Тема 9 Транспортные модели

Введение

Транспортная задача является одной из самых распространенных специальных задач линейного программирования. Частные постановки задачи рассмотрены рядом специалистов по транспорту, например, А. Н. Толстым. Первая строгая постановка транспортной задачи принадлежит Хичкоку, и поэтому в зарубежной литературе ее называют проблемой Хичкока. Первый точный метод решения транспортной задачи разработан советскими учеными Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным.

Транспортные задачи составляют класс задач линейного программирования, специфика математической модели которых позволяет применять для их решения наряду с общими методами линейного программирования специальные методы, значительно сокращающие процесс вычислений.

Цель построения модели транспортной задачи состоит в определении количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения, с тем, чтобы общие транспортные расходы были минимальными.

Транспортная модель используется для составления наиболее экономичного плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов (например, заводов) в пункты доставки (например, склады). Транспортную модель можно применять при рассмотрении ряда практических ситуаций, связанных с управлением запасами, составлением сменных графиков, назначением служащих на рабочие места, оборотом наличного капитала, регулированием расхода воды в водохранилищах и многими другими. Кроме того, модель можно видоизменить, с тем чтобы она учитывала перевозку нескольких видов продукции.

Транспортная задача, по существу, представляет собой задачу линейного программирования, которую можно решать симплекс-методом. Однако специфическая структура условий задачи позволяет разработать более эффективный вычислительный метод, который, по существу, воспроизводит шаги симплекс-алгоритма.

Транспортная модель имеет ряд важных приложений, в число которых входят задача о назначениях и задача с промежуточными пунктами, В то же время транспортная модель и ее обобщения представляют собой частные случаи сетевых моделей.

Определение транспортной модели и ее применение

Транспортная модель используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При построении модели используются

1) величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;

2) стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пункта назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определении количества продукции, которую следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения, с тем, чтобы транспортные расходы были минимальными. Основное предположение, используемое при построении модели , состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимой продукции. Единицами измерения объема перевозимой продукции могут быть, например, одна стальная балка, направляемая на строительство моста, или грузовик. В любом случае единицы производства и потребления должны соответствовать принятым определениям единиц перевозимой продукции.

Постановка задачи

Имеется m-пунктов поставки некоторой продукции объемом $a_i,\ i=\overline{1,m}$ и n пунктов потребления с объемами $b_i,\ i=\overline{1,n}$. Продукцию можно перевозить из любого пункта поставок в любой пункт потребления (рис. 1).

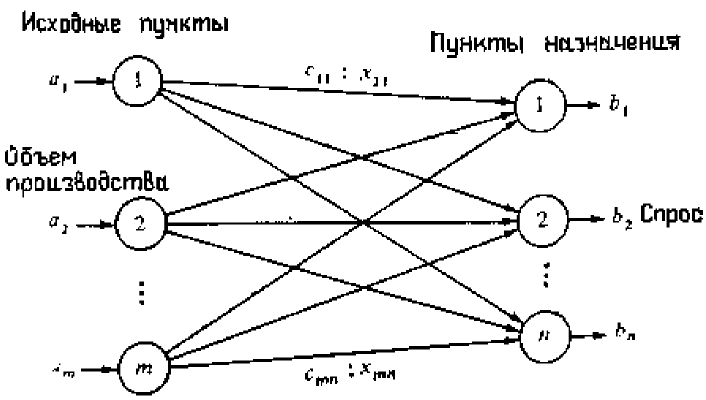

Рис. 1.

Требуется организовать перевозки таким образом, чтобы:

а) вся продукция из пункта поставок была вывезена,

б) запросы всех пунктов потребления были выполнены, в) суммарная стоимость перевозок была минимальна.

На рис. 1 изображена транспортная модель в виде сети с m исходными пунктами и *n* пунктами назначения. *Исходным пунктам* и *пунктам назначения* соответствуют вершины. Дуга, соединяющая исходный пункт с пунктом назначения, представляет маршрут, по которому перевозится продукция. Количество продукции, производимой в пункте i, обозначено через a_i, а количество продукции потребляемой в пункте j,— через b_j; c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции из i в j.

Более компактный способ представления транспортной модели предполагает использование **транспортной таблицы** 1, имеющей вид матрицы, в которой строки соответствуют исходным пунктам, а столбцы — пунктам назначения. Коэффициенты стоимости c_{ij} расположены в правом верхнем углу каждой ячейки (i, j), в правом столбце отмечают имеющиеся запасы a_i, а в нижней строке - величины спроса b_j. Обычно в ячейках таблицы записывают и решения задачи в виде X_{ij}, а также отмечают вспомогательные вычисления.

Таблица 1. Транспортная таблица

Пункты отправления	**Пункты назначения**					**Запасы**
	B_1	....	B_i	....	B_n	
A_1	$C_{i,1}$ $X_{i,1}$		$C_{1,i}$ $X_{1,j}$		C_1,n X_1,n	a_1
...	…	…	...	…	...	…
A_i	$C_{i,1}$ $X_{i,1}$		$C_{i,j}$ $X_{i,j}$		$C_{i,n}$ $X_{i,n}$	a_i
...	...	…	...	…	...	...
A_m	$C_{m,1}$ $X_{m,1}$		$C_{m,j}$ $X_{m,j}$		$C_{m,n}$ $X_{m,n}$	a_m
Потребности	b_1	…	b_i	…	b_n	

Специальный метод решения транспортной задачи, основанный на симплекс-методе, предполагает использование транспортных таблиц.

Пусть x_{ji} – количество продукции перевозимой из i-го пункта в j-ый пункт; c_{ij} – стоимость перевозки из i-го пункта в j-ый пункт. Тогда модель будет следующей:

Найти min $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,m} \text{, запасы,}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = \overline{1,n} \text{, запросы,}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т. е.

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то модель такой транспортной задачи называется <u>*закрытой*</u> *(***сбалансированной***)*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой (*несбалансированной*)*.

Сбалансированная модель отличается от вышеприведенной модели лишь тем, что все ограничения превращаются в равенства, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\ldots,n,$$

$x_{ij} \ge 0$ для всех *i* и *j*,

то есть весь продукт из *i*-го пункта поставки должен быть вывезен и запросы всех пунктов j потребления удовлетворены полностью.

В реальных условиях не всегда объем производства равен спросу или превосходит его. Однако транспортную модель всегда можно сбалансировать. Помимо того, что баланс делает удобным моделирование определенных практических ситуаций, он полезен для разработки метода решения, который полностью учитывает особую структуру транспортной модели.

Условие дефицита производства.

Предположим, что условие баланса не выполняется:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ – условие дефицита продукции.}$$

В этом случае вводится фиктивный $m + 1$ пункт поставок с объемом продукции $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ с нулевыми транспортными перевозками $c_{m+1j}=0$. В результате приходим к новой задаче, для которой условие баланса выполняется. Решая новую задачу, получаем оптимальный план *x*. Компоненты $x_{m+i\,j}$ будут обозначать объем недопоставленной продукции в j пункт потребления.

Условие перепроизводства.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$ – условие перепроизводства продукции.

Вводят фиктивный $n + 1$ пункт потребления с объемом $b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и $C_{i\ n+1} = 0 \quad \forall i = \overline{1,m}$.

Новая задача удовлетворяет условию баланса и компоненты $x^{\circ}_{i\ n+1}$ будут иметь физический смысл – объем невывезенной продукции из i-го пункта поставок.

Модели транспортной задачи. Примеры.

Пример 1. **Задачи наилучшего распределения боевых средств** (задачи целераспределения).

Пусть имеется система обслуживания, состоящая из n типов различных приборов. Обозначим N, (j = 1, ..., n) – количество приборов j-го типа, тогда общее количество приборов

$$\sum_{j=1}^{n} N_j = N .$$

В систему обслуживания в определенные моменты времени прибывают заявки разных типов. Обозначим $d_i(t)$ (i = 1, ..., m) – число заявок i-го типа, прибывших в систему в момент времени t.

Общее число заявок равно

$$D = \sum_{i=1}^{m} d_i .$$

Различные приборы имеют разную эффективность (производительность) при обслуживании соответствующих типов заявок. Обозначим матрицу эффективностей

$$\mathbf{M} = \left\| \mu_{ij} \right\| \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Если предположить, что каждый прибор в любой момент времени может обслуживать не более одной заявки, то в данной задаче требуется распределить свободные приборы по заявкам так, чтобы интегральная эффективность системы была наибольшей.

Обозначим $x_{ij}\ (0 \le x_{ij} \le N_j)$ – число приборов j-го типа, отведенных для обслуживания заявок i-го типа.

Тогда сформулированную выше задачу можно записать таким образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{i\,j}x_{i\,j}.$$

максимизировать при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m}x_{i\,j} \le N_j; \quad .\sum_{j=1}^{n}x_{i\,j} \le d_i; \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n.$$

Полученная модель является моделью открытой транспортной задачи.

Пример 2. **Задача перевозки неоднородного продукта на разнотипном транспорте.**

Выше была рассмотрена такая постановка транспортной задачи, когда требовалось перевозить однородный продукт на однородном транспорте. В данном случае при отказе от этих упрощающих предположений задача значительно усложняется, однако иногда ее удается привести к классической транспортной задаче искусственным путем.

Пусть для обеспечения перевозок используют S автохозяйств, в каждом из которых имеется r типов машин. Допустим, что разнотипные машины, обладая различными эксплуатационными характеристиками и разной скоростью, могут доставить любой из m видов грузов каждому из n потребителей.

Вводим следующие величины, которые предполагаем известными: a_{lk} – количество машин k-го типа в автохозяйстве l, где $l = 1, . . ., S$; $k = 1, ... , r$; c_{ij} – количество i-го груза, которое подлежит перевозке j-му потребителю ($i = 1, . . . , m$; $j = 1, .. . , n$), d_{ij} – количество i-го груза, которое перевозят j-му потребителю (определяют по известной грузоподъемности машин); t_{ijlk} – время занятости одной машины k-го типа автохозяйства l по перевозке i-го груза j-му потребителю.

Определить, сколько машин каждого типа из каждого автохозяйства следует направить для полного удовлетворения спроса при минимальных общих затратах автомобиле-часов.

Количество машин k-го типа из автохозяйства l, занятых перевозкой i-го груза j-му потребителю, обозначим x_{ijlk} .

