Тема 11 Игровые модели операций

В различных сферах целенаправленной деятельности, в частности в практике разработок и эксплуатации АСУ, часто возникают, так называемые, конфликтные ситуации (от латинского conflictus — столкновение). Они характеризуются наличием противоположных интересов отдельных людей или коллективов, которые стремятся к своим целям часто в ущерб друг другу. Размеры ущерба в различных ситуациях могут быть различными. В повседневной жизни мы являемся свидетелями экономического, морального ущерба, и в этом разнообразии отражена сложность конфликта как общественного явления.

Особое место в изучении проблем конфликта занимает выбор и сравнительный анализ возможных (допустимых) способов поведения противоборствующих сторон, что дает основу для принятия каждой стороной разумных решений относительно своих действий. Следует подчеркнуть, что ответственные представители сторон, принимающие решения в рассматриваемых условиях, должны учитывать не только поставленные перед собой цели, но и цели, преследуемые другими участниками конфликта.

Чтобы раскрыть содержание того или иного конфликта, достаточно получить ответы на следующие вопросы: “какие стороны участвуют в рассматриваемом конфликте?”, “каковы ожидаемые результаты применения сторонами своих стратегий?”, “кто заинтересован в указанных результатах?”, “в чем выражается эта заинтересованность?”. Математическая интерпретация поставленных вопросов и возможных ответов на них позволяет строить и исследовать игровые модели операций в широком диапазоне исходных условий.

Очевидно, каждая сторона, участвующая в конфликте, является оперирующей стороной. Она формулирует свои цели, имеет активные средства для их достижения, разрабатывает и оценивает по принятым критериям стратегии, осуществляет рациональный (оптимальный) выбор поведения применительно к складывающейся обстановке, т. е. ведет своеобразную игру с разумными противниками

В изучении проблем конфликта особое место занимает выбор и сравнительный анализ допустимых способов поведения противоборствующих сторон. Это дает возможность каждой стороне принять разумное решение относительно своего поведения. Следует подчеркнуть, что каждый участник конфликта должен учитывать не только свои цели, но и цели, которые поставил перед собой противник. Но соответствующую информацию удается получить далеко не всегда, это, конечно же, создает трудности как для исследователей, которые подготавливают варианты решений, так и для лиц, которые принимают окончательные решения.

Каждая сторона, участвующая в конфликте, формулирует свои цели, имеет активные средства для их достижения, разрабатывает и оценивает стратегии, осуществляет оптимальный выбор поведения в соответствующей обстановке, то есть ведёт своеобразную игру с противниками.

Раздел исследования операций, связанный с математическим моделированием условий конфликта и поиском на этой основе оптимальных решений, называется *теорией игр*. В некоторых случаях разработанные в этом разделе методы дают возможность найти оптимальное решение. В общем случае эти методы позволяют глубже разобраться в создавшейся ситуации и оценить каждое решение с различных точек зрения.

В дальнейшем термин «игра» будет употребляться только в значении «математическая модель конфликта», а противоборствующие стороны будут обозначаться символами А, В,..., лишенными каких-либо содержательных признаков (исключение составят модели, относящиеся к реальным явлениям).

1. Определение игры

Главным в теории игр является принцип рационального (от латинского rationalis — разумный) выбора оперирующими сторонами своих действий. Решающая роль здесь принадлежит информации, которой располагают стороны.

Основные вопросы, определяющие содержание исследований игровых моделей, состоят в следующем: «что считается рациональным (оптимальным) решением той или иной игры?», «существуют ли в данной игре решения, которые могут быть названы оптимальными?», «как найти оптимальные (или близкие к ним) решения исследуемой игры?».

Ответ на первый из поставленных вопросов должен отражать то понимание оптимального выбора и те взгляды на возможные критерии оптимальности, которыми руководствуются оперирующие стороны. Отбор критериев обычно выходит за рамки собственно математической модели, хотя и оказывает определяющее влияние на характер получаемых решений. В теории игр это замечание относится в первую очередь к выбору системы платежных функций, знание которых еще не исчерпывает проблемы оптимизации стратегий.

Игры, как и любые другие математические модели, можно классифицировать по разным признакам, и наиболее распространенные из них приведены ниже.

Развитие игры можно представить как ряд последовательных «ходов» участниками. Ходы бывают личными (ход в шахматах) и случайными (бросание монеты, вынимание карты из колоды).Если в игре участвуют две (и более) активно действующие стороны и есть личные ходы, то такая игра называется *стратегической.* Ей противопоставляется *нестратегическая* игра с одной действующей, но несколькими заинтересованными сторонами.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более участников; в первом случае игра называется «парной», во втором – «множественной»..

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Если у каждого участника игры имеется только конечное число стратегий, то игра называется *конечной.* Если хотя бы один участник имеет в своем распоряжении бесконечно много стратегий, то игра называется *бесконечной*. Оптимальной стратегией называется та стратегия, которая обеспечивает наилучшее положение игрока в данной ситуации. Выявление оптимальных стратегий игроков - задача теории игр.

Конечные игры удобно представлять в табличной (матричной) форме, и их часто называют *матричными играми*.

Пусть участники конфликта образуют множество U. Каждая сторона $C \in U$ располагает некоторым набором стратегий $S_c = \{s_{1c}, s_{2c}, ...\}$. Использование какой либо из стратегий определяет исход конфликта, принадлежащий множеству J. Очевидно, что каждая заинтересованная сторона предпочитает одни исходы другим, то есть устанавливает отношения предпочтения на множестве J. В записи это выглядит следующим образом: $u_1 ПС u_2$, где *ПС*- отношение устанавливаемое стороной C между исходами $u_1, u_2 \in J$.

Очевидно, интерес к различным исходам конфликта должен возникать прежде всего у его участников, однако было бы неверно полностью отожествлять оперирующие, т. е. активно действующие, и вообще заинтересованные стороны. Наглядным примером могут служить спортивные соревнования, результаты которых вызывают различные реакции групп болельщиков, преданных своим командам. Следовательно, наряду с множеством $\boldsymbol{U}$ необходимо рассматривать и множество $\overline{\boldsymbol{U}}$, образуемое теми лицами и коллективами, которые проявляют определенное отношение к возможным исходам конфликта, участвуя или не участвуя в нем непосредственно. В простейших моделях можно полагать $\boldsymbol{U}=\overline{\boldsymbol{U}}$, в более сложных моделях приходится устанавливать другие отношения между $\boldsymbol{U}$ и $\overline{\boldsymbol{U}}$ (например, $\boldsymbol{U}\subset\overline{\boldsymbol{U}}$ или даже $\boldsymbol{U}\cap\overline{\boldsymbol{U}}=\varnothing$).

Формы выражения заинтересованности в исходах того или иного конфликта, как показывает практика, тоже довольно разнообразны. Рассуждая отвлеченно, можно утверждать, что каждая заинтересованная сторона $\overline{\boldsymbol{C}} \in \overline{\boldsymbol{U}}$ предпочитает одни исходы другим, т. е. устанавливает отношения предпочтения на множестве J. В формальной записи это выглядит как $\boldsymbol{u}\boldsymbol{П}\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{u}_2$, где $\boldsymbol{П}\overline{\boldsymbol{C}}$ -- названное отношение, устанавливаемое стороной $\overline{\boldsymbol{C}}$ между исходами u_1, $u_2 \in$ J. Обычно $\boldsymbol{П}\overline{\boldsymbol{C}}$ предполагается бинарным, т. е. связывающим попарно элементы множества J, поэтому можно говорить о позиции стороны $\overline{\boldsymbol{C}}$ в конфликте как о совокупности всех $\boldsymbol{П}\overline{\boldsymbol{C}}$.

Для количественной оценки требуется задавать на множестве *J* числовую функцию выигрыша или платёжную функцию *ПС(u)*. Эта функция определяет размеры выигрыша, получаемого стороной $C \in U$. Таким образом, описание конфликтной ситуации состоит в том, что определяется система *F*, состоящая из вышеперечисленных связанных между собой компонент. Такая система и называется игрой.

Чтобы лучше представить структуру игр, обратимся к примеру. Предприятия *A* и *B* могут выпускать одинаковую продукцию нескольких видов и должны разработать производственные планы в соответствии со спросом на неё. Но стремление каждого предприятия обеспечить выпуск либо всех, либо произвольно взятых видов продукции может привести к перепроизводству одних и нехватке других изделий. Урегулировать эту ситуацию помогает игровая модель (табл.1). Стратегии $S_{1a}, S_{2a}, \dots$ и $S_{1b}, S_{2b}, \dots$ заключаются в выборе различных вариантов производственного плана. Если сторона *A* реализует стратегию s_{ia}, а сторона *B* - стратегию s_{jb}, то в итоге потребители получат продукцию, предусмотренную этими планами (исход u_{ij}). Выигрыш *A* составит $ПА(u_{ij})$ единиц, выигрыш *B* – $ПВ(u_{ij})$ единиц.

Таблица 1. Общий вид игровой модели.

A \ B	s_{1b}	s_{2b}	..	s_{jb}	..
S_{1a}	$ПА(u_{11})$ $ПВ(u_{11})$	$ПА(u_{12})$ $ПВ(u_{12})$	...	$ПА(u_{1j})$ $ПВ(u_{1j})$	..
S_{2a}	$ПА(u_{21})$ $ПВ(u_{21})$	$ПА(u_{22})$ $ПВ(u_{22})$	...	$ПА(u_{2j})$ $ПВ(u_{2j})$	..
	...	...	...	...	
S_{ia}			...	$ПА(u_{ij})$ $ПВ(u_{ij})$	..
				...	

В таблице 1 в количественных оценках фигурируют величины $ПА(u_{ij})$ и $ПВ(u_{ij})$. Часто между этими величинами можно установить какое либо отношение, например $ПА(u_{ij}) = -ПВ(u_{ij})$. Таким образом вычисляется новый показатель, и в результате таблица упрощается (табл.2).

Таблица 2. Матрица игры.

A \ B	s_{1b}	s_{2b}	...	s_{jb}	...
s_{1a}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...
s_{2a}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...
...	...	...	...	...	...
s_{ia}			...	a_{ij}	...
...				...	

Если принято, что $ПА(u_{ij}) = -ПВ(u_{ij}) = a_{ij}$, то возникает ситуация, когда все, что выигрывает *A*, проигрывает *B*, и наоборот.

Таким образом, в теории игр главным является выбор правильных действий, правильных стратегий участниками игры. Информация, которой располагают противоборствующие стороны, играет здесь решающую роль. Недостаток информации – всегда беда, а не преимущество. Иногда задача ставится так: какую цену можно заплатить за недостающую информацию, чтобы за её счёт повысить эффективность операции.

Теория игр, как и всякая математическая модель, имеет свои ограничения. Одним из них является предположение о полной разумности противника. В реальном конфликте оптимальная стратегия состоит в том, чтобы узнать в чём противник «глуп», и воспользоваться этим в свою пользу. Схемы теории игр не включают элементов риска. Наиболее осторожным здесь является перестраховочное поведение участников

2. Антагонистические игры

Самым простым случаем, подробно разработанным в теории игр, является конечная парная игра с нулевой суммой, то есть игра, в которой противоборствуют две стороны *A* и *B* и выполнено условие $ПА\,(_{ij}) = -ПВ\,(_{ij}) = a_{ij}$. Такая игра называется антагонистической.

Рассмотрим такую игру, в которой участвуют игроки *A* и *B*, имеющие противоположные интересы: выигрыш одного равен проигрышу другого. Можно интересоваться только выигрышем игрока *A*. Естественно, что *A* хочет увеличить выигрыш, а *B* хочет его уменьшить. Пусть *A* имеет *m* возможных стратегий s_{1a}, s_{2a}, ... , s_{ma}, а противник *B* – *n*, возможных стратегий s_{1b}, s_{2b}, ... , s_{nb}. Обозначим через a_{ij} выигрыш стороны *A*, если она пользуется стратегией s_{ai}, а противник пользуется стратегией s_{bj}. В принципе мы можем составить прямоугольную матрицу (табл.3), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие им выигрыши.

Таблица 3. Матрица антагонистической игры

B / A	s_{1b}	s_{2b}	...	s_{jb}
s_{1a}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
s_{2a}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
…	...	...	a_{ij}	...
s_{ma}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Как уже отмечалось, конечные антагонистические игры обладают тем свойством, что выигрыш одного участника (А) полностью определяется проигрышем другого (В), поэтому все необходимые данные содержатся в таблице (матрице), элементами которой являются вещественные числа a_{ij} (i=1, 2, …; j=1, 2, …). Такая матрица представляет собой ***нормальную форму*** игр рассматриваемого класса и называется ***платежной*** (***игровой***) ***матрицей***, указывающей платежи a_{ij} (выигрыши-проигрыши) участников.

Если такая таблица составлена, то говорят, что игра приведена к матричной форме Следует заметить, что вопросы построения платежных матриц требуют специальных исследований и выходят за рамки собственно теории игр, предполагающей условия той или иной игры известными заранее, поэтому приведение игры к матричной форме может составить трудную задачу, а иногда и не выполнимую из-за необозримого множества стратегий.

Игру, представленную матрицей размера $\boldsymbol{m \times n}$, называют ***игрой*** $\boldsymbol{m \times n}$.

Пусть задана некоторая конечная антагонистическая игра в нормальной форме. Нужно определить выбор сторонами А и В рациональных (оптимальных) стратегий из имеющихся s_{1a}, …, s_{ma}, s_{1b}, …, s_{nb}.

Предположим, что сторона А пытается найти наилучшую из своих стратегий, оценивая выигрыши a_{ij} поочередно для s_{1a}, …, s_{ma}. Очевидно, при использовании стратегии s_{1a} безусловно достижимым (гарантированным) будет наименьшее из значений a_{11}, a_{12}, …, a_{1n}. Лучшего результата ожидать не приходится из-за активных действий противника, который стремится минимизировать выигрыши А за счет надлежащего выбора своих s_{1b}, …, s_{nb}. Точно также при использовании s_{2a} сторона А может рассчитывать на выигрыш, равный $\min\{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}$ и т. д. Следовательно, произвольно взятая стратегия s_{ia} ($1 \le i \le m$) характеризуется показателем $\alpha_i = \min\{a_{i1}, \ldots, a_{in}\} = \min a_{ij}$, $1 \le j \le n$ и наилучшей с точки зрения А оказывается та стратегия, для которой величина α_i максимальна и равна α. Она называется ***максиминной стратегией***, обеспечивающей выигрыш:

$$\boldsymbol{\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_i \min_j \alpha_{ij}}.$$

При этом подходе отсутствует какой бы то ни было риск или расчет на возможные ошибки со стороны *B*. Если *A* будет придерживаться максиминной стратегии, то выиграет не меньше α, называемой нижней ценой игры или максиминным выигрышем.

Предположим, что аналогичные рассуждения ведёт сторона *B*, но речь идет о проигрышах. Следовательно, произвольно взятая стратегия $s_{jb}\ (1 \le j \le n)$ характеризуется показателем $\beta_j = \max\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\} = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$, определяющим наибольший из ожидаемых проигрышей. Очевидно, лучшей стратегией для *B* является стратегия дающая минимум β_j, равный β. Она называется минимаксной стратегией, так как $\beta = \min_{1 \le j \le n} \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$. Величина β называется верхней ценой игры или минимаксным проигрышем.

В общем случае цена игры γ находится между верхней и нижней границами оценок $\alpha \le \gamma \le \beta$.

Итак, оперирующие стороны могут использовать принцип гарантированного результата (минимакса) в качестве основы принятия решений и добиваться за счёт этого заранее предсказанных результатов.

3. Чистые и смешанные стратегии

Чистые стратегии

Так как обычно матрица игры представляет выигрыши игрока *A* (стратегии которого определяются строками), критерий предписывает игроку *A* выбрать такую стратегию (чистую или смешанную), которая максимизирует его минимальный выигрыш, причем минимум берется по всем стратегиям игрока *B*. Точно так же игрок *B* выбирает стратегию, которая минимизирует его максимальный проигрыш. Максимум теперь берется по стратегиям игрока *A*.

Самым простым, но редко встречающимся, является случай, когда нижняя цена игры совпадает с верхней, $\alpha = \beta$. Следующий пример показывает, каким образом подсчитывается минимаксное и максиминное значение игры.

Пусть дана матрица игры (табл.4).

Таблица 4. Пример игры 4x4.

α	Выигрыши игрока А				
-22	16	-22	-7	14	-8
8	11	10	8	15	21
-13	6	-9	6	13	-13
-5	2	6	-5	-3	4
β	16	10	8	15	21

Выписывая в столбец α минимальные выигрыши для игрока А (min по строке), а в строке β максимальные проигрыши игрока В (max по столбцу), получим

$\alpha = \max\{-22, 8, -13, -5\} = 8$ и $\beta = \min\{16, 10, 8, 15, 21\} = 8$.

Здесь $\alpha = \beta = a_{23} = 8$. Этот элемент представляет собой седловую точку, соединяющую в себе свойства точки максимума (по одной группе переменных) и точки минимума (по другой группе переменных). Эта особенность отражена в названии “игра с седловой точкой”.

В любой игре с седловой точкой стороны А и В, решившие придерживаться минимаксных стратегий, попадают в ситуацию, характеризуемую тем, что и для А, и для В выгодно сохранять неизменными эти стратегии. Действительно, если a_{pq} – седловая точка, то s_{pa}, s_{qb} – минимаксные стратегии. До тех пор, пока сторона а применяет s_{pa}, а сторона В – соответственно s_{qb}, значение a_{pq} остается постоянным. Если в какой-то момент один из участников конфликта попытается изменить свою стратегию, то выгоду из этого извлечет другой участник, так как всякий переход к новой стратегии означает отказ от принципа минимакса и ведет к проигрышу.

Положение, при котором ни одна из сторон не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии, называется ***ситуацией равновесия***. В играх с седловой точкой такая ситуация возникает и сохраняется сколько угодно долго, если стороны А, В используют s_{pa}, s_{qb} – называемые в этом случае ***чистыми стратегиями***. Величина a_{pq} – совпадающая с α и β, называется ***чистой ценой игры***. Очевидно, стратегии s_{pa}, s_{qb} – могут рассматриваться здесь как ***оптимальные***, образующие ***решение игры***.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда А и В располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустить, что хотя бы одна сторона ничего не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно, вслепую. Выигрыш либо становится делом случая, либо целиком принадлежит тому, кто хорошо информирован о ходе операции. Следовательно, необходимо различать ***игры с полной информацией***, в которых каждый участник в любой момент времени знает всю предысторию данной игры, т. е. все, что было сделано и достигнуто ранее всеми оперирующими сторонами, и ***игры с неполной информацией***, в которых знание предыстории так или иначе ограничено (например, возможностью скрыть от противника сделанный ход). В дальнейшем речь будет идти прежде всего об играх с полной информацией как наиболее изученных объектах.

Могут встречаться случаи, когда платежная матрица имеет несколько седловых точек, однако это не изменит характера рекомендуемых решений. Для простоты рассмотрим сначала матрицу (табл. 45), имеющую две седловые точки a_{pq}, a_{rt} ($1 \le$ p, r $\le$ m; $1 \le$ q, t $\le$ n). По определению, и a_{pq}, и a_{rt} есть минимальный элемент своей строки и максимальный элемент своего столбца, следовательно, $a_{rq} \le a_{pq} \le a_{pt}$, $a_{pt} \le a_{rt} \le a_{rq}$.

Таблица 5. Матрица игры с несколькими седловыми точками.

	1	…	q	…	…	t
1						
…						
p			a_{pq}	…	a_{pt}	
…			…		…	
r			a_{rq}	…	a_{r}	
…						

Очевидно, эти неравенства выполнимы лишь при a_{pq}, = a_{rt} Такой же вывод можно получить и для матриц с произвольным числом седловых точек путем попарных сравнений неравенств, которым эти точки удовлетворяют. Таким образом, в рассматриваемых играх существует несколько ситуаций равновесия, причем все они эквивалентны, поскольку связанные с ними платежи a_{pq}, a_{rt} … равны между собой. Эта особенность позволяет рекомендовать чистые стратегии s_{pa}, s_{qb}; s_{ra}, s_{tb}; … в качестве оптимальных.

Смешанные стратегии

На практике наиболее распространенным является случай, когда платежная матрица вообще не имеет седловой точки и $\alpha \ne \beta$. В подобной ситуации каждой стороне необходимо как-то скрыть свое поведение от противника, чтобы ослабить влияние информационного фактора и получить желаемое преимущество. Это трудно осуществить, ориентируясь только на разумный выбор конкретных стратегий, так как любые рассуждения могут быть воспроизведены противником. В то же время полный отказ от рационального начала и переход, например, к бессистемному поиску вариантов решений означал бы прекращение игры как таковой и замену ее неуправляемым случайным процессом.

Проанализируем эту ситуацию на примере (табл.6).

Таблица 6. Пример игры 4x5.

A	s_{1b}	s_{2b}	s_{3b}	s_{4b}	s_{5b}	α
s_{1a}	6	11	-5	2	8	-5
s_{2a}	17	-2	1	0	-15	-15
s_{3a}	-9	14	3	8	5	-9
s_{4a}	-1	-7	10	4	12	-7
β	17	14	10	8	12	

$$\alpha = \max\{-5,-15,-9,-7\} = -5 \text{ и } \beta = \min\{17,14,10,8,12\} = 8.$$

Следовательно минимаксной стратегией *A* является s_{1a}, а для *B* - s_{4b}. Это решение будет наилучшим, если стороны делают только один ход. Если ход не один, и имеется полная информация о прошлом, то каждая сторона, изменяя свои стратегии, может добиться преимущества. В результате каждый ход станет проблематичным и потребует разработки специальных правил. Решение в чистых стратегиях оказывается неустойчивым в связи с хорошей информированностью сторон о действиях друг друга. Поэтому необходимо как-то скрыть своё поведение от противника, чтобы ослабить влияние информации и получить преимущество.

Приемлемый компромисс достигается здесь путем обоснованного, разумного введения элемента случайности в действия сторон, так что каждый отдельный ход остается непредсказуемым, но вся совокупность ходов обладает вполне определенными, заранее заданными свойствами. Участники игры просто чередуют свои стратегии в соответствии с разработанной схемой, обеспечивающей нужную вероятность реализации каждой стратегии.

Другими словами, участники конфликта чередуют (смешивают) в случайном порядке свои стратегии в соответствии со специально разработанной схемой, обеспечивающей нужную частоту (вероятность) реализации каждой из s_{1a}, …, s_{ma}, s_{1b}, …, s_{nb}.

Если p_{ia} - вероятность появления s_{ia} $(i = 1,2,\dots,m)$, то можно говорить о распределении вероятностей на множестве стратегий стороны *A*, причем всегда $\sum_{i=1}^{m} p_{ia} = 1$. Произвольно взятое распределение $(p_{1a},\dots,p_{ma}) = S_A$ называется смешанной стратегией стороны *A*, распределение $(p_{1b},\dots,p_{nb}) = S_B$ - смешанной стратегией стороны *B*. Наряду с распределениями $(p_{1a},\dots,p_{ma}) = S_A$ и $(p_{1a},\dots,p_{ma}) = S_A$ для упрощения записи применяют и другие обозначения: $(p_1,\dots,p_m) = S_A$ для игрока А и $(q_1,\dots,q_n) = S_B$ для игрока В.

Возможность широкого выбора смешанных стратегий S_A, S_B делает содержательным исследование игр в случае $\alpha \neq \beta$. Более того, введённые понятия сохраняют смысл и в случае $\alpha = \beta$. Возникает вопрос: какими соображениями надо пользоваться при выборе смешанных стратегий? Но оказывается, что принцип минимакса сохраняет своё значение и в этом случае.

Пусть $\{S_A\}$ – множество всех смешанных стратегий стороны A в некоторой матричной игре, а $\{S_B\}$ – множество смешанных стратегий стороны B. Если A выбирает стратегию $S_A \in \{S_A\}$, а B – стратегию $S_B \in \{S_B\}$, то средняя величина (математическое ожидание) платежа определяется суммой $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ia} p_{jb}$, которая может рассматриваться в качестве характеристики выбранных S_A, S_B [ее удобно обозначить через $a(S_A, S_B)$]. Для определенности будем считать $a(S_A, S_B)$ выигрышем стороны A и соответственно проигрышем стороны B.

Формулируя свою стратегию S_A в антагонистической игре с полной информацией, сторона A должна ориентироваться на худшее, т. е. оценивать ожидаемый выигрыш как $\min\limits_{S_B \in \{S_B\}} a(S_A, S_B)$. Тогда оптимальной оказывается стратегия S^*_A, позволяющая достичь $\max\limits_{S_A \in \{S_A\}} \min\limits_{S_B \in \{S_B\}} a(S_A, S_B) = a_A$.

Аналогичные рассуждения, связанные с поиском наилучшего способа действий стороны B, приводят к рекомендации применять стратегию S^*_B, дающую $\min\limits_{S_B \in \{S_B\}} \max\limits_{S_A \in \{S_A\}} a(S_A, S_B) = a_B$. Таким образом, S^*_A можно назвать максиминной, а S^*_B – минимаксной стратегиями.

Проведенный анализ общих условий ведения антагонистических игр позволил сформулировать универсальный принцип действий сторон A и B, основанный на идее гарантированного результата. Конкретные решения, вытекающие из этого принципа, легко отыскиваются лишь в простейшем случае $\alpha=\beta$ (чистые стратегии s_{pa}, s_{qb}). В более сложных ситуациях приходится вводить вместо a_{ij} новые критерии оценки исходов игры, в частности, средний ожидаемый выигрыш $a(S_A, S_B)$.

3 Теорема о минимаксе. устойчивость получаемых решений.

Пусть дана игровая матрица $||a_{ij}||$ и для нее вычислены значения α, β, совпадающие (по определению) с $a_{kl} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ и $a_{gh} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$ ($1 \le k, g \le m$; $1 \le l, h \le n$). Очевидно, a_{kl}, являясь минимальным элементом k-й строки, удовлетворяет неравенству $a_{kl} \le a_{kh}$ (табл. 7). Точно так же для a_{gh}, являющегося максимальным элементом h-го столбца, выполнено $a_{gh} \ge a_{kh}$. Отсюда следует $a_{kl} \le a_{gh}$ или $\alpha \le \beta$. Таким образом, нижняя цена игры никогда не превышает верхнюю цену, и условие $\alpha \ne \beta$, нужно принимать как $\alpha < \beta$.

Таблица 7. Оценки игры.

b *a*	1 …	h	…	l	… n
1					
…					
k		a_{kh}	…	a_{kl}	
…		…			
g		a_{gh}			
…					
m					

Заметим, что в случае $\alpha<\beta$ применение смешанных стратегий S^*_A, S^*_B должно привести к улучшению (в среднем) положения участников игры. Это следует, во-первых, из самой идеи случайного чередования s_{ia}, s_{jb} (i=1, m; j=1, n) с целью получения преимуществ и, во-вторых, из факта принадлежности любых чистых стратегий множеству $\{S_A\}$ или $\{S_B\}$ (чистая стратегия представляет собой частный вариант смешанной). Каждая из сторон A, B не ухудшает своих возможностей, допуская применение стратегий S^*_A, S^*_B вместо однообразных s_{pa}, s_{qb}, поэтому $a_A \ge \alpha$, $a_B \le \beta$.

Весьма важным для теории и практики является вопрос о том, связаны ли между собой величины a_A и a_B. Ответ на него дает теорема о минимаксе, играющая большую роль в понимании особенностей антагонистических игр и утверждающая, что в конечной игре двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеет место равенство $a_A = a_B$ при $\alpha \neq \beta$.

Теорема о минимаксе указывает на существование ситуаций равновесия для случая $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, оптимальных стратегий S^*_A, S^*_B, т. е. решений игры, позволяющих добиваться среднеожидаемого выигрыша

$\gamma = a_A = a_B$.

Величина γ называется ***ценой игры***. Из приведенных выше оценок следует $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Наряду с γ применяют и другое обозначение, например $\mathbf{v}$.

Ни одна стратегия S_A, применяемая против любой стратегии S_B, не приведет к результату лучшему, чем γ, и наоборот, ни одна S_B, действующая против S_A, не улучшит указанного результата. Чтобы конкретизировать это утверждение, предположим, что для игры $m \times n$ найдено решение $S^*_A = \{p^*_{1a}, \ldots, p^*_{ma}\}$, $S^*_B = \{p^*_{1b}, \ldots, p^*_{nb}\}$. Вообще говоря, некоторые из p^*_{ia}, p^*_{jb} ($i=1, m$; $j=1, n$) в рассматриваемые S^*_A и S^*_B. Те из s_{ia}, s_{jb}, которые входят соответственно в S^*_A, S^*_B, можно назвать ***активными стратегиями*** в составе S^*_A, S^*_B.

Существует ***теорема об активных стратегиях: если один из участников игры, придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то ожидаемый выигрыш останется неизменным и равным γ независимо от характера действий другого участника в пределах его активных стратегий.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть J_A, J_B – множества таких номеров i, j, что $p^*_{ia}>0$ для $i \in J_A$ и $p^*_{ib}>0$ для $j \in J_B$ (другими словами, s_{ia}, s_{jb} есть активные стратегии при $i \in J_A$, $j \in J_B$). Пусть далее γ -- цена игры, достижение которой обеспечивается оптимальными S^*_A, S^*_B, а γ_j – средний выигрыш стороны А, получаемый при использовании S^*_A против s_{jb} ($j \in J_B$). Очевидно, γ, как и всякое математическое ожидание, удовлетворяет равенству $\gamma = \sum\limits_{j \in J_B} \gamma_j p^*_{jb}$, причем $\sum\limits_{j \in J_B} p^*_{jb} = 1$. В то же время для любого $j \in J_B$ должно выполняться $\gamma_j \geq \gamma$ (переход от оптимальной стратегии S^*_B к неоптимальной s_{jb} может только увеличить проигрыш стороны В). Сохранить в этих условиях предыдущее равновесие удается лишь положив все γ_j равными γ, что и доказывает утверждение теоремы в случае, когда стратегия S^*_A противопоставляется отдельно взятым s_{jb}. Аналогичные выводы нетрудно получить и при сравнении S^*_A с произвольной смешанной стратегией S_B, определяемой вероятностями $p_{jb} \neq p^*_{jb}$ ($j \in J_B$). Здесь ожидаемый выигрыш А (проигрыш В) составит $\gamma = \sum\limits_{j \in J_B} \gamma_j p_{jb}$. Он должен всегда оцениваться как $\bar{\gamma} \geq \gamma$ из-за неоптимальности S_B, однако нельзя ожидать $\bar{\gamma} > \gamma$, так как это означало бы неоптимальность S^*_A, что противоречит исходным предположениям. Остается, как и ранее, считать $\bar{\gamma} > \gamma$. Естественно, все сказанное можно повторить применительно к ситуациям, в которых неизменной сохраняется только стратегия S^*_B, и завершить тем самым доказательство.

Важным результатом проведенного анализа является подтверждение того факта, что каждая конечная (матричная) игра с полной информацией имеет хотя бы одно решение либо в чистых, либо в смешанных стратегиях. Иначе говоря, любая такая игра имеет ситуацию равновесия, которую целесообразно сохранять, выбирая для практического использования соответствующие ей оптимальные стратегии.

4. Упрощение игры.

Выше отмечалось, что простейшим является случай существования седловой точки игры. Поиск оптимального решения сводится здесь к перебору элементов матрицы $||a_{ij}||$ с целью выявить $a_{pq}=\alpha=\beta$. Другими словами, исследование свойств игры автоматически приводит к отысканию оптимальных чистых стратегий s_{pa}, s_{qb}, если обнаруживается равенство $\alpha=\beta$. Для теории этот случай не представляет большого интереса, хотя он встречается на практике. В дальнейшем имеет смысл уделить основное внимание условию $\alpha \neq \beta$.

Пусть установлено, что некоторая игра $m \times n$ не имеет седловой точки и, следовательно, ее решение нужно искать в смешанных стратегиях, анализируя те или иные распределения вероятностей

$\{p_{1a}, \ldots, p_{ma}\} = S_A$, $\{p_{1b}, \ldots, p_{nb}\} = S_B$.

Можно ожидать, что процесс отыскания оптимальных стратегий S^*_A, S^*_B окажется довольно трудоемким, особенно при больших m и n, поэтому целесообразно для начала рассмотреть вопрос об упрощении игр как средстве, с помощью которого ускоряется подготовка решений.

Паретовские правила отношений в антагонистических играх можно трактовать следующим образом. Если матрица $||a_{ij}||$ обладает свойствами $a_{kj} \geq a_{rj}$ ($1 \leq k, r \leq m$; $k \neq r$; $j=1, n$) и $a_{kj} > a_{rj}$ хотя бы для одного номера j, то ее k-я строка доминирует над r-й строкой, в случае равенства строки эквивалентны. Аналогично, при $a_{il} \leq a_{ih}$ ($1 \leq l, h \leq n$; $l \neq h$; $i=\overline{1,m}$) и $a_{ih} < a_{il}$ хотя бы для одного номера l столбец i доминирует над столбцом h, в случае равенства столбцы эквивалентны. Очевидно, сторона А всегда должна предпочесть стратегию s_{ka} стратегии s_{ra}, а сторона В s_{ib} стратегии s_{hb} (предполагается, что речь идет о выигрышах А и о проигрышах В). Следовательно, цена игры должна остаться неизменной при сохранении в матрице $||a_{ij}||$ только доминирующих строк и столбцов, что позволяет уменьшить m и n, т. е. упростить исследования.

Другим распространенным способом упрощения игр является искусственная замена исходных чистых стратегий $s_{1a}, \ldots, s_{ma}, s_{1b}, \ldots, s_{nb}$ очевидными смешанными стратегиями с внесением соответствующих коррективов в платежную матрицу.

Таким образом, приступая к исследованию любой игры $m \times n$, необходимо сначала проверить, имеет ли матрица $||a_{ij}||$ седловые точки и связанные с ними решения в чистых стратегиях. Если этого нет, то нужно попытаться выявить доминирующие стратегии (строки и столбцы), а также стратегии, приводящие к одинаковым (дублированным) результатам. Затем следует перейти к формированию (по возможности) очевидных смешанных стратегий, объединяющих в себе какие-то из s_{ia} ($i=\overline{1,m}$) или s_{jb} ($j=\overline{1,n}$).

В итоге определяется игра $m' \times n'$ ($2 \leq m' \leq m$; $2 \leq n' \leq n$) без седловых точек, представляющая собой аналог исходной игры $m \times n$.

Если рассматриваемые операции дадут желаемый результат, то упростится поиск оптимальных решений (за счет снижения размерности задачи). В исключительных случаях могут появиться и сами решения, однако уверенности в таком благоприятном исходе нет. Более того, всегда существует опасность получить отрицательный результат ($m'=m$, $n'=n$), убеждающий исследователя в сложности изучаемого объекта и необходимости разработки специальных методов решения игр.

Графоаналитический метод

1. Решение игр 2x2

Предположим, что некоторая игра 2x2 (табл.8) не имеет седловой точки, и требуется найти её решение $S_A^* = (p_{1a}^*, p_{2a}^*)$, $S_B^* = (p_{1b}^*, p_{2b}^*)$.

Таблица 8. Матрица игры 2x2.

B / A	s_{1b}	s_{2b}
s_{1a}	a_{11}	a_{12}
s_{2a}	a_{21}	a_{22}

По теореме об активных стратегиях, сторона *A*, придерживаясь своей оптимальной стратегии S_A^* обеспечит себе выигрыш γ даже тогда, когда сторона B откажется от S_B^* и будет применять либо s_{1b}, либо s_{2b} стратегии. Допуская теоретически такие ситуации, можно утверждать, что $a_{11}p_{1a}^* + a_{21}p_{2a}^* = \gamma$ (S_A^* действует против s_{1b}), $a_{21}p_{1a}^* + a_{22}p_{2a}^* = \gamma$ (S_A^* действует против s_{2b}, причём всегда $p_{1a}^* + p_{2a}^* = 1$. Аналогично, $a_{11}p_{1b}^* + a_{12}p_{2b}^* = \gamma$ (S_B^* против s_{1a}), $a_{21}p_{1b}^* + a_{22}p_{2b}^* = \gamma$ (S_B^* против s_{2a}), $p_{1b}^* + p_{2b}^* = 1$. Неизвестными в этих уравнениях являются $p_{1a}^*, p_{2a}^*, p_{1b}^*, p_{2b}^*$, вычисляемые по формулам

$$p_{1a}^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad p_{1b}^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$\gamma = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad p_{2a}^* = 1 - p_{1a}^*; \quad p_{2b}^* = 1 - p_{1b}^*.$$

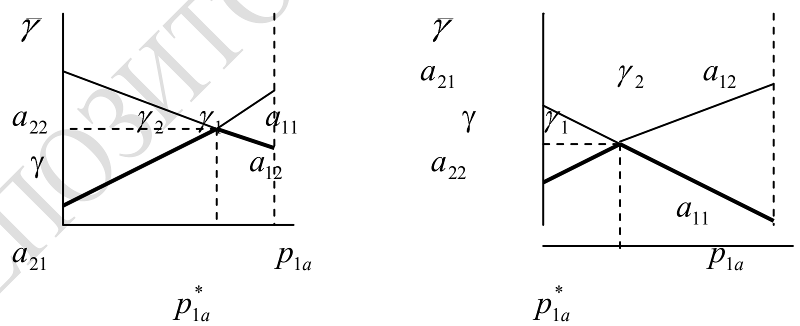
Чтобы эти выражения имели смысл необходимо требовать

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0 \\ a_{11} - a_{12} > 0 \\ a_{22} - a_{12} > 0 \\ a_{11} - a_{21} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0 \\ a_{11} - a_{12} < 0 \\ a_{22} - a_{12} < 0 \\ a_{11} - a_{21} < 0 \end{cases}.$$

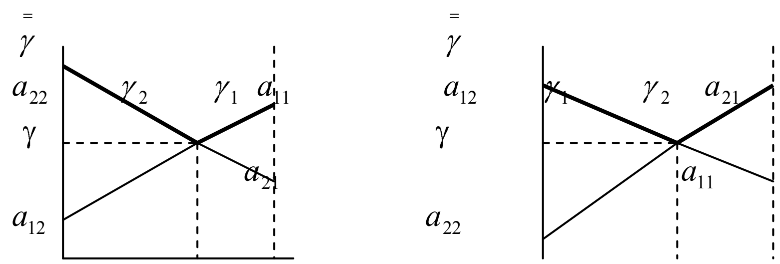
Нетрудно заметить, что этими неравенствами предусматривается отсутствие в данной игре седловой точки.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию полученных результатов. Допустим, что γ_1 - средний ожидаемый выигрыш, получаемый стороной *A* при использовании ею смешанной стратегии $S_A = (p_{1a}, p_{2a})$ против чистой стратегии s_{1b} стороны *B*. Получим $\gamma_1 = (a_{11} - a_{21})p_{1a} + a_{21}$, так как всегда $p_{2a} = 1 - p_{1a}$. Аналогично, средний ожидаемый выигрыш стороны *A* при использовании S_A против s_{2b} $\gamma_2 = (a_{12} - a_{22})p_{1a} + a_{22}$.

а)



б)



p_{1b} p_{1b}

p^*_{1b} p^*_{1b}

Рис.1.Графическое решение игры 2х2.

Но ни s_{1b}, ни s_{2b} не являются оптимальными для В и наверное не будут применены как чистые стратегии. Поэтому сторона *А* может рассчитывать только на выигрыш $\bar{\gamma} = \min(\gamma_1, \gamma_2)$. Если a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} заданы, то γ - функция только p_{1a}, и её значения совпадают либо с γ_1, либо с γ_2. Следовательно, можно построить график и с его помощью попытаться найти S^*_A .На *рис. 1,а* вариант графика, относящегося к первой системе неравенств. На *рис.1,б* вариант графика, относящегося ко второй системе неравенств.

Естественно, сторону *А* должно интересовать то значение, при котором γ достигает максимума. Очевидно, оно определяется равенством $\gamma_1 = \gamma_2$. Итак, геометрический способ решения игр 2х2 заключается в построении прямых $\gamma_1(p_{1a})$, $\gamma_2(p_{1a})$ по двум точкам $(0, a_{21})$, $(1, a_{11})$, и $(0, a_{22})$, $(1, a_{12})$ с последующей оценкой координат p^*_{1a}, γ точки пересечения, что позволяет найти и $p^*_{2a} = 1 - p^*_{1a}$;

Величины p^*_{1b}, p^*_{2b} определяются так же, но в построении участвуют точки $(0, a_{12})$, $(1, a_{11})$ и $(0, a_{22})$, $(1, a_{21})$, а вместо γ рассматривается γ =max(γ_1, γ_2).

2. Решения игр 2х*n* и *m*х2

Исследование игр 2х2 позволяет разработать более простые и наглядные методы поиска решений, облегчает изучение сложных игр, представляющих практический интерес. Речь идёт и об играх, в которых одна из сторон имеет лишь две стратегии, а другая – произвольное конечное число стратегий *m* или *n*.

Пусть дана игра 2х*n* (табл.9), не имеющая седловых точек, и нужно найти её решение $S^*_A = (p^*_{1a}, p^*_{2a})$, $S^*_B = (p^*_{1b}, p^*_{2b}, ..., p^*_{nb})$. Допуская принципиальную возможность применения S^*_A против каждой s_{jb} в отдельности, получаем

$$a_{11} p^*_{1a} + a_{21} p^*_{2a} = \gamma; a_{12} p^*_{1a} + a_{22} p^*_{2a} = \gamma; ...; a_{1n} p^*_{1a} + a_{2n} p^*_{2a} = \gamma .$$

Точно так же

$$a_{11} p^*_{1b} + ... + a_{1n} p^*_{nb} = \gamma; a_{21} p^*_{1n} + a_{2n} p^*_{nb} = \gamma; \ \sum_{j=1}^{n} p^*_{jb} = 1,$$

если стратегия S^*_B действует против s_{1a} и s_{2a}.

Таблица 9. Игра 2хn.

B / A	s_{1b}	s_{2b}	..	s_{nb}
s_{1a}	a_{11}	a_{12}	..	a_{1n}

s_{2a}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

В этом случае геометрический метод тоже сохраняет свою наглядность и эффективность, хотя анализ системы уравнений более сложный по сравнению с системой в случае *n*=2. Способ поиска решений заключается в построении прямых $\gamma_1 = (a_{11} - a_{21})p_{1a} + a_{21}$; $\gamma_2 = (a_{12} - a_{22})p_{1a} + a_{22}$; ... ; $\gamma_n = (a_{1n} - a_{2n})p_{1a} + a_{2n}$, определяющих график функции $\bar{\gamma} = \min(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ (на *рис.2,а* выделен). Максимальное $\bar{\gamma}$ достигается в точке (p^*_{1a}, γ),которую легко найти на графике.

Очевидно, результат не изменится если рассматриваться будут только те прямые, которые пересекаются в точке (p^*_{1a}, γ) и следовательно, указывают стратегии s_{jb}, входящие в S^*_B с вероятностями $p^*_{jb} \neq 0$. Остальные чистые стратегии стороны *В* не представляют интереса как заведомо невыгодные (для них всегда $\gamma_j > \gamma$, и необходимо положить $p^*_{jb} = 0$), поэтому построенный на *рис.4.4,а* график функции $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p_{1a})$ определяет вместе с p^*_{1a}, γ всю совокупность активных стратегий В. Зная их количество можно конкретизировать задачу оценки значений $p^*_{jb} \neq 0$, и на этой основе выбрать S^*_B.

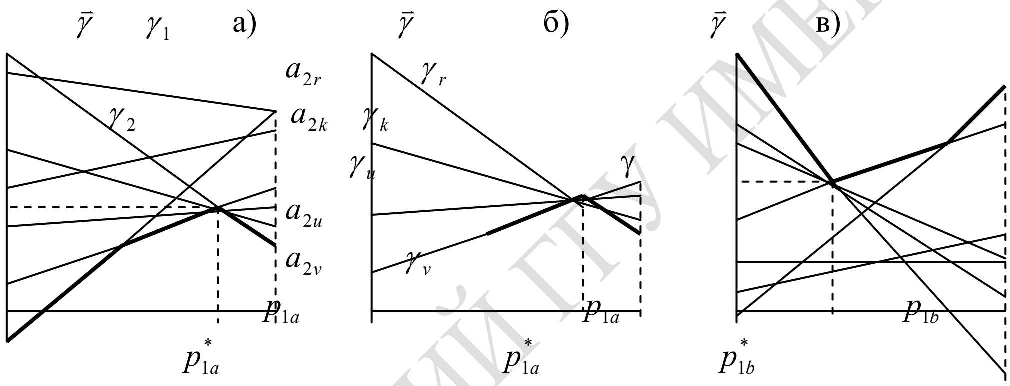


Рис.2.Графическое решение игры 2хn.

Предположим, что для исследуемой игры табл. 9 построен график $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p_{1a})$, и активными стратегиями *В* оказались $s_{rb}, s_{kb}, s_{ub}, s_{vb} \,(\leq r, k, u, v \leq n; r \neq k \neq u \neq v)$. Теперь исходная игра упростилась и приняла вид, представленный в таблице 10.

Таблица 10. Игра 2хn после упрощений.

В / А	s_{kb}	s_{rb}	s_{ub}	s_{vb}
s_{1a}	a_{1k}	a_{1r}	a_{1u}	a_{1v}
s_{2a}	a_{2k}	a_{2r}	a_{2u}	a_{2v}

А график $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p_{1a})$ стал таким как на рис.2,б. Возникает ситуация, в которой сторона *В* может выбрать две, три, четыре стратегии из таблицы для включения их в S^*_B. В геометрическом смысле это означает сохранение на *рис.3б* двух (или более) прямых, пересекающаяся так, что точка (p^*_{1a}, γ) остаётся точкой экстремума функции $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p_{1a})$. То есть, определяются допустимые парные комбинации прямых, оставляемых для дальнейшего исследования. На *рис.2,б* ими будут γ_r, γ_u или γ_r, γ_v, но не γ_r, γ_k или γ_u, γ_v (здесь точка пересечения теряет экстремальные свойства). В первом случае коэффициенты наклона имеют разные знаки, во втором – одинаковые.

Следовательно, существуют такие решения игр 2х*n*, где число активных стратегий стороны *B* равно двум. Значит, игру 2х*n* можно свести к игре 2х2 после того как построена таблица 10.

Общая схема поиска S_A^*, S_B^* представляется следующим образом:

- по данным таблицы на рис. вычерчивается график функции $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(p_{1a})$ и на нем отыскивается экстремальная точка (p_{1a}^*, γ);
- выбираются любые две прямые с противоположным наклоном из пересекающихся в этой точке;
- Отвечающие им стратегии $s_{jb}(\,), s_{jb}(\,)$ включаются в игру 2х2 против S_{1a} и S_{2a};
- полученная игра 2х2 решается либо с помощью формул, либо графическим способом.

Аналогичную последовательность действий можно применить к игре *m*х2. Отличием будет лишь то, что нужно строить прямые $\gamma_i = (a_{i1} - a_{i2})p_{1b} + a_{i2}$, $i = \overline{1,m}$ и по ним определять $\bar{\gamma}$ как точную верхнюю границу значений γ_i (рис.2,в). Минимум $\bar{\gamma}$ достигается при $p_{1b} = p_{1b}^*$ и точка (p_{1b}^*, γ) должна использоваться в дальнейшем переходе к игре 2х2.

Рассмотрим решение на примере (табл. 11).

Таблица 11. Платежная матрица вида 2х4.

B / A	1	2	3	4
1	2	2	3	-1
2	4	3	2	6

Эта игра не имеет седловой точки. Ожидаемые выигрыши игрока *A,* соответствующие чистым стратегиям *B,* представлены в таблице 12.

Таблица 12. Ожидаемые выигрыши.

Чистые стратегии игрока В	Уравнения прямых для выигрышей игрока А	Ожидаемые выигрыши игрока А
1	$\nu_1 \le 2p_1+4p_2$	$-2p_1+4$
2	$\nu_2 \le 2p_1+3p_2$	$-p_1+3$
3	$\nu_3 \le 3p_1+2p_2$	p_1+2
4	$\nu_1 \le -p_1+6p_2$	$-7p_1+6$

На рис. 3 изображены четыре прямые, являющиеся графиками этих функций от p_1.

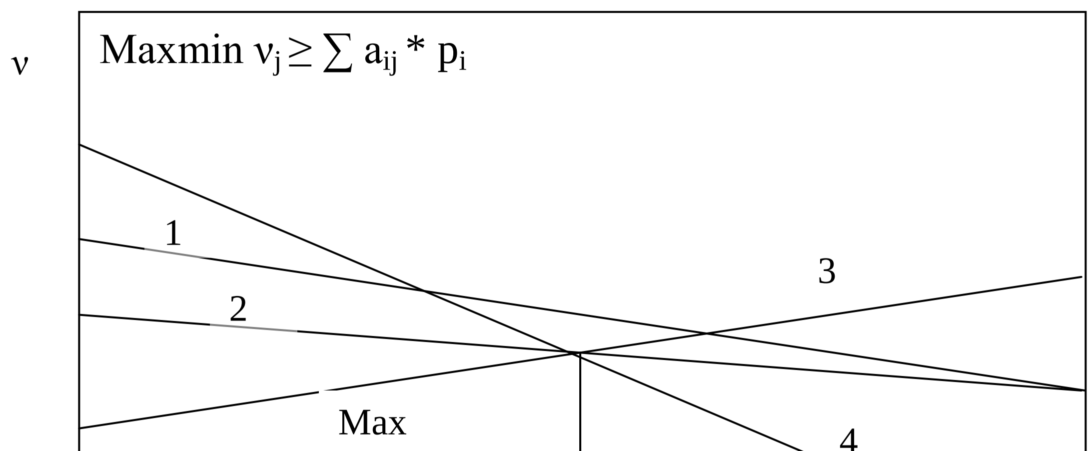


Рис 3. Графическое решение для игрока А.

Максимин достигается при $p_1 = ½$. В этой точке пересекаются *любые* две из прямых 2, 3 и 4. Следовательно, оптимальной стратегией игрока *А* является ($p_1 = ½$, $p_2 = ½$) и значение игры находится подстановкой p_1 в уравнение любой из прямых, проходящих через максиминную точку. Это дает $\nu^* = 5/2$.

Интересно отметить, что при определении оптимальных стратегий игрока *В* три прямые проходят через максиминную точку. Это означает, что оптимальная стратегия *В* представляет собой совокупность трех стратегий. Любые две прямые, имеющие *противоположные* наклоны, определяют одно возможное оптимальное решение. Таким образом, из трех комбинаций (2, 3), (2, 4) и (3, 4) комбинация (2, 4) должна быть исключена как неоптимальная.

Комбинация (2, 3) дает $q_1=q_4=0$. Следовательно, $q_3 = 1—q_2$. Ожидаемые проигрыши игрока *В,* соответствующие чистым стратегиям *А,* представлены в таблице 13.

Таблица 13. Ожидаемые проигрыши.

Чистые стратегии игрока А	Ожидаемые проигрыши игрока В
1 2	$-q_2+3$ q_2+2

Значение $q_2 = ½$ (соответствующее минимаксной точке) определяