не полностью, получают нулевую оценку. Увеличение или уменьшение запасов таких ресурсов не отражается на величине целевой функции и, следовательно, не влияет на показатель качества производственного плана. Если же оценка i-го ресурса $y_i > 0$, то увеличение его использования означает улучшение показателя качества работы - значения целевой функции – на y_i единиц.

1.2. Следствия из первой и второй теорем двойственности

Формулируются следующим образом:

а}Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то имеет оптимальное решение и другая

б) Если одна из двойственных задач допустима, а вторая недопустима, то целевая функция первой задачи не ограничена

Тесная связь, существующая между взаимодвойственными задачами, она состоит и в том, что при решении одной из них одновременно решайся и другая. Действительно, нетрудно заметить, что симплекс-таблица с условиями исходной задачи включает и условия двойственной задачи. Так, строки эной таблицы содержат левые части ограничений исходной задачи, а столбцы - левые части ограничений двойственной задачи. Элементы столбца **b** представляют коэффициенты вектора ограничений прямой задачи, и одновременно оценки плана двойственной задачи. Элементы строки Δ дают оценки плана исходной и одновременно коэффициенты вектора ограничении двойственной задач. Поэтому при решении двойственной задачи можно не строить специальную симплекс-таблицу, а решать ее по таблице, где записаны условия исходной задачи. Их оптимальные решения отыскиваются одновременно. Компоненты оптимального плана двойственной задачи находятся в клетках оценочной строки, соответствующих начальному единичному базису прямой задачи.

2.Симплексный метод решения задач ЛП

2.1.Общая идея симплекс-метода

Основным методом решения задач линейного программирования до настоящего времени остается симплекс-метод, разработанный американским математиком Д. Данцигом в 1949 г. для задач в канонической форме записи:

$$\mathbf{\max z=cx;\ xA = b;\ x \geq 0.} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

где **A** - матрица условий задачи размеров **m x n**, ранг которой будем всегда считать равным **m**; $\mathbf{c=(c_1, c_2, ..., c_n)}$ - вектор-строка коэффициентов целевой функции; $\mathbf{b^T= (b_1, b_2, ... b_n)}$ - вектор-столбец коэффициентов ограничений. Вектор-столбец $\mathbf{x^T= (x_1, x_2, ..., x_n)}$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{Ax = b,\ x \geq 0}$, называется *допустимым решением* или *планом,* а допустимое решение, доставляющее максимум целевой функции, называется *оптимальным решением,* или *оптимальным планом.* Множество векторов $\mathbf{\{x \quad Ax = b,\ x \geq 0\}}$ называется *областью допустимых решений* задачи линейного программирования и является выпуклым.

Дана задача линейного программирования в канонической форме: максимизировать

$$\mathbf{f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij}\ x_j = a_{i\,0}\ (i = 1, \ldots, m)}, \qquad \mathbf{(2.3)}$$

$$\mathbf{где\ x_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n).} \qquad \mathbf{(2.4)}$$

Предположим, что в системе (2.2) **m < n** и все **m** уравнений линейно независимы (ранг системы **r = m**). В этом случае система имеет бесчисленное множество решений. Ее можно разрешить относительно m переменных $x_1,\ldots, x_m$, если векторы-коэффициенты $a_1,\ldots, a_m$ при этих переменных линейно независимы:

$$\mathbf{x_i = b_{i0} - \sum_{j=1}^{n-m} d_{ij}x_{m+j} \quad (i = 1, \ldots, m)} \qquad \mathbf{(2.5)}$$

В этом случае $x_1,\ldots, x_m$, - базисные переменные, а $x_{m+1},\ldots, x_n$, - свободные переменные. Тогда и целевую функцию можно выразить через свободные переменные x_{m+j}

$$\mathbf{f = b_{00} - \sum_{j=1}^{n-m} b_{0j}x_{m+j}} \qquad \mathbf{(2.6)}$$

Если все $b_{i0} > 0$, то план x_0 (b_{10}; …; b_{m0}; …; b_0; …; 0), будет опорным и $f(x_0) = b_{00}$. Если при этом опорном плане значение целевой функции максимально, то опорный план является оптимальным.

Решение задачи (2.2) - (2.4) симплексным методом включает в себя два этапа:

1) нахождение начального опорного плана;
2) определение среди опорных планов задачи оптимального. Решение задачи проводится с использованием симплексных таблиц. Симплексная таблица, содержащая ограничения (2.5) и целевую функцию (2.6), имеет вид таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

БП	1	*С П*		
		$-x_{m+1}$	…	$-x_n$
$x_1 =$ … $x_m =$	b_{10} … b_{m0}	b_{11} b_{m1}	… …	$b_{1\ n-m}$ … $b_{m\ n-m}$
f =	b_{00}	b_1	…	$b_{0\ n-m}$

2.2. Поиск начального опорного плана

Задача (2.2) и (2.3) разрешена относительно базиса $\mathbf{B_0 = (x_1 ..., x_m)}$ и записана в симплексную таблицу 2.1. Таблица 2.1 будет содержать начальный опорный план, если все элементы столбца свободных членов положительны, а свободные переменные равны нулю $\mathbf{X_0 = (b_{10}; ...; b_{m0}; 0; ...; 0)}$. Если хотя бы один из свободных членов отрицательный, то таблица 2.1 опорного плана не содержит.

Алгоритм нахождения опорного плана следующий:

1) просматривают строку, содержащую отрицательный свободный член, например строку m, и по отрицательному элементу этой строки выбирают разрешающий столбец, например n-столбец. Если среди свободных членов несколько отрицательных, то можно просматривать строку, содержащую наибольший по абсолютной величине отрицательный свободный член. Если просматриваемая строка отрицательных элементов не содержит, то система ограничений несовместна, и исходная задача решений не имеет;

2) находят симплексные отношения для разрешающего столбца отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца (причем симплексные отношения всегда больше или равны 0, так как составляются для элементов, имеющих одинаковые знаки);

3) по наименьшему симплексному отношению определяют разрешающую строку, например m-строку;

4) находят разрешающий элемент на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки (элемент $b_{m,\, n\text{-}m}$);

5) с выбранным разрешающим элементом производят симплексное преобразование, получают новую симплексную таблицу - таблицу 2.2.

Таблица 2.2.

БП	1	*С* *П*		
		$-x_{m+1}$	…	$-x_m$
$x_1 =$	b'_{10}	b'_{11}	…	$b_{1,n-m} / b_{m,n-m}$
…	…		…	
		$b_{m1}/b_{m,n-m}$	…	$-1/b_{m,n-m}$
$x_n =$	b'_{m0}			
f =	b'_{00}	b'_1	…	$b_{0,n-m}/b_{m,n-m}$

В результате переменные x_n и x_m поменялись ролями: x_n стала базисной, x_m свободной.

Элементы таблицы 2.2 перечисляются по следующим правилам. разрешающий элемент заменяется обратной величиной; остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный; остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, все прочие элементы таблицы вычисляются по формуле

$b'_{ij} = b_{ij}\, b_{m,n-m} - b_{i,n-m}\, b_{mj} / b_{m,n-m}$ $(i \neq m,\ j \neq n\text{-}m)$.

Если в новой симплексной таблице получен начальный опорный план, то переходят к поиску оптимального, в противном случае процесс повторяется, начиная с пункту 1.

2.3. Поиск оптимального плана

Если в симплексной таблице, содержащей опорный план, все элементы f-строки, не считая свободного члена, неотрицательны, то данный опорный план является оптимальным. Полученный оптимальный опорный план будет единственным, если все элементы f-строки положительны. Если среди неотрицательных элементов встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество оптимальных планов. Если хотя бы один элемент f-строки отрицательный, то оптимальный опорный план находят в соответствии со следующим *алгоритмом:*

1) выбирают разрешающий столбец по отрицательному элементу, если в f-строке отрицательных элементов несколько, то наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент укажет на разрешающий столбец;

2) разрешающая строка определяется по минимальному симплексному от ношению;

3) делают симплексное преобразование с выбранным разрешающим элементом и получают новый опорный план, который опять проверяют на оптимальность. Решение проводится до тех пор, пока не будет получен оптимальный план, Либо не будет установлена неразрешимость задачи.

Если в f-строке симплексной таблицы, содержащей опорный план, есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем этому элементу столбце нет ни одного положительного, то целевая функция не ограничена в области допустимых решений, т. е. $f \to \infty$.

2.4.Двойственный симплексный метод

Симплекс-метод применяется для решения задач с неотрицательными коэффициентами b_i вектора ограничений и произвольными по знаку приведенными коэффициентами целевой функции Δ_j. Иногда бывает легче найти базис, удовлетворяющий признаку оптимальности (все $\Delta_j \geq 0$). Вариант симплекс-метода, применяемый для решения таких задач, называется *двойственным симплекс-методом.* С его помощью решаются задачи линейного программирования

$$\max cx;\ Ax = b;\ x \geq 0,$$

где матрица А содержит единичный базис и все приведенные коэффициенты целевой функции $\Delta_j \geq 0$, $j=1,...,n$. При этом условие $b_i \geq 0$, $i=1,..., m$ не требуется. Определённую таким образом задачу будем называть *задачей в двойственной базисной форме.*

Обычный симплекс-метод, применяемый к задаче в базисной форме приводит к последовательности эквивалентных задач с возрастающим значением целевой функции и неотрицательными значениями b_i, так что каждое базисное решение является допустимым. Двойственный симплекс-метод, применяемый к задаче в двойственной базисной форме, приводит к последовательности задач с убывающим значением целевой функции, неотрицательными коэффициентами Δ_j**, j=l,..., n**, и значениями b_i любого знака. Преобразования задач выполняются до тех пор, пока не будет установлено, что исходная задача не имеет допустимого решения или будет получена задача с допустимым базисным решением, т.е. все $b_i \geq 0$), которое одновременно и оптимально.

Эти особенности алгоритмов находят отражение и в названиях, которые применяют к ним. Обычный симплекс-метод называют *методом последовательного улучшения планов,* а двойственный – методом *последовательного уточнения оценок.*

Перейдем к обоснованию алгоритма. Рассмотрим задачу в двойственной базисной форме. В отношении ее возможен один из трех случаев.

а) все координаты вектора ограничений неотрицательны. Тогда они дают не только допустимый, но и оптимальный план задачи, т.к. по предложению все оценки $\Delta_j > 0$.

б)имеется строка i=1, ..., m, такая, что $b_i<0$ и $a_{ij}>0$ для всех j=1, ..., n. Тогда задача неразрешима в силу несовместимости ограничений. Действительно, для любого неотрицательного вектора $x=(x_1;\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ при всех $a_{ij} \geq 0$ имеем $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +\ldots+ a_{in}x_n \geq 0$. Поэтому ни один из векторов $x \geq 0$ не может удовлетворить i-е ограничение $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +\ldots+ a_{in}x_n = b_i$ где $bi < 0$.

в) имеется строка r = 1, ..., m, такая, что $b_i < 0$ и $a_{ij} \geq 0$ хотя бы для одного j=1, ..., n. Пусть s=1, ..., n таково, что $a_{rs} < 0$ и $\Delta_s/\ a_{rs} = \max(\Delta_j/\ a_{rj})$, где $a_{rj}<0$. Тогда жорданово преобразование с ведущим элементом a_{rs} приводит к эквивалентной задаче в которой, во-первых, оценки $\Delta_j \geq 0$ и j=1, ..., n, а во-вторых, значение целевой функции $z' \leq z$, и если $\Delta_s \neq 0$, то $z' < z$.

2.5.Алгоритм решения двойственным симплекс-методом

Данный метод, применяемый к задаче в двойственной базисной форме, состоит из следующих шагов, повторяющихся до тех пор, пока в ходе жордановых преобразовании не будет установлено соответствие очередной эквивалентной задачи приведенным случаям а) и б).

1. Проверяем знаки коэффициентов ограничений b_i. Если все $b_i \geq 0$, i=1…m, то имеет место случай а. Базисное решение и значение целевой функции, записанные в столбце свободных членов b, дают оптимальное решение исходной задачи. Если не все $b_i \geq 0$, переходим к шату 2.
2. Среди отрицательных коэффициентов b_i выбираем коэффициент $b_к$, наибольший по абсолютной величине, и строку r называем ведущей.
3. В ведущей строке проверяем знаки всех коэффициентов a_{rj}, j=1…n. Если все $a_{rj} > 0$, имеет место случай 3. Переходим к шагу 4.
4. Среди отрицательных коэффициентов a_{rj} ведущей строки выбираем элемент a_{rs}, для которого $\Delta_s / a_{rs} = \max(\Delta_s / a_{rs})$, где $a_{rs} < 0$ и называем его ведущим.
5. Выполняем жорданово преобразование симплекс-таблицы с ведущим элементом a_{rs} после чего переходим к шагу 1.

Оптимальный план прямой задачи задается списком базисных переменных и их значениями в столбце b, двойственной задачи - переменными двойственной задачи, сопоставленными базисным столбцам исходной задачи, и их значениями в оценочной строке Δ.

Задачи в двойственной базисной форме, к которым можно непосредственно применить изложенный алгоритм, обычно возникают двумя путями.

В первом случае задачи минимизации вида min w = cx, $Ax \geq 0$, $x \geq 0$, где все коэффициенты $c_j \geq 0$. Такая задача может быть сведена к эквивалентной задаче в двойственной базисной форме заменой минимизации целевой функции w максимизацией функции z = -w, умножением на -1 обеих частей всех неравенств вида больше или равно и введением дополнительных переменных для построения единичного базиса.

Другой случай имеет место, когда в систему ограничений задачи, для которой найдено оптимальное решение, вводятся дополнительные условия, делающие эго решение недопустимым. Тогда использование двойственного симплекс-метода позволяет получить новое оптимальное решение при этом не надо проводить все расчеты сначала. Такое применение двойственного симплекс-метода имеет место, в частности при рассмотрении целочисленных задач.

Наконец двойственный симплекс-метод удобно использовать для решения задач, которые обладают единичным базисом, но не относятся к задачам в базисной или двойственной базисной форме, так как имеют отрицательные коэффициенты среди элементов вектора b и строки Δ одновременно. Решение, такой задачи состоит из двух этапов: сначала с помощью двойственного симплекс-метода исключаются все x < 0, затем оптимальный план находится обычным симплекс-методом. Следует только на первом этапе изменить шаг 4 алгоритма следующим образом:

-среди отрицательных коэффициентов a_{rj} ведущей строки выбрать элемент a_{rs}, для которого выполняется условие

$$b_{rs} / a_{rs} = \max(b_{rs} / a_{rs}), \text{ где } a_{rs} < 0$$

3. Двойственные задачи

3.1. Алгоритм построения двойственной задачи

Пусть дана общая задача линейного программирования в произвольной форме записи

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1 \ldots m,\ m_1 \leq m) \qquad (3.1)$$

n

$\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ $(i= m_1 +1\ldots m)$
$j=1$
где $x_j \geq 0$ $(j= 1\ldots n_1, n_1 \leq n)$

Двойственная задача по отношению к задаче (3.1) примет вид:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i (min)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \leq b_i \quad (j=1\ldots n, n_1 \leq n) \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq b_i \quad (i= n_1 +1\ldots n)$$

где $x_j \geq 0$ $(j= 1\ldots n_1, n_1 \leq n)$.

При построении двойственной задачи необходимо учитывать следующие правила:

1. каждому i-му ограничению задачи (3.1) соответствует переменная y_i задачи (3.2), и, наоборот, каждому j-му ограничению двойственной задачи (3.2) соответствует переменная x_j, задачи (3.1);
2. матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием, т.е. заменой строк столбцами, с сохранением их порядка;
3. свободные члены ограничений задачи (3,1) являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи (3.2); аналогично коэффициенты целевой функции исходной задачи (3.1) совпадают со свободными членами системы ограничений двойственной задача (3.2);
4. если целевая функция исходной задачи (3.1) максимизируется, то целевая функция двойственной задачи (4.2) минимизируется;
5. в задаче (3.1) ограничения-неравенства следует записывать со знаком меньше или равно, а для задачи (3.2) — больше или равно;
6. если на j-ю переменную задачи (3.1) наложено условие неотрицательности, то j-е ограничение задачи (3.2) будет неравенством, в противном случае j-е ограничение будет равенством; аналогично связаны между собой ограничения задачи (3.1) и переменные задачи (3.2).

3.2. Пример построения двойственной задачи

Задание: построить задачу двойственную к данной задаче

$F= 3x_1 +4_2 - x_3 +2x_4 – 5x_5$ (max)
$2x_1 +3x_2 + 4x_3 - x_4 – 2x_5 \leq 12$
$x_1 +2x_2 + 3x_3 + 2x_4 – 3x_5 = 11$

$$
\begin{aligned}
&4x_1 - x_2 + 5x_3 \qquad - x_5 \ge 10 \\
&\quad 2x_2 \qquad - 2x_4 \qquad \le 15 \\
&\text{где } x_1 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решение: Чтобы построить задачу, двойственную к данной, упорядочим исходную задачу. Так как требуется найти максимум целевой функции, то ограничения-неравенства должны быть записаны со знаком меньше или равно Умножив третье неравенство на минус 1, приведем систему ограничений к виду

$$
\begin{aligned}
&F = 3x_1 + 4_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 \ (\max) \\
&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 \le 12 \\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 11 \\
&-4x_1 + x_2 - 5x_3 \qquad + x_5 \le -10 \\
&\quad 2x_2 \qquad - 2x_4 \qquad \le 15 \\
&\text{где } x_1 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Двойственная задача будет иметь четыре переменные y_1 y_2 y_3 y_4, пак как исходная задача содержит четыре ограничения. В соответствии с указанными правилами запишем двойственную задачу.

$$
\begin{aligned}
&F = 12y_1 - 10y_2 + 15y_3 + 11y_4 \ (\min) \\
&2y_1 - 4y_2 \qquad + y_4 \ge 3 \\
&3y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 4 \\
&4y_1 - 5y_2 \qquad + 5y_4 \ge -1 \\
&-y_1 \qquad + 3y_3 + 2y_4 = -5 \\
&-2y_1 + y_2 \qquad - 3y_4 = -5 \\
&\text{где } y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Второе и пятое ограничения двойственной задачи записаны в виде равенства, так как на соответствующие им переменные x_1 и x_5 в исходной задаче не наложено условие неотрицательности. На переменные y_1, y_2, y_3 наложено условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче, приведенной к виду (3.1), им соответствует ограничения-неравенства.

3.3. Двойственные оценки и их значение

Теорема 3.3 В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных y^*_i численно равны частным производным df_{max}/db_i для исходной задачи.

Данная теорема, или теорема об оценках, позволяет определить приращение целевой функции при малых изменениях свободных членов Δb_i, системы ограничений.

Двойственные оценки $y^*_1 \ldots, y^*_m$ позволяют произвести экономический анализ пары двойственных задач, в частности определить дефицитность ресурсов, сырья, продукции. Большей условной оценке соответствует наиболее дефицитный ресурс (сырье, продукция). Для i-го недефицитного ресурса двойственная оценка $y^*_i = 0$.

С помощью двойственной оценки удается определить степень влияния ограничений на значение целевой функции $y^*_i = df_{max}/db_i$. Предельные значения (нижняя и верхняя граница) ограничений, для которых двойственные оценки остаются неизменными, определяются по формулам

$$\overset{\text{н}}{\Delta b_i} = \min_{\substack{j \\ d_{ij} > 0}} \{x^*_j / d_{ij}\} \qquad \overset{\text{в}}{\Delta b_i} = \left| \min_{\substack{j \\ d_{ij} < 0}} \{x^*_j / d_{ij}\} \right|,$$

где d_{ij} элементы матрицы $(d_{ij}) = A^{-1}$, обратной матрице базиса оптимального плана. Матрица базиса оптимального плана содержит элементы a_{ij}, т.е. A + (a_{ij}, m x n.

Если в план включаются новые виды продукция, то их оценка производится по формуле

$$\boldsymbol{\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j}$$

Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ нецелесообразно включать новый вид продукции.

4. Пример решения задачи

4.1. Постановка задачи

Предприятие имеет возможность производить продукцию $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3 объемы допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами 34 , 16 и 22 единиц. Расход ресурса P_i (i= 1..3) на единицу продукции $П_j$ (j= 1..4) задается элементами следующей матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Плановая себестоимость продукции $П_1$ $П_2$, $П_3$, $П_4$ соответсвенно равна 18, 14, 15, 10 единиц, а оптовая цена - 25, 17, 19, 12 единиц.

Требуется: найти оптимальный план и экстремальную величину целевой функции двойственной задачи.

4.2. Алгоритм решения задачи

1. составить экономико-математическую модель задачи, пользуясь которой можно найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль;

2. симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли. Вскрыть экономический смысл дополнительных переменных в оптимальном плане;

3. составить модель задачи, двойственной к исходной задаче;

4. пользуясь теоремами двойственности, по решению исходной задачи, найденному в пункте 2, найти оптимальный план и экстремальную величину целевой функции двойственной задачи.

4.3. Решение контрольного примера

1) Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 - количество единиц продукции соответственно $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, планируемой к выпуску, а через f— величину прибыли от реализации этой продукции. Тогда учитывая значение прибыли
от единицы продукции $П_1$ равное 25-18 = 7, от $П_2$ - 3, от $П_3$- 4, от $П_4$ –2 единицы, запишем суммарную величину прибыли - целевую функцию - в следующем виде:

$$f=7x,+ 3x_2 + 4x_3+2x_4 \qquad \textbf{(4.1)}$$

Затраты ресурса P_1 на выполнение плана (x_1, x_2, x_3, x_4) составят ($2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4$) единиц, где $2x_1$—затраты ресурса P_1 на выпуск x_1 единицы продукции $П_1$: $4x_2$ - x_2 единицы продукции $П_2$ и т.д. Указанная сумма не может превышать имеющийся запас P_1 - 34 единицы, т.е.

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 <34 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Аналогично получаем ограничения по расходу ресурсов P_2и P_3

$$4x_1 + \ x_2 + 4x_3 + x_4 <16 \qquad \textbf{(4.3)}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 <22 \qquad \textbf{(4.4)}$$

По смыслу задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 не могут выражаться отрицательными числами, т.е.

$$x_j \geq 0 \ (j=1\ldots4) \qquad \textbf{(4.5)}$$

Таким образом получили математическую модель данной задачи состоящую из (4.1) - (4.5).
Итак, математически задача сводится к нахождению числовых значений x_1*, x_2*, x_3*, x_4* переменных x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющих линейным неравенствам (4.2)—(4.5) и доставляющих максимум линейной функции (4.1).

2) Прежде чем решать задачу линейного программирования симплекс-методом, ее модель приводят к канонической форме. Основным признаком канони-

ческой формы является запись ограничений задачи в виде равенств. В нашем же случае ограничения (5.2) - (5.4) имеют вид неравенств типа меньше или равно. Чтобы преобразовать их в эквивалентные уравнения, введем в левые части неравенств дополнительные (балансовые) неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7, обозначающие разности между правыми и левыми частями этих неравенств. В результате модель можно записать в виде:

$$f=7x_{,}+3x_2+4x_3+2x_4 \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 &= 34 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 + x_4 &= 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 22 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$\text{где } x_j \geq 0 \ (j=1\ldots7) \qquad \textbf{(4.8)}$$

Заметим здесь же, что дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 имеют вполне определенный экономический смысл - это возможные остатки ресурсов. Их еще называют резервами.

Анализируя каноническую модель (4.6)—(4.8), замечаем, чпо каждая из переменных x_5, $x_б$, x_7 входит только в одно из уравнений системы (4.7). Это обстоятельство свидетельствует о том, что в системе (4.7) переменные x_5, $x_б$, x_7 являются базисными, а остальные переменные - свободными. В связи с этим в первую симплекс-таблицу систему ограничительных уравнений (4.7) можно записать в виде, разрешенном относительно базиса x_5, $x_б$, x_7 (см таблицу 4.1).

Таблица 4.1

БП	СП				
	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
X_5=	34	2	4	1	5
X_6=	16	4	1	4	1
X_7=	22	2	3	1	2
F=	0	-7	-3	-4	-2

Все элементы столбца свободных членов положительны, поэтому содержащийся в таблице 5.1 план (0; 0; 0; 0; 34; 16; 22). Является опорным. Однако этот план не является оптимальным, в f-строке имеются отрицательные элементы.

Чтобы получить новый опорный план, более близкий к оптимальному, выполним симплексное преобразование таблицы 5.1 С этой целью выберем переменные, участвующие в преобразовании базиса x_5, $x_б$, x_7 в новый базис. Наибольший по модулю отрицательный элемент минус 7 f- строки указывает, что в новый базис следует ввести переменную x_1 т.е. в качестве разрешающего в предстоящем симплексном преобразовании надо взять первый столбец. Чтобы определить переменную, выводимую из базиса, составляем симплексные отношения и выбираем наименьшее из них:

Min (34:2; 16:4; 22:2) = min (17; 4; 11) = 4.

Таким образом производя шаг за шагом симплексное преобразование получаем следующую таблицу 4.2:

Таблица 4.2

БП	СП				
	1	$-x_6$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$X_5=$	26	-0.5	1.75	-1	4.5
$X_1=$	4	0.25	0.25	1	0.25
$X_7=$	14	-0.5	**2.5**	1	1.5
F=	28	1.75	-2.5	3	-0.25

Так как в f – строке есть отрицательные элементы, то необходимо проделать ещё одну итерацию, в результате чего получим таблицу 4.3

Таблица 4.3

БП	СП				
	1	$-x_6$	$-x_7$	$-x_3$	$-x_4$
$X_5=$	6.4				
$X_1=$	2.6				
$X_2=$	5.6				
F=	35	1.5	0.5	2.5	0.5

Следовательно, опорный план (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0) является оптимальным, а соответствующее ему значение 35 целевой функции будет максимальным. Итак, по оптимальному плану следует изготовить 2,6 единиц продукции $П_1$ и 5,6 единиц продукции $П_2$; продукцию $П_3$ и $П_4$ производить не следует. При этом предприятие получит максимальную прибыль в размере 35 денежных единиц. Останутся неиспользованными 6,4 единиц ресурса $Р_1$, а ресурсы $Р_2$ $Р_3$ и будут израсходованы полностью;

3) Преобразуем теперь модель в двойственную задачу путём транспонирования:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 34 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 16 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 22 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & f_{(\max)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 34 & 16 & 22 & |_{\min} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(4.9)}$$

Из полученной матрицы легко получаем модель задачи двойственной к исходной:

$$F = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \ (\min) \qquad \mathbf{(4.10)}$$

$$\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 7 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4 \\ 5y_1 + y_3 + 2y_3 \geq 2 \end{array} \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$\text{где } y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0. \qquad \textbf{(4.12)}$$

4) Из теории двойственности следует, что если решена прямая задача, то одновременно была решена и двойственная к ней.

В пункте 2 мы нашли оптимальный план исходной задачи, его компоненты находятся в таблице 4.3, в f-строке этой же таблицы содержатся компоненты y^*_i оптимального плана двойственной задачи (4.10) - (5.12). Выписать компоненты y* поможет соответствие между переменными двойственных задач.

Чтобы установить это соответствие, преобразуем ограничения-неравенства (4.11) в эквивалентные уравнения, вычитая из левых частей дополнительные неотрицательные переменные $y_4\ y_5\ y_6\ y_7$, равные разности между левыми и правыми частями:

$$F = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \text{ (min)}$$

$$\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 - y_4 = 7 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 - y_5 = 3 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 - y_6 = 4 \\ 5y_1 + y_3 + 2y_3 - y_7 = 2 \end{array}$$

$$\text{где } y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0.$$

Используя связь между свободными и базисными переменными прямой и двойственной задачи можно записать следующее соответствие:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{СП}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{БП}} \\ x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Воспользуемся соответствием (4.13) следующим образом. Как видно, переменная y_1 связана с переменной x_5 (поэтому их называют двойственными переменными), а в таблице 4.3 x_5 находится в базисе. значит двойственная ей переменная y_1 на этом этапе расчетов является свободной и, как свободная переменная равна нулю (в любой двойственной паре всегда одна переменная базисная, а другая свободная). Итак, $y_5^* = 0$. Далее, y_2 соответствует x_6, а в таблице 4.3 под x_6 в f-строке находится элемент 1,5, следовательно, y2* =1,5. точно так же устанавливаем y3*= 0,5; y4*=0; y5*=2,5; y7*=0,5.

Из теоремы двойственности следует, что экстремальные значения целевых функций разрешимых двойственной задачей совпадают, поэтому g min = f min = 35.

Литература

1. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1987.-248с.
2. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сб. задач 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Высш. шк.,1990.-239с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев, Вища школа, 1988 г., с.552
4. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А.И. Штерна. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1990.- 488с.
5. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.-496с., ил.
6. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963 г., 776 с.
7. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.