Найти $\min z = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n}\sum_{l=1}^{S}\sum_{k=1}^{r}t_{ijlk}x_{ijlk}$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ijlk} \le a_{lk}; \quad l = 1, ..., S; \quad k = 1, ..., r.$$

и

$$\sum_{l}\sum_{k}d_{ij}x_{ijlk} = c_{ij}; \quad 0 \le x_{ijlk}.$$

Заменим пары индексов (i, j) и (l, k) соответственно индексами λ и μ по следующим формулам:

$\lambda = i + m\,(j-1)$; $\mu = l + S\,(k-1)$.

Если индекс i принимает все значения от 1 до m, а индекс j – от 1 до n, то индекс λ принимает все целые значения от 1 до $m \bullet n$.

Аналогично при изменении значений индекса l от 1 до S, а индекса k – от 1 до r индекс μ принимает все значения от 1 до Sr.

Введем для переменных следующие обозначения: $x_{ijlk} = z_{\lambda\mu}$, $t_{ijlk} = \tau_{\lambda\mu}$, $a_{lk} = b_\mu$, а для отношения $c_{ij}/d_{ij} = g_\lambda$.

В новых обозначениях задача (5) имеет такой вид:

найти $\min z = \sum_{\lambda=1}^{mn}\sum_{\mu=1}^{Sr}\tau_{\lambda\mu}z_{\lambda\mu}$

при условиях

$$\sum_{\lambda=1}^{mn} z_{\lambda\mu} \le b_\mu;\ \mu = 1, ..., Sr;$$

$$\sum_{\mu=1}^{Sr} z_{\lambda\mu} = g_\lambda;\ \lambda = 1, ..., mn;\ z_{\lambda\mu} \ge 0.$$

Итак, это обычная транспортная задача с размерностью $mn \times Sr$.

По компонентам оптимального плана $z_{\lambda\mu}$ вычисляют составляющие решения исходной задачи $x_{ijkl\text{опт.}}$ При этом индексы i и j вычисляют следующим образом:

$$i = \begin{cases} m, \text{ если } \lambda \text{ кратно } m; \\ \text{остатку от деления } \lambda \text{ на } m, \text{ если } \lambda \text{ не кратно } m; \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{m}, \text{ если } \lambda \text{ кратно } m; \\ \text{целой части} \left(\dfrac{\lambda}{m} + 1\right), \text{ если } \lambda \text{ не кратно } m. \end{cases}$$

Аналогично вычисляют индексы l и k по значениям μ.

Пример 3. **Стандартная транспортная модель.**

Заводы автомобильной фирмы MG расположены в Лос-Анджелесе, Детройте и Новом Орлеане. Основные центры распределения продукции сосредоточены в Денвере и Майами. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1500 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимость перевозки по железной дороге одного автомобиля на одну милю равняется примерно 8 центам. Расстояния в милях между заводами и центрами распределения приведены в таблице 2.

Таблица 2. Расстояния между пунктами.

	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новый Орлеан	1275	850

Расстояния можно перевести в стоимость перевозки одного автомобиля (переводной коэффициент=0,08 у.е./миля). В результате получается табл. 3 стоимостей перевозок, которая содержит коэффициенты c_{ij} общей модели.

Таблица 3. Стоимость перевозок между пунктами.

	Денвер(1)	Майами(2)
Лос-Анджелес (1)	1000	2690
Детройт (2)	1250	1350
Новый Орлеан (3)	1275	850

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из исходного пункта i в пункт назначения j через x_{ij}. Поскольку суммарный объем производства автомобилей (1000+1500+1200=3700) равен суммарному спросу (2300+1400=3700), данная модель является сбалансированной транспортной моделью, и соответствующая задача линейного программирования с ограничениями в виде равенств формируется так:

минимизировать $z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$ при ограничениях

$x_{11}+x_{12} =1000$,

$x_{21}+x_{22} =1500$,

$x_{31}+ x_{32}=1200$,

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=2300$,

$x_{12} + x_{22} + x_{32}=1400$,

$x_{ij}\geq 0$ для всех i, j.

Задачу можно представить в виде транспортной таблицы 4.

Таблица 4. Модель перевозок.

Пункты	Денвер	Майами	Запасы
Лос-Анджелес	X_{11} 80	X_{12} 215	1000
Детройт	X_{21} 100	X_{22} 108	1500
Новый Орлеан	X_{31} 102	X_{32} 68	1200
Запросы	2300	1400	

В задаче фирмы MG объем производства и величина спроса оказались равными. Кроме того, в ней имеется только один вид продукции (одна марка автомобилей), что ограничивает общность стандартной транспортной модели. Следует иметь в виду, что стремление сбалансировать транспортную задачу (т. е. превратить все ее ограничения в равенства) обусловлено возможностью применения в этом случае эффективного вычислительного метода, основанного на использовании табличного представления.

Пример 4. **Сбалансированная транспортная модель.**

Изменим условия в предыдущем примере, предположив, что завод в Детройте производит не 1500, а 1300 автомобилей. Это приведет к **дисбалансу,** поскольку суммарный объем производства (3500) не равен суммарному спросу (3700).

Другими словами, дисбаланс означает, что спрос в центрах распределения автомобилей полностью удовлетворить не удается. В этом случае необходимо видоизменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток автомобилей (3700—3500=200) оптимально распределялся между центрами, в которые поступают автомобили.

Поскольку спрос превышает объем производства, можно ввести дополнительный фиктивный исходный пункт (завод) с производительностью в 200 автомобилей. В обычных условиях завод может, отправлять свою продукцию в любой центр распределения автомобилей. Количество продукции, «отправляемой» фиктивным заводом в пункт назначения, будет представлять собой объем недостающей продукции в этом пункте.

Для завершения построения модели не хватает лишь информации о стоимости «перевозок» с фиктивного завода в пункты назначения. Поскольку на самом деле такого завода не существует, никакие перевозки не осуществляются, и соответствующая стоимость перевозки единицы продукции равна нулю (табл. 5). Однако эту ситуацию можно рассмотреть и по-другому, считая, что каждая единица недопоставленной в центры распределения продукции облагается штрафом. В этом случае транспортные расходы на единицу продукции равны штрафу за единицу продукции, недополученную в том или ином центре распределения.

Таблица 5. Сбалансированная модель при недопроизводстве.

	Денвер	Майами	Запасы
Лос-Анджелес (1)	80	215	1000
Детройт (2)	100	108	1300
Новый Орлеан (3)	102	68	1200
Фиктивный завод	0	0	200
Запросы	2300	1400	

Аналогично, если объем производства превышает спрос, можно ввести дополнительные фиктивные пункты назначения, которые «поглощают» избыток продукции. Пусть спрос в Денвере упал до 1900 автомобилей. Введём в рассмотрение фиктивный центр распределения. Автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный центр распределения, представляют *избыток* производства на этом заводе. Соответствующая стоимость перевозки одного автомобиля равна нулю табл. 6)). Однако можно назначить штраф за *хранение* автомобиля на складе завода, тогда стоимость перевозки одного автомобиля станет равной стоимости его хранения.

Таблица 6. Сбалансированная модель при перепроизводстве.

	Денвер	Майами	Фиктивный центр	Запасы
Лос-Анджелес (1)	80	215	0	1000
Детройт (2)	100	108	0	1500
Новый Орлеан (3)	102	68	0	1200
Запросы	1900	1400	400	

Пример 5. **Многопродуктовая транспортная модель**.
Фирма MG производит автомобили четырех различных марок, которые для простоты будем обозначать как Ml, M2, M3 и M4. Завод в Детройте выпускает автомобили марок Ml, M2 и M4. В Новом Орлеане производятся только автомобили марок Ml и M2. Завод в Лос-Анджелесе выпускает автомобили марок M3 и M4. В приведенной ниже таблице указаны объем выпуска разных заводов и величина спроса в центрах распределения для автомобилей каждой марки.

В целях упрощения вычислений предположим, что стоимость перевозки автомобиля любой марки на одну милю по-прежнему равна 0.08 у.е.

Для того чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, изменим транспортную модель следующим образом. Вместо того чтобы рассматривать каждый завод как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с числом марок автомобилей, выпускаемых этим заводом (табл.7).

Таблица 7. Объемы выпуска и спроса.

	Марка				Всего
	M1	M2	M3	M4	
Лос-Анджелес			700	300	1000
Детройт	500	600		400	1500
Новый Орлеан	800	400			1200
Центры распределения					
Денвер	700	500	500	600	2300
Майами	600	500	200	100	1400

Аналогично поступим и с пунктами назначения, т. е. будем считать, что каждый из них состоит из четырех станций, соответствующих четырем маркам автомобилей. Получим семь исходных пунктов и восемь пунктов назначения. Сетевая модель изображена на рис. 2.

Заметим, что некоторые маршруты недопустимы, поскольку в данной постановке задачи автомобили различных марок не могут заменять друг друга. Например, нельзя осуществлять перевозки из пункта производства автомобилей марки Ml в пункт доставки автомобилей марки М4. На рис. 2 запрещенным маршрутам соответствует отсутствие дуги

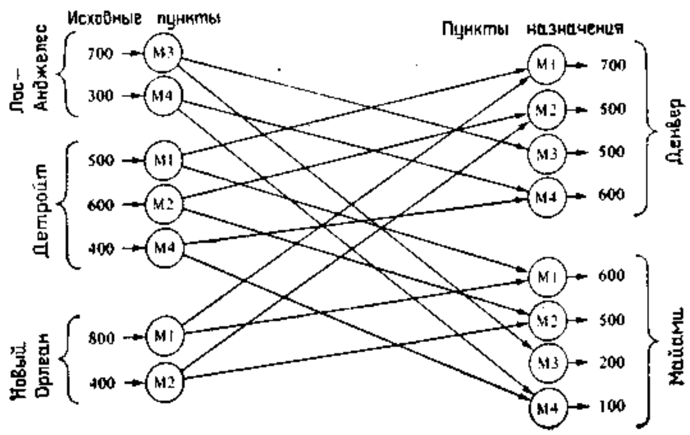

Рис.2. Сетевая модель многопродуктовых поставок.

Полная транспортная модель многопродуктовых поставок приведена ниже в таблице 8.

Если внимательно изучить транспортную таблицу, то можно заметить, что на самом деле задачу не обязательно описывать *одной* моделью. В силу независимости поставок можно было бы представить задачу по каждой марке автомобилей в виде отдельной таблицы перевозок, но только существенно меньшего размера.

Таблица 8. Модель многопродуктовых поставок.

		Денвер				Майами				
		M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4	Запасы
Лос-Анджелес	M3			80				215		700
	M4				80				215	300
Детройт	M1	100				108				500
	M2		100				108			600
	M4				100				108	400
Новый Орлеан	M1	102				68				800
	M2		102				68			400
Запросы		700	500	500	600	600	500	200	100	

С вычислительной точки зрения небольшие подзадачи решить существенно эффективнее, чем одну сложную задачу.

Какой же смысл тогда использовать модель, заданную полной транспортной таблицей? Вспомним, что возможность разбиения таблицы на части обусловлена полной независимостью различных марок автомобилей. Если бы между разными марками существовала связь (например, одну из них можно было заменять другой), то в общем случае исходную модель не удалось бы разбить столь просто.

Приложения транспортной модели не ограничиваются задачей о перевозке продукции между различными географическими пунктами (производства и потребления). Ниже приведен пример задачи совсем другого характера — из области управления запасами.

Пример 6. **Модель производства с запасами.**

Некоторая фирма переводит свой главный завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться в течение четырех месяцев. Величины спроса в течение этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет

1) избытка произведенных в прошлом месяце изделий, сохраняющихся для реализации в будущем;

2) производства изделий в течение текущего месяца;

3) избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждый месяц составляют 4 у.е. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные издержки на хранение в 0,5 у.е. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом 2 у.е. в месяц.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск 50, 180, 280, 270 изделий соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделий.

Задачу можно сформулировать как транспортную задачу. Эквивалентность между элементами производственной и транспортной систем устанавливается следующим образом (табл.9).

Таблица 9. Эквивалентность систем.

Транспортная система	***Производственная система***
Исходный пункт i	Период производства i

Пункт назначения j	Период потребления j
Предложение в пункте i	Объем производства за период i
Спрос в пункте j	Реализация за период j
Стоимость перевозки из i в j	Стоимость производства и хранения за период от i до j

Для рассматриваемой задачи стоимость «перевозки» изделия из периода i в период j выражается как

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{стоимость производства в } i-\text{й период}, \ i = j, \\ \text{стоимость производства в } i-\text{й период} + \text{стоимость} \\ \qquad \text{задержки от } i \text{ до } j, \ i < j, \\ \text{стоимость производства в } i-\text{й период} + \text{штраф за} \\ \qquad \text{нарушение срока}, \ i > j. \end{cases}$$

Из определения c_{ij} следует, что затраты в период i при реализации продукции в тот же период i(i—j) оцениваются только стоимостью производства. Если в период i производится продукция, которая будет потребляться позже ($i<j$), то имеют место дополнительные издержки, связанные с хранением. Аналогично производство в i-й период в счет невыполненных заказов ($i>j$) влечет за собой дополнительные расходы в виде штрафа. Например, c_{11} = 4 долл., c_{24}=4+(0,5+0,5)=5 у.е.,c_{41} = 4+(2+2+2) = 10 у.е.

Таблица 10. Модель производственной системы.

Период	1	2	3	4	Объем производства
1	4	4.5	5	5.5	50
2	6	4	4.5	5	180
3	8	6	4	4.5	280
4	10	8	6	4	270
Спрос	100	200	180	300	

Решение транспортной задачи

В данном разделе мы опишем решение транспортной задачи. При использовании рассматриваемого метода повторяются этапы реализации симплекс-алгоритма; однако способ проверки условий: оптимальности и допустимости видоизменяется.

Основные шаги алгоритма.

Шаг 1. Найти начальное допустимое решение.

Шаг 2. Выделить из числа небазисных переменных вводимую в базис. Если все небазисные переменные удовлетворяют условию оптимальности (симплекс-метода), закончить вычисления; в противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Выбрать выводимую из базиса переменную (используя условие допустимости) из числа переменных текущего базиса; затем найти новое базисное решение. Вернуться к шагу 2.

Для пояснения воспользуемся задачей, соответствующей приведенной ниже таблице. Стоимость перевозки единицы продукции c_{ij} дана в условных единицах. Объем производства и величины спроса представлены в количествах изделий (табл. 11).

Таблица 11.Транспортная таблица задачи.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
Запросы b_j	5	15	15	10	

Определение начального решения

Согласно общему определению транспортной модели необходимо ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), откуда следует, что одно уравнение оказывается зависимым, то есть транспортная модель содержит только $m+n$-1 независимых уравнений. Таким образом, как и в симплекс-методе, начальное базисное допустимое решение должно иметь $m+n$-1 базисную переменную.

Обычно, если транспортная модель представлена в виде симплекс-таблицы, для получения начального базисного решения следует использовать искусственные переменные. Однако, если построить транспортную таблицу, начальное базисное допустимое решение легко получить непосредственно из нее. Для этой цели используется один из приведенных ниже методов.

Метод северо-западного угла.

Следуя правилу *северо-западного угла,* начинают с того, что приписывают переменной x_{11} (расположенной в северо-западном углу таблицы) максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и объем производства. После этого вычеркивают соответствующий столбец (или строку), фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. После того как спрос и объем производства во всех не вычеркнутых строках и столбцах приведены в соответствие с установленным значением переменной, максимально допустимое значение приписывается первому не вычеркнутому элементу нового столбца (строки).

Процесс завершается, когда таблица исчерпана. Применим описанную процедуру к примеру в таблице.

1. x_{11} =5, столбец 1 вычеркивается. Тем самым в первом столбце нельзя больше производить никаких операций. На строку 1 теперь приходится 10 единиц.

2. x_{12}=10, строка 1 вычеркивается, а на долю столбца 2 остается 5 единиц.

3. x_{22} = 5, столбец 2 вычеркивается, а в строке 2 остается 20 единиц.

4. x_{23} = 15, столбец 3 вычеркивается, в строке 2 остается 5 единиц.

5. x_{24}=5, строка 2 вычеркивается, в столбце 4 остается 5единиц.

6. x_{34} =5, вычеркивается строка 3 или столбец 4. Таблица исчерпана, процесс заканчивается.

Получено опорное решение (табл. 12). Необходимое количество базисных переменных равно $m+n—1=6$, остальные переменные — небазисные со значениями, равными нулю. Соответствующие транспортные расходы равны 5×10+10×0+5×7+15×9+5×20+5×18=410 условных единиц.

Таблица 12. Опорное решение (северо-западный угол).

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
Запросы b_j	5	15	15	10	

Метод наименьшей стоимости

Методы наименьшей стоимости обеспечивают получение начального решения путем выбора «дешевых» маршрутов.

Вычисления проводятся следующим образом. Выбирается переменная, которой соответствует наименьшая стоимость во всей таблице, и ей придается возможно большее значение. (Если таких переменных несколько, то берется любая из них.) Вычеркивается соответствующий столбец или строка. Если ограничения по столбцу и строке выполняются одновременно, то, как и в методе *северо-западного угла,* вычеркивается либо столбец, либо строка. После вычисления новых значений спроса и объема производства для всех не вычеркнутых строк и столбцов процесс повторяется при возможно большем значении той переменной, которой соответствует минимальная стоимость среди не вычеркнутых. Процедура завершается, когда таблица исчерпана.

Применяются и модифицированные способы: минимальной стоимости по строке и минимальной стоимости по столбцу.

Способ **минимальной стоимости по строке** основан на том, что мы распределяем продукцию от пункта A_i не в любой из пунктов B_j, а в тот, к которому стоимость перевозки минимальна.

Если стоимости перевозок $c_{i,j}$ и $c_{i,k}$ от пункта A_i к пунктам B_j и B_k равны, то с экономической точки зрения выгоднее распределить продукцию в тот пункт, в котором заявка больше.

Способ **минимальной стоимости по столбцу** аналогичен предыдущему способу. Их отличие состоит в том, что во втором способе мы распределяем продукцию от пунктов B_i к пунктам A_j по минимальной стоимости $c_{j,i}$. Опорный план, составленный одним из способов минимальной стомости, обычно более близок к оптимальному решению.

Для иллюстрации применения метода наименьшей стоимости воспользуемся транспортной задачей из рассмотренного ранее примера. Ниже в таблице приведено начальное решение, полученное следующим образом, x_{12} и x_{31} — переменные, которым соответствуют минимальные стоимости ($c_{12}=c_{31}=0$). Выберем произвольно x_{12}. Соответствующие значения спроса и объема производства определяют $x_{12}=15$, т. е. и по строке, и по столбцу ограничения выполняются. После вычеркивания столбца 2 объем производства в строке 1 остается равным нулю. Теперь среди оставшихся элементов минимальная стоимость соответствует переменной x_{31}. Значение $x_{31}=5$ удовлетворяет ограничениям и по столбцу 1, и по строке 3. После вычеркивания строки 3 оставшийся спрос в столбце 1 равен 0. Наименьший не вычеркнутый элемент — $c_{23}=9$. Ограничения на спрос и объем производства определяют $x_{23}=15$, что приводит к вычеркиванию столбца 3, а значение объема производства в строке 2 становится равным 10. Наименьшая не вычеркнутая стоимость $c_{11}=10$. Поскольку остаток объема производства в строке 1 и остаток спроса в столбце 1 равны нулю, $x_{11}=0$. После вычеркивания столбца 1 «остаток» объема производства в строке 1 равен нулю. Остальные базисные переменные имеют значения $x_{14}=0$ и $x_{24}=10$ (табл. 13). Суммарные затраты, соответствующие этому решению, равны $0\times10+15\times0+0\times11+15\times9+10\times20+5\times0=335$ условных единиц, что лучше результата, полученного при использовании метода северо-западного угла.

Таблица 13. Опорное решение по методу минимальной стоимости.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	
	0	15			15
2	12	7	9	20	
		0	15	10	25
3	0	14	16	18	

	5				5
Запросы b_j	5	15	15	10	

Метод Фогеля

При решении задачи методом Фогеля в таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчет не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и по выше рассмотренным правилам.

Для рассматриваемого примера опорное решение приведено ниже в таблице (табл. 14). Суммарные затраты, соответствующие этому решению, равны 5×0+10×11+10×7+15×9+5×0+0×18=315 условных единиц, что лучше результата, полученного при использовании метода минимальной стоимости.

Таблица 14. Опорное решение по методу Фогеля.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	
		5		10	15
2	12	7	9	20	
		10	15		25
3	0	14	16	18	
	5			0	
Запросы b_j	5	15	15	10	

Сущность всех методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за *n+m-1* шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге). Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполняемая клетка.

После того как проделаны *m+n-2* описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают *(n+m-1)-й* шаг и получают искомый опорный план. Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение *n+m-1* занятых клеток, в которых стоят компоненты опорного плана, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Оптимизация плана транспортной задачи

Распределительный метод

Возьмём за основу предыдущее решение по методу минимальной стоимости (табл. 15).

Попробуем улучшить план. Перенесем, например, 10 единиц из клетки (2,4) в клетку (1,4) и чтобы не нарушить баланса перенесём те же 10 единиц из клетки (1,2) в клетку (2,2). Получим новый план со стоимостью перевозок в 315 единиц (табл. 16). Нетрудно убедиться, что стоимость нового плана на 20 единиц меньше. Таким образом, за счёт циклической перестановки 10 единиц груза из одних клеток в другие нам удалось понизить стоимость плана на 20 условных единиц.

Таблица 15. Опорное решение по методу минимальной стоимости.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	
	0	**15**			**15**
2	12	7	9	20	
		0	**15**	**10**	**25**
3	0	14	16	18	
	5				**5**

Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**	

Таблица 16. Улучшенный план.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i
1	10	0	20	11	
	0	**5**		**10**	**15**
2	12	7	9	20	
		10	**15**		**25**
3	0	14	16	18	
	5				**5**
Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**	

Дальнейший перебор вариантов не улучшает план, из чего можно сделать заключение об оптимальности полученного решения. На этом способе уменьшения стоимости и основан алгоритм оптимизации плана перевозок. Введем понятие цикла.

Циклом в транспортной задаче называется несколько занятых клеток, соединённых замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°, одна из клеток свободная (начало цикла), остальные базисные. Каждый цикл имеет чётное число вершин и значит, чётное число звеньев (стрелок). Существует несколько вариантов цикла:

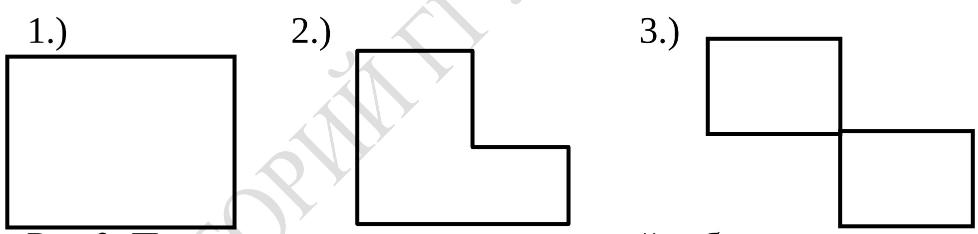

Рис 3. Примеры циклов в транспортной таблице.

Условимся отмечать знаком “+” те вершины цикла, в которых перевозки необходимо увеличить, а знаком “-“ те вершины, в которых перевозки необходимо уменьшить. Цикл с отмеченными вершинами будем называть “означенным”. Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по-прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце – заявке этого столбца. Таким образом, при любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными план остаётся допустимым.

Цена цикла равна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла. Обозначим цену цикла через γ. При перемещении одной единицы груза по циклу стоимость перевозок увеличивается на величину γ. При перемещении по нему k единиц груза стоимость перевозок увеличится на $k\gamma$. Очевидно, для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Каждый раз, когда нам удаётся совершить такое перемещение, стоимость плана уменьшается на соответствующую величину $k\gamma$. Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках таблицы, где стоят положительные перевозки. Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, то есть оптимальный план достигнут.

Метод последовательного улучшения плана перевозок и состоит в том, что в таблице отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой уже не останется. При улучшении плана циклическими переносами, как правило, пользуются приёмом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, то есть заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. При этом общее число базисных клеток остаётся неизменным и равным $m + n - 1$. Этот метод удобен тем, что для него легче находить подходящие циклы.

Для любой свободной клетке транспортной таблицы всегда существует цикл и притом единственный, одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза k, которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки).

Распределительный метод решения транспортной задачи обладает одним недостатком: нужно отыскивать циклы для всех свободных клеток и находить их цены. От этой трудоёмкой работы избавляет специальный метод решения транспортной задачи, который называется методом потенциалов.

Метод потенциалов.

Нахождение вводимой в базис переменной (метод потенциалов)

Вводимую в базис переменную находят, используя условие оптимальности симплекс-метода. Вычисление коэффициентов целевой функции основано на соотношениях между прямой и двойственной задачей. Сначала рассмотрим, как реализуется метод, а затем дадим строгое объяснение вычислительных процедур на основе теории двойственности. Для определения вводимой в базис переменной можно использовать и другой метод, называемый методом «опорных элементов». Хотя вычислительные процедуры в рамках этих методов полностью эквивалентны, метод опорных элементов кажется совершенно непохожим на симплекс-метод.

В методе потенциалов строке i и столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа u_i и υ_j. Для каждой *базисной* переменной x_{ij} текущего решения потенциалы u_i и υ_j должны удовлетворять уравнению

$u_i + \upsilon_j = c_{ij}$.

Эти уравнения приводят к системе, состоящей из $m+n—1$ уравнений (поскольку всего имеется $m+n—1$ базисных переменных), в которых фигурируют $m+n$ неизвестных. Значения потенциалов можно определить из этой системы, придавая одному из них *произвольное* значение (обычно u_1 полагается равным нулю) и затем решая систему из $m+n-1$ уравнений относительно $m+n—1$ остальных потенциалов. Как только решение получено, оценки для небазисных переменных x_{pq} определяются в соответствии с соотношением

$$\bar{c}_{pq} = u_p + \upsilon_q - c_{pq}.$$

(Эти величины не зависят от выбора значения u_1.) После этого для включения в базис выбирается небазисная переменная, имеющая *самую большую положительную оценку* $\bar{c}_{pq}$ (сравните с условием оптимальности симплекс-метода при решении задачи на отысканием минимума).

Если эту процедуру применить к небазисным переменным опорного решения по методу северо-западного угла, то уравнения, связанные с базисными переменными, будут иметь вид

$x_{11}/u_1+\upsilon_1=c_{11}=10$
$x_{12}/u_1+\upsilon_2=c_{12}=0$
$x_{22}/u_2+\upsilon_2=c_{22}=7$
$x_{23}/u_2+\upsilon_3=c_{23}=9$
$x_{24}/u_2+\upsilon_4=c_{24}=20$
$x_{34}/u_3+\upsilon_4=c_{34}=18$

Полагая $u_1 = 0$, получим значения потенциалов $\upsilon_1=10$, $\upsilon_2=0$, $u_2=7$, $\upsilon_3=2$, $\upsilon_4=13$ и $u_3=5$ (табл. 17). Оценки для небазисных переменных определяются следующим образом:

$X_{13}/\bar{c}_{13}=u_1+\upsilon_3-c_{13}=0+2-20= -18$
$X_{14}/\bar{c}_{14}=u_1+\upsilon_4-c_{14}=0+13-11=2$
$X_{21}/\bar{c}_{21}=u_2+\upsilon_1-c_{21}=7+10-12=5$
$X_{31}/\bar{c}_{31}=u_3+\upsilon_1-c_{31}=5+10-0=15$
$X_{32}/\bar{c}_{32}=u_3+\upsilon_2-c_{32}=5+0-14= -9$
$X_{33}/\bar{c}_{33}=u_3+\upsilon_3-c_{33}=5+2-16= -9$

Таблица 17. Вычисление потенциалов.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	5	10			15	0
2		5	15	5	25	7
3				5	5	5
Запросы b_j	5	15	15	10		
Потенциал υ_j	10	0	2	13		

Поскольку переменная x_{31} имеет максимальную положительную оценку c_{pq}, то она и выбирается в качестве вводимой в базис.

Уравнения $u_i+\upsilon_j=c_{ij}$, используемые для нахождения потенциалов, имеют настолько простую структуру, что на самом деле их не нужно записывать в явном виде. Обычно гораздо проще определять потенциалы непосредственно из транспортной таблицы, заметив, что u_i строки i и υ_j столбца j прибавляются к c_ij, если на пересечении строки i и столбца j находится *базисная* переменная x_ij. Определив u_i и υ_j, можно вычислить c_{pq} для всех небазисных пебременных x_{pq}, прибавляя u_p строки p к υ_q столбца q и затем вычитая величину c_{pq} стоящую на пересечении строки p и столбца q.

Нахождение переменной, выводимой из базиса.

Этот шаг эквивалентен использованию условия допустимости в симплекс-методе. Вместе с тем, поскольку все коэффициенты в ограничениях транспортной задачи равны либо нулю, либо единице, отношения, используемые при проверке условия допустимости, всегда будут иметь знаменатель, равный единице. Поэтому значения базисных переменных сразу же дают соответствующие отношения.

Для определения минимального отношения построим *замкнутый цикл,* соответствующий вводимой переменной (x_{31} на данной итерации). Цикл начинается и заканчивается выбранной небазисной переменной. Он состоит из *последовательности* горизонтальных и вертикальных (связанных) отрезков, концами которых должны быть базисные переменные (за исключением тех концов, которые относятся к вводимой в базис переменной). Это означает, что каждая ячейка, стоящая на изломе цикла, должна содержать базисную переменную. Рисунок 4 иллюстрирует цикл, соответствующий вводимой переменной x_{31}, из предыдущего решения. Этот цикл можно выразить при помощи базисных переменных следующим образом: $x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{24}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{31}$. *Несущественно, в каком направлении (по часовой или против часовой стрелки) происходит обход цикла.* Заметим, что для каждого базисного решения и соответствующей небазисной переменной можно построить лишь один цикл

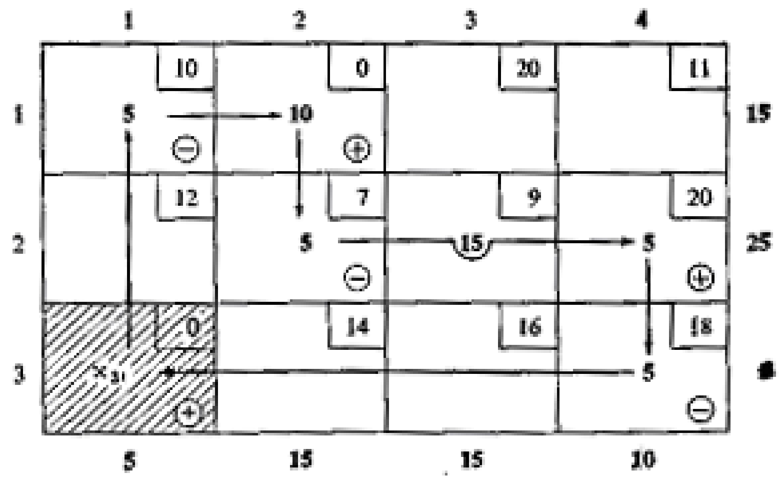

Рис 4. Цикл для клетки x_{31}.

Из рисунка видно, что, если значение x_{31} (вводимой в базис переменной) увеличивается на единицу, для сохранения допустимости решения значения базисных переменных, стоящих на изломах x_{31} цикла, необходимо скорректировать следующим образом: уменьшить x_{11} на единицу, увеличить x_{12} и, наконец, уменьшить x_{34} на единицу. Этот процесс обозначается знаками + и - в соответствующих местах рисунка. Введенные изменения не нарушают ограничений, накладываемых на объем производства и спрос.

Переменная, выводимая из базиса, выбирается из находящихся на изломах цикла переменных, значения которых уменьшаются при увеличении x_{31}. Они располагаются на рисунке в местах, помеченных знаком -. Из рисунка следует, что x_{11} x_{22} и x_{34} — базисные переменные, уменьшающиеся с ростом x_{31}. Выводимой из базиса переменной становится та, которая имеет *наименьшее* значение, поскольку именно она раньше всех достигнет нуля, и любое дальнейшее уменьшение делает ее отрицательной (сравните с условием, допустимости в симплекс-методе, где исключаемая переменная определяется минимальным отношением). В данном примере три перечисленных x_{11}, x_{22} и x_{34} имеют одно и то же значение (=5); в этом случае любую из них можно исключить из базиса. Пусть выбрана переменная x_{34}; тогда значение x_{34} становится равным 5, а переменные, находящиеся на изломах цикла (базисные), соответствующим образом корректируются (т. е. каждая из них увеличивается или уменьшается на 5 единиц в зависимости от знака + или -). Новое решение приведено в табл. 18. Соответствующая стоимость — $0\times10+15\times0+0\times7+15\times9+10\times20+5\times0=335$ единиц. Полученная стоимость отличается от стоимости, соответствующей начальному решению (табл. 12), на 410—335=75 у.е., т. е. на величину, приписанную переменной x_{31} (=5) и умноженную на c_{31} (=15 у.е.).

Базисное решение вырожденное, поскольку базисные переменные x_{11} и x_{22} равны нулю. Однако вырожденность не требует никаких дополнительных мер предосторожности; с нулевыми базисными переменными оперируют точно так же, как с переменными, имеющими положительные значения.

Таблица 18. Вычисление потенциалов.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	10	0	20	11		0
	0	**15**			**15**	
2	12	7	9	20		7
		0	**15**	**10**	**25**	
3	0	14	16	18		-10
	5				**5**	
Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**		
Потенциал υ_j	10	0	2	13		

Оптимальность нового базисного решения проверяется вычислением *новых* потенциалов Небазисная переменная x_{21}, имеющая наибольшую положительную оценку, войдет в решение. Цикл можно выразить при помощи базисных переменных следующим образом: $x_{21} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{21}$ Замкнутый цикл показывает, что переменной, исключаемой из базиса, может быть как x_{11} так и x_{22}. Выберем в качестве такой переменной x_{11}.

Продолжая вычисления по указанной схеме, получим оптимальное решение (табл.19).

Оптимальное решение формулируется следующим образом.

Перевезти 5 единиц из пункта производства 1 в пункт потребления 2, заплатив 5×0=0 у.е., 10 единиц из 1 в 4 за 10×11 = 110 у.е., 10 единиц из 2 в 2 за 10×7=70 у.е., 15 единиц из 2 в 3 за 15×9 = 135 у.е. и 5 единиц из 3 в 1 за 5×0=0 у.е. Суммарные транспортные расходы составляют 315 у.е. и могут быть рассчитаны через потенциалы как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{4} b_j v_j = (15\times0+ 25\times7 + 5\times—5) + (5\times5+15\times0+15\times2+10\times11) = 315.$$

Таблица 19. Оптимальное решение.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	Запасы a_i	Потенциал u_i
1	10	0	20	11		0
	0	**5**		**10**	**15**	
2	12	7	9	20		7
		0	**10**	**15**	**25**	

3	0	14	16	18		-5
	5				**5**	
Запросы b_j	**5**	**15**	**15**	**10**		
Потенциал υ_j	5	0	2	11		

Интерпретация метода потенциалов как симплекс-метода

Взаимосвязь между методом потенциалов и симплекс-методом устанавливается на основе того, что значения c_{pq}, определенные выше, равны коэффициентам z-уравнения в симплекс-таблице, соответствующей текущей итерации. Зная симплекс-множители на текущей итерации, можно получить коэффициенты z-уравнения, вычисляя разности между левыми и правыми частями ограничений двойственной задачи. Именно эта взаимосвязь используется для того, чтобы показать, что метод потенциалов, по существу, эквивалентен симплекс-методу. Действительно, потенциалы u_i и υ_j представляют собой не что иное, как двойственные переменные (симплекс-множители).

Чтобы показать, каким образом общая двойственная задача получается из условий транспортной задачи, рассмотрим сначала частный случай m=2 и n=3, представленный в таблице 20.

Таблица 20. Симплекс-таблица транспортной задачи.

	z	Переменные пункта 1			Переменные пункта 2			Правые части ограничений
		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
Целевая функция	1	$-c_{11}$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{21}$	$-c_{22}$	$-c_{23}$	0
Ограничения на объём пр-ва	0	1	1	1				a_1
	0				1	1	1	a_2
Ограничения на спрос	0	1			1			b_1
	0		1			1		b_2
	0			1			1	b_3

Пусть для ограничений, соответствующих исходным пунктам, двойственные переменные обозначены через u_1 и u_2, а для пунктов назначения — через υ_1, υ_2 и υ_3. Двойственная задача имеет вид

максимизировать $\omega=(a_1u_1+a_2u_2)+(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3)$при ограничениях

$u_1+v_1\leq c_{11}$,

$u_1+v_2\leq c_{12}$,

$u_1+v_3\leq c_{13}$,

$u_2+v_1\leq c_{21}$,

$u_2+v_2\leq c_{22}$,

$u_2+v_3\leq c_{23}$,

u_1, u_2, v_1, v_2 и v_3 не имеют ограничения в знаке.

Специфика структуры ограничений двойственной задачи определяется особенностью распределения нулей и единиц в соответствующих соотношениях прямой задачи. Каждое ограничение включает лишь одну переменную *u* и одну переменную *v*. Кроме того, в каждом ограничении двойственной задачи индексы переменных *u* и v согласуются с двойным индексом коэффициента *c*. Поэтому в общем случае, если u_i и v_j — двойственные переменные, соответствующие ограничениям для i-го пункта производства и j-го пункта потребления (i=l, 2, . . ., *m*; j=1,2, . . ., n), то соответствующая двойственная задача формулируется следующим образом:

Найти max $\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

при условии $u_i+v_j \le c_{ij}$ для всех i и j,

u_i и v_j не имеют ограничения в знаке.

Коэффициенты целевой функции (и, следовательно, оценки для небазисных переменных) определяются подстановкой текущих значений двойственных переменных (симплекс-множителей) в ограничения двойственной задачи, а затем вычислением разностей между левыми и правыми частями. Однако в отличие от симплекс-метода, в котором: симплекс-множители всегда имеются в распоряжении, при использовании транспортной таблицы дело обстоит иначе. Тем не менее потенциалы можно определять косвенным образом, заметив, что ограничения двойственной задачи, соответствующие базисным переменным, должны выполняться как строгие равенства. Это означает, что

$u_i+v_j=c_{ij}$ для любой *базисной* переменной x_{ij},

что дает m+n -1 уравнений. Таким образом, придавая u_1 произвольное значение (например, 0), можно найти значения остальных переменных.

Коэффициент при небазисной переменной x_{pq} в z-уравнении представляет собой разность между левой и правой частями соответствующего ограничения двойственной задачи, т. е. $u_p+v_q- c_{pq}$. Поскольку в транспортной задаче требуется найти *минимум* целевой функции, в базис вводится переменная с максимальным *положительным* значением $u_p+ v_q-c_{pq}$.

Теперь ясна связь между методом потенциалов и симплекс-методом. Действительно, на заключительной итерации потенциалы непосредственно дают *оптимальные* значения двойственных переменных. Эти значения приводят к одинаковым по величине целевым функциям прямой и двойственной задач.

Симплекс-множители, соответствующие ранее найденному оптимальному решению, принимают следующие значения: $u_1=0$, $u_2=7$, $u_3=-5$, $v_1=5$, $v_2=0$, $v_3=2$ и $v_4=11$. Значение целевой функции двойственной задачи определяется как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{4} b_j v_j = (15\times0+ 25\times7 + 5\times—5) + (5\times5+15\times0+15\times2+10\times11) = 315,$$

т. е. оно равно оптимальному значению целевой функции прямой задачи.

В приведенных выше рассуждениях одной из двойственных переменных придавалось произвольное значение (например, u_1=0), откуда следует, что симплекс-множители, соответствующие данному базисному решению, не единственные.

Транспортная модель с промежуточными пунктами

В стандартной транспортной модели предполагается, что прямой маршрут между пунктом производства и пунктом потребления является маршрутом *минимальной стоимости.* Так, в примере .3 из таблицы расстояний между тремя автомобильными заводами и двумя центрами распределения получаются *кратчайшие* маршруты между пунктами производства и пунктами потребления. Это означает, что определению стоимостей перевозок единицы продукции в стандартной транспортной модели должна предшествовать предварительная работа, связанная с выявлением кратчайших маршрутов.

В задачах небольшой размерности нахождение кратчайшего маршрута трудностей не представляет. Когда число пунктов производства и пунктов потребления велико, для определения минимальной стоимости *прямой* перевозки единицы продукции по данному маршруту следует обратиться к *алгоритму* нахождения *кратчайшего пути.*

Другой метод определения минимальной стоимости прямой перевозки связан с постановкой задачи как задачи с промежуточными пунктами. При этом допускается «перевозка» груза (частично или полностью) через другие исходные пункты или пункты назначения *транзитом,* прежде чем он достигнет установленного пункта назначения. В задаче с промежуточными пунктами автоматически отыскивается маршрут минимальной стоимости между пунктом производства и пунктом назначения без предварительного определения кратчайшего маршрута.

Введение промежуточных пунктов дает возможность перевозить весь объем продукции из исходных пунктов через любой другой исходный пункт или пункт назначения, прежде чем продукция будет распределена среди потребителей. Это означает, что любую вершину транспортной сети (как исходный пункт, так и пункт назначения) можно рассматривать как транзитный пункт. Поскольку априори не известно, какие вершины будут обладать этим свойством, можно сформулировать задачу таким образом, чтобы каждую вершину можно было рассматривать и как исходный пункт, и как пункт назначения. Другими словами, число исходных пунктов (пунктов назначения) в задаче с промежуточными пунктами равно *сумме* исходных пунктов и пунктов назначения в стандартной задаче.

Для пояснения этого замечания рассмотрим задачу из примера 3. Имеются три завода и два центра распределения. В модели с промежуточными пунктами будет *пять* исходных пунктов и пять пунктов назначения. На рис. 5 изображена соответствующая сеть.

Для того чтобы учесть транзитные перевозки, в каждом исходном пункте назначения предусмотрен дополнительный буфер емкостью ***B.*** По определению емкость буфера должна быть не меньше суммарного объема производства (или спроса) стандартной (сбалансированной) транспортной задачи, т. е.

$$\text{в} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Стоимости в расчете на единицу груза оцениваются на основании данных о маршрутах, соединяющих исходные пункты с пунктами назначения в модели с промежуточными пунктами. Очевидно, что коэффициенты стоимости перевозки между первоначально заданными исходными пунктами и пунктами назначения (см. заштрихованную область сети на рис. 5) остаются такими же, как в примере 3. Заметим также, что стоимость перевозки из некоторого пункта в него же (скажем, из Денвера в Денвер) равна нулю, и стоимость перевозки может меняться в зависимости от направления движения (например, маршрут Детройт — Денвер может отличаться по стоимости от маршрута Денвер — Детройт, если используются различные режимы перевозок).

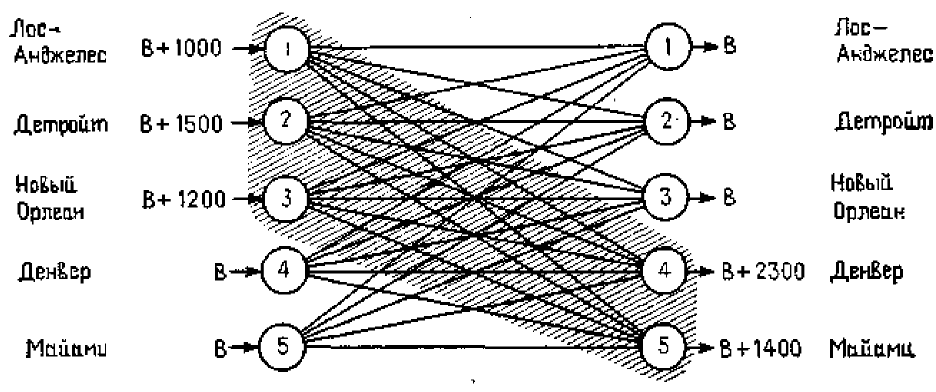

Рис. 5. Модель транспортной задачи с промежуточными пунктами.

В табл. 21 представлено оптимальное решение рассматриваемой задачи с промежуточными пунктами, в которой емкость буфера *B* равна 3700 автомобилям. Заметим, что коэффициенты стоимости перевозок между первоначально заданными исходными пунктами (Лос-Анджелес, Детройт и Новый Орлеан) и пунктами назначения (Денвер и Майами) те же, что и в примере 3.

Предполагается, что остальные коэффициенты оцениваются в зависимости от расстояния и режима перевозок.

Из табл. 21 видно, что диагональные элементы получены в результате использования буфера. Они не дают никакой информации об окончательном решении. В недиагональные элементы обеспечивают получение решения, представленного на рис. 6. Из Детройта в Майами перевозка производится через промежуточный пункт в Новом Орлеане, куда поступает 200 автомобилей. Все другие перевозки осуществляются непосредственно с заводов в центры распределения.

Помимо рассмотренной выше возможны ситуации, при которых имеет место транзитная перевозка продукции.

Таблица 21. Оптимальное решение транспортной задачи.

	Лос-Анджелес	Детройт	Новый Орлеан	Денвер	Майами	
Лос-Анджелес	0; 3700	130	90	80; 1000	215	4700
Детройт	135	0; 3700	20; 200	100; 1300	108	5200
Новый Орлеан	95	105	0; 3500	102	68; 1400	4900
Денвер	79	99	110	0; 3700	205	3700
Майами	200	107	72	205	0; 3700	3700
	3700	3700	3700	6000	5100	

Например, в задаче фирмы MG конечные пункты назначения, куда поступают автомобили, могут представлять отдельных продавцов, а не крупные центры распределения. В целях упрощения предположим, что имеется лишь пять продавцов, которые получают свои заказы из центров распределения в Денвере и Майами. На рис. 7 центры распределения изображены в виде временных складов, из которых автомобили попадают в конечные пункты назначения. Соответствующие величины, характеризующие спрос пяти продавцов, составляют 800, 500, 750, 1000 и 650 автомобилей. Предположим, что продавец может получать товар из любого центра распределения. (Величины спроса в центрах распределения не используются в качестве исходной информации.) В данном случае, как показано на рис. 7, промежуточными пунктами могут быть только центры распределения.

Поскольку центры распределения (вершины 4 и 5 на рис. 7) являются единственными промежуточными пунктами, каждый из них может рассматриваться и как пункт назначения, и как исходный пункт. С другой стороны, заводы играют лишь роль исходных пунктов, а продавцы — пунктов назначения. Построенная с учетом этого модель с промежуточными пунктами приведена в табл. 22.

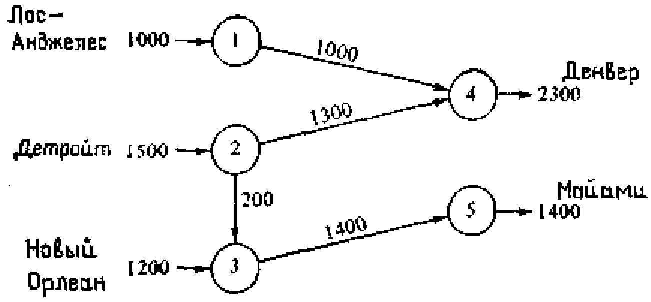

Рис. 6. Модель перевозок с промежуточными пунктами.

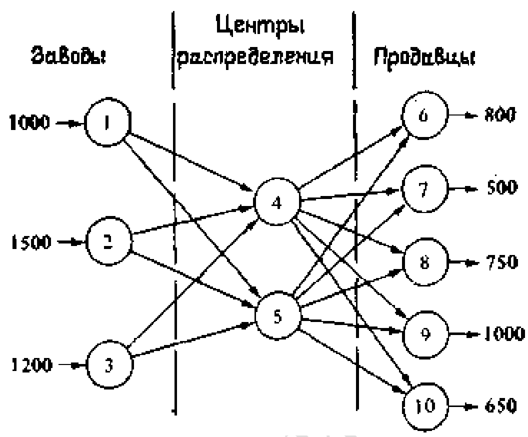

Рис. 7. Промежуточные пункты в центрах распределения.

Заметим, что в центрах распределения (вершины 4 и 5) емкость буфера ***B***, равная 3700 автомобилей, прибавляется к соответствующим величинам объема производства и спроса. Очевидно, что никакой буферной емкости не требуется добавлять к величине объема производства того или иного завода или величине, характеризующей спрос продавцов. Напомним, *что буфер* вводится лишь в тех пунктах, которые могут рассматриваться и как исходные пункты, и как пункты назначения, т. е. в ситуации, когда перевозка осуществляется через эти пункты транзитом. На рис. 7 видно, что прямые перевозки с завода продавцу не разрешены. В табл. 22 это ограничение представлено запрещенными (заштрихованными) ячейками. При численном решении задачи запрещенному маршруту соответствует очень большая стоимость $Cij=M$, записанная в соответствующей ячейке.

Предположим, что разрешены маршруты с промежуточными пунктами между заводами и центрами распределения. Прямая перевозка допускается лишь из центра распределения продавцам. В таблице 23 представлена такая модель. Заметим, что каждый завод и центр распределения может теперь рассматриваться и как исходный пункт, и как пункт назначения.

Таблица 22. Модель с запрещенными маршрутами.

	4	5	6	7	8	9	10	
1								1000
2								1500
3								1200
4								3700
5								3700
	3700	3700	800	500	750	1000	650	

Таблица 23.Промежуточные пункты заводы и центры распределения.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1											4700
2											5200
3											4900
4											3700
5											3700
	3700	3700	3700	3700	3700	800	500	750	1000	650	

Транспортная задача на min времени

Заменяя в транспортной задаче стоимость доставки на время доставки $t_{i\,j}$ и введя критерий min времени: $min\ T=max\{\ t_{i\,j}\}$, получим новую модель транспортной задачи с нелинейной целевой функцией.

Задачу можно свести к обычной транспортной, применив метод запрещенных клеток.

<u>Метод запрещённых клеток.</u> Состоит из следующих шагов:

1. Находим опорное решение.
2. Из базисных клеток находим $T=max\ t_{i\,j}$, и все клетки с большим временем – запрещаем для использования,
3. Улучшение плана распределительным методом. Достигается циклическим переносом из клеток x_{ij} с $t_{i\,j}= T$ в свободные клетки с меньшим временем. Допускается вхождение в цикл нескольких свободных клеток, помеченных знаком «+».
4. Переход ко второму пункту до тех пор, пока будет возможно построить цикл.

Решим транспортную задачу на минимум времени на конкретном примере.

Пусть задана матрица перевозок и построен опорный план методом северо-западного угла:

Таблица 24. Опорное решение задачи на min T.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8	5	6	7	
	21	**4**				**25**
2	5	6	6	6	9	
		33	**1**			**34**
3	4	8	7	8	5	
			39	**3**		**42**
4	11	4	5	8	9	
				8	**15**	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

$T=max\{ t_{i\,j}\}= t_{11} =10$ и все клетки с большим временем запрещаем для использования, у нас это клетка x_{41} с t_{41}=11.

Таблица 25. Промежуточное решение с Т=9.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8	5	6	7	
		25				**25**
2	5	6	6	6	9	
	21	**12**	**1**			**34**
3	4	8	7	8	5	
			39	**3**		**42**
4	11	4	5	8	9	
				8	**15**	**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Цикл, включающий клетку x_{11}, следующий: $x_{21}\to x_{22}\to x_{12}\to x_{11}\to x_{21}$, после переноса по циклу получим новую таблицу и время $T=max\{ t_{i\,j}\}= t_{45} =9$ и к запрещенным добавляется клетка x_{11}.

Перенос по циклу $x_{35}\to x_{45}\to x_{44}\to x_{34}\to x_{45}$, а затем $x_{43}\to x_{45}\to x_{35}\to x_{33}\to x_{43}$ даёт следующую таблицу с $T=max\{ t_{i\,j}\}= t_{44} =8$ и клетки x_{45} и x_{25} включаются в число запрещенных.

Таблица 26. Промежуточное решение с Т=8.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8	5	6	7	
		25				**25**
2	5	6	6	6	9	

	21	**12**	**1**			**34**
3	4	8	7	8	5	
			27		**15**	**42**
4	11	4	5	8	9	
			12	**11**		**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Перенос по циклу $x_{14} \to x_{12} \to x_{42} \to x_{44} \to x_{14}$, а затем $x_{13} \to x_{12} \to x_{42} \to x_{43} \to x_{13}$, затем $x_{32} \to x_{12} \to x_{35} \to x_{33} \to x_{32}$, затем $x_{31} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{21} \to x_{31}$ даёт следующую таблицу с $T=max\{\ t_{i\,j}\}=t_{33}=7$ и клетки x_{12}, x_{32}, x_{34}, x_{44}, включается в число запрещенных. Попытка построить улучшающий цикл к успеху не приводит. Решение закончено.

Таблица 27. Оптимальное решение, T=7.

Пункты B_j / A_i	1	2	3	4	5	Запасы a_i
1	10	8	5	6	7	
			14	**11**		**25**
2	5	6	6	6	9	
	19	**14**	**1**			**34**
3	4	8	7	8	5	
	2		**25**		**15**	**42**
4	11	4	5	8	9	
		23				**23**
Запросы b_j	**21**	**37**	**40**	**11**	**15**	

Задача о назначениях

Рассмотрим ситуацию, когда требуется распределить n работ (или исполнителей) по m станкам. Работа i (=1, 2,..., n), выполняемая на станке j (=1, 2,..., m), связана с затратами c_{ij}. Задача состоит в таком распределении работ по станкам (одна работа выполняется одним станком), которое соответствует минимуму суммарных затрат. Такая задача известна как **задача о назначениях.**

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь работы представляют «исходные пункты», а станки — «пункты назначения». Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т. е. $a_i=1$ для всех i. Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т. е. $b_j=1$ для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления) работы i к станку j равна c_{ij}. Если какую-либо работу нельзя выполнять на некотором станке, то соответствующая стоимость c_{ij} берется равной очень большому числу M.

Ниже в таблице 28 иллюстрируется общая структура задачи о назначениях.

Прежде чем решать задачу методами, ассоциированными с транспортной моделью, необходимо «ликвидировать» дисбаланс, добавив фиктивные работы или станки в зависимости от начальных условий ($m \le n$ или $m \ge n$). Поэтому без потери общности можно положить $m = n$.

Таблица 28. Задача о назначениях.

		Станки				
		1	2	…	n	
Виды работ	1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
	2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
	⋮	⋮	…	…	⋮	⋮
	m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	1
		1	1	…	1	

Задачу о назначениях можно представить следующим образом. Пусть

x_{ij}={0, если j-я работа не выполняется i-м станком

{1, если j-я работа выполняется i-м станком

Теперь задача будет формулироваться так:

найти min $z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ или } 1.$$

Для иллюстрации задачи о назначениях рассмотрим таблицу с тремя работами и тремя станками. Исходное решение (полученное по правилу северо-западного угла) будет, очевидно, вырожденным (табл. 29).

Таблица 29. Опорное решение.

		Станки		
		1	2	3
Виды работ	1	**1** 5	7	9
	2	14	**1** 10	12
	3	15	13	**1** 16

Эта особенность характерна для задачи о назначениях независимо от метода, используемого при получении начального базиса. На самом деле решение будет оставаться вырожденным на всех итерациях.

Решение через нуль-базис

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет разработать эффективный метод ее решения. Покажем, как реализуется этот метод на примере приведенной выше задачи.

Оптимальное решение задачи о назначениях не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы стоимостей прибавить (или вычесть) постоянную величину. Этот факт можно доказать следующим образом. Если p_i и q_j вычитаются из *i*-й строки и *j*-го столбца, то новые стоимости имеют вид $c_{ij}^{`} = c_{ij} - p_i - q_j$. Отсюда получается новая целевая функция:

$$z' = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} =$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \sum_j x_{ij} - \sum_j q_j \sum_i x_{ij}$$

Поскольку $\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1$, то $z^{`} = z - const$. Отсюда следует, что минимизация исходной целевой функции *z* приводит к такому же решению, как минимизация *z*'.

Приведенное соображение показывает, что если можно построить новую $c_{ij}^{`}$-матрицу с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным, поскольку стоимость не может быть отрицательной.

В табл. 31 нулевые элементы получены вычитанием наименьшего элемента в каждой строке (столбце) из соответствующей строки (столбца). Если сначала рассмотреть строки, то получим $c_{ij}^{`}$-матрицу, представленную в таблице 30.

Таблица 30. Матрица стоимостей..

j/i	1	2	3	p_i
1	0	2	4	5
2	4	0	2	10
3	2	0	3	13

Вычитая $q_3 = 2$ из третьего столбца, последнюю матрицу можно преобразовать так, чтобы она имела больше нулей. Таким образом, получим таблицу 31.

Таблица 31. Решение.

j / i	1	2	3
1	**0**	2	2
2	4	0	**0**
3	2	**0**	1

Заштрихованными квадратами в табл. 31 помечены элементы, соответствующие допустимому (и, следовательно, оптимальному) назначению (1, 1), (2, 3) и (3, 2) со стоимостью 5+12+13=30. Заметим, что эта стоимость равна $p_1+p_2+p_3+q_3$.

К сожалению, не всегда удается определить допустимое назначение столь просто, как в приведенном примере. Поэтому требуются другие правила для нахождения оптимального решения.

Пусть надо решить задачу о назначениях, в которой стоимость работ представлена в виде некоторой матрицы. Задача распределения работ сводится к построению математического аналога единичной матрицы, роль единиц в которой будут играть нули.

Просматривая строки и столбцы, вычитаем минимальный элемент. Если в полученной матрице удаётся выделить нуль-базис, то решение закончено.

Чтобы выделить нуль-базис нужно применить процедуру min-покрытия нулей. Для этого вычеркиваем нули матрицы min-количеством прямых, если количество прямых равно размерности матрицы стоимостей, то они и задают базис, если это не выполнено, то выбирается наименьший не вычеркнутый элемент. Этот элемент вычитается из всех не вычеркнутых и прибавляется к элементам на пересечении прямых, и процедура покрытия повторяется После получения базиса:

$Z=\sum p_i + \sum q_j + \sum W_k$,

где p_i - минимальные элементы по строкам,

q_j - минимальные элементы по столбцам,

W_k- наименьшие не вычеркнутые элементы.

Чтобы получить требуемое распределение работ можно применить следующую процедуру.

В матрице определить минимальное количество нулей в строке и в столбце. Выбранный элемент распределяем, вычеркивая строку и столбец. К оставшейся матрице вновь применить указанную процедуру. Данная процедура одновременно отвечает на вопрос о размерности матрицы стоимостей. Если все работы распределены, то решение получено и оптимально.

Эти правила иллюстрируются на примере, приведенном в таблице 32.

Выполняя те же начальные шаги, что и в предыдущем примере, получим таблицу 33.

Таблица. 32. Исходная задача.

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Таблица 33. Матрица с нулями.

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

В этом случае невозможно найти допустимое решение, состоящее из нулей.

Дальнейшая процедура состоит в проведении *минимального* числа прямых через некоторые строки и столбцы с тем, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. В табл.34 показано, как используется это правило.

На следующем шаге выбирается *наименьший* не вычеркнутый элемент (C_{32}=1). Этот элемент вычитается из каждого не вычеркнутого элемента и прибавляется к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых.

В результате получается табл. 35, которая соответствует оптимальному назначению (1, 1), (2, 3), (3, 2) и (4, 4). Соответствующие суммарные затраты равны 1+10+5+5=21.

Следует заметить, что если на последнем шаге оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

Таблица 34.Покрытие нулей.

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Таблица 35.Оптимальное решение.

$\frac{j}{i}$	1	2	3	4
1	0	2	1	1
2	3	0	0	2
3	0	0	3	2
4	4	2	0	0

Венгерский метод

Перекликается с рассмотренным решением через нуль-базис **венгерский метод**, впервые предложенный венгерским математиком Эгервари в 1931 г. Длительное время работа оставалась мало известной. В 1953 г. математик Г. Кун перевел эту работу на английский язык, заново открыв ее для специалистов, развил идеи венгерского математика и усовершенствовал метод, который в честь первого автора и был назван венгерским. Венгерский метод является одним из наиболее распространенных методов решения транспортных задач, в частности задачи о назначениях.

Венгерский метод решения задачи о назначениях основан на 2 простых утверждениях:

1. Решение задачи о назначениях не изменится, если к любому столбцу или строке прибавить или вычесть некоторую компоненту, т.е. если план X*- оптимальный план задачи, то он также оптимален для функции цели Z' с матрицей $C'=[\,C'_{ij}\,]$, где $C'_{ij}= C'_{ij} + U_i + V_j$, $i=1,..,n$, $j=1,..,n$.
2. Если все $C_{ij}\geq 0$ и найден план X*, такой что $\sum \sum C_{ij} {*} X^*_{ij} = 0$, то X*- оптимальный план.

Идея алгоритма основана на сформулированных выше утверждениях. Путем прибавления определенным образом найденных чисел к некоторым столбцам и вычитания их из некоторых строк находим систему независимых нулей. Если число независимых нулей=n, то приняв соответствующие им переменные X_{ij} равным 1, а все остальные равными нулю; получим оптимальный план назначений. Алгоритм метода состоит из предварительного шага и не более чем (n-2) последовательно повторяющихся итераций.

На предварительном этапе в случае решения задачи на максимум ее преобразовывают в эквивалентную задачу минимизации. На этом же этапе выделяется система независимых нулей. Каждая последующая итерация направлена на увеличение хотя бы на единицу числа независимых нулей. Как только число независимых нулей R станет равным размерности матрицы n∗n -задача решена. Оптимальный план назначения определяется положением независимых нулей на последней итерации

На подготовительном этапе в каждой строке матрицы находим минимальный элемент, который вычитаем из всех элементов соответствующей строки матрицы. Такое преобразование не меняет решение исходной задачи. В результате преобразования в каждой строке матрицы появляется хотя бы один нуль.

Подготовительный этап заканчивается выделением системы независимых нулей. Для этого в первом столбце матрицы выделяется произвольный нуль и отмечается '*'. Затем рассматриваются нули второго столбца. Если среди них есть такие, которые находятся не в одной строке с нулем первого столбца, уже отмеченным звездочкой, то один из них отмечается звездочкой. Аналогично рассматриваются нули для других столбцов. Отмеченные звездочкой нули независимы, т.к. в каждой строке и в каждом столбце может быть не более одного нуля со звездочкой. Если число независимых нулей равно n, то задача решена.

Целью каждого последующего шага (итерации) является увеличение числа независимых нулей. Перед началом итерации выделяются знаком '+' столбцы матрицы, содержащие нули со звездочкой. Так как число независимых нулей меньше n, то не все столбцы окажутся выделенными. Устанавливаем, имеется ли среди невыделенных элементов матрицы хотя бы один нуль.

Возможны два случая:

a) среди невыделенных элементов имеется хотя бы один нуль.

b) среди невыделенных элементов нулей нет.

В первом случае проверяем, содержит ли строка с невыделенным нулем нуль со звездочкой. Если да, то невыделенный нуль отмечается штрихом (0'). Содержащая этот нуль строка отмечается справа знаком ‘+' и снимается знак выделения '+' над столбцом, в котором расположен нуль со звездочкой, лежащий в только что выделенной строке. Снятие знака выделения производится знаком (+). Если в строке с невыделенным нулем нулей со звездочкой нет, то невыделенный нуль также отмечается штрихом (0').

Во втором случае среди невыделенных элементов матрицы выбираем минимальный элемент. Он вычитается из элементов, расположенных в невыделенных строках и прибавляется к элементам, лежащим в выделенных столбцах. При этом новая матрица эквивалентна исходной по отношению к оптимальному назначению.

Итерация оканчивается, если в строке с невыделенным нулем нет нуля со звездочкой. Невыделенный нуль отмечается штрихом (0'), и строится цепочка элементов по правилу: движение начинается от нуля со штрихом по столбцу к нулю со звездочкой, от нуля со звездочкой по строке переходим к нулю со штрихом; вновь от 0* к 0' по столбцу и т.д. начало и конец цепочки- нули со штрихами.

Отметим некоторые свойства построенной цепочки:

1)Цепочка по указанному правилу строится однозначно. В самом деле, в каждом столбце может находиться лишь один нуль со звездочкой 0* (эти нули независимы), и в каждой строке содержится не более одного нуля со штрихом 0'. Последнее обстоятельство связано с тем, что после того, как нуль отмечается штрихом, содержащая его строка выделяется, и поэтому никакие другие нули не могут быть отмечены штрихом.

2)Так как в начале и конце цепочки стоит 0',то число элементов цепочки нечетно, причем 0' находится на нечетных местах.

3)Если случится, что в одном столбце с исходным 0' нет нуля со звёзочкой 0*, то цепочка вырождена и состоит из одного исходного элемента.

После построения цепочки звездочки над нулями уничтожаются, а штрихи заменяются звездочками. Все остальные звездочки над нулями, не находящимися на цепочке, сохраняются. Так как в цепочке нулей со штрихами на один больше, чем нулей со звездочками, то в результате общее число нулей со звездочками увеличивается на единицу. На этом итерация заканчивается. Подсчитываем число нулей со звездочкой (независимых), если к=n, то найден оптимальный план назначения, если $k<n$, то переходим к следующей итерации.

Проиллюстрируем венгерский метод решения задачи о назначениях на числовом примере. Решим задачу о назначениях предыдущего примера. Так как подготовительный этап венгерского метода совпадает с предыдущим, то можно взять промежуточную матрицу таблицы 33, в которой проведем выделение столбцов и строк указанным выше способом, результат представлен в таблице 36.

Образуем первоначальную систему независимых нулей, отмечая их звездочкой 0*. Число независимых нулей к=3. Так как к<n=4, то переходим к основной процедуре.

Над столбцами, содержащими нули со звездочкой, ставим знаки выделения '+'. Находим невыделенный столбец j=4. Ищем в невыделенном столбце нулевой элемент. Это $C_{41}=0$. Помечаем его штрихом $C_{41}=0'$.

Просматриваем строку i=4. В ней есть выделенный нуль $C_{43}=0^*$. Снимаем выделение третьего столбца знаком (+). Выделяем четвертую строку знаком '+'. Получим таблицу 37.

Если в этой таблице вычеркнуть выделенные столбцы j=1,2 и выделенную строку i=4, то получим таблицу с невыделенным нулём C_{23}. Отметим его как 0', так как в строке есть $C_{22}=0^*$, то снимаем выделение столбца j=2 и отмечаем строку i=2, получим следующую таблицу 38.

Если в этой таблице вычеркнуть выделенные столбцы j=1 и строки i=2,4, то получим таблицу, в которой нет нулей, т.е. полученная таблица не содержит невыделенных нулей.

Таблица 36. Отмечены столбцы.

Отмеченные столбцы	+	+	+		Отмеченные строки
j/i	1	2	3	4	
1	0*	3	2	2	
2	2	0*	0	2	
3	0	1	4	3	
4	3	2	0*	0	

Таблица 37.Выделение неотмеченных нулей.

Отмеченные столбцы	+	+	(+)		Отмеченные строки
j/i	1	2	3	4	
1	0*	3	2	2	
2	2	0*	0	2	
3	0	1	4	3	
4	3	2	0*	0'	+

Таблица 38.Отыскание минимального элемента.

Отмеченные столбцы	+	(+)	(+)		Отмеченные строки
j/i	1	2	3	4	
1	0*	3	2	2	
2	2	0*	0'	2	+
3	0	1	4	3	
4	3	2	0*	0'	+

Обозначим множество невыделенных строк через I1=(1,3), а множество невыделенных столбцов через J1=(2,3,4). Находим минимум $(C_{ij})=1$, i Є {I1},j Є {J1}. Прибавим число 1 к выделенным столбцам и вычтем его из невыделенных строк, получим таблицу 39 или по-другому: прибавим 1 к элементам, образующим пересечение выделенных строк и столбцов и вычтем 1 из неотмеченных элементов (аналог w_i из предыдущего примера.). В результате такого преобразования получим новые невыделенные нули. В нашем случае $C_{32}=0$.

Берём любой из невыделенных нулей и отмечаем штрихом, $C_{32}=0'$. В строке i=3 нет нулей со звёздочкой. Так как других невыделенных нулей нет, то переходим к построению цепочки (табл. 39).

Таблица 39.Построение цепочки.

Отмеченные столбцы	+	(+)	+		Отмеченные строки
j/i	1	2	3	4	
1	0*	2	1	1	
2	3	0*	0'	2	+
3	0	0'	3	2	
4	4	2	0*	0'	+

По правилам построения цепочки она должна начинаться и кончаться 0', что дает $C_{32}\rightarrow C_{22}\rightarrow C_{23}\rightarrow C_{43}\rightarrow C_{44}$. На цепочке заменяем 0* на 0, нули со штрихом изменяем на нули со звёздочкой. Звездочки над нулями, не находящимися на цепочке, сохраняем. Все остальные выделения уничтожаем. Переходим к таблице 40, в которой число независимых нулей увеличивается на единицу.

На этом первая итерация закончена.

Таблица 40. Оптимальное решение.

Отмеченные столбцы	+	+	+	+	Отмеченные строки
j/i	1	2	3	4	
1	0*	2	1	1	
2	3	0	0*	2	
3	0	0*	3	2	
4	4	2	0	0*	

Над столбцами, содержащими нули со звездочкой, ставим знаки выделения ‘+'. Так как не выделенных столбцов нет, то выделенные нули задают единичную нуль-матрицу и решение закончено.

Оптимальное решение совпадает с ранее найденным/

Транспортная задача представляет собой задачу линейного программирования, однако ее специфическая структура позволяет так модифицировать симплекс-метод, что вычислительные процедуры становятся более эффективными. При разработке метода решения транспортной задачи существенную роль играет теория двойственности.

В классической транспортной задаче рассматриваются перевозки (прямые или с промежуточными пунктами) одного или нескольких видов продукции из исходных пунктов в пункты назначения. Эту задачу можно видоизменить, включив в нее ограничения сверху на пропускные способности транспортных коммуникаций. Задачу о назначениях и задачу управления запасами можно рассматривать как задачи транспортного типа.

Транспортная задача и ее варианты составляют единый класс обобщенных сетевых задач.

Литература

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1988.-552с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М., Наука, 1980 г., с.208.
3. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1987.-248с.
4. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сб. задач 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Высш. шк.,1990.-239с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев, Вища школа, 1988 г., с.552
6. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А.И. Штерна. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1990.- 488с.
7. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.-496с., ил.
8. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963 г., 776 с.
9. Геронимус Б.А. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. М.: Транспорт, 1982
10. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.
11. Рейтман М.И. Транспортная задача. Квант 1974 №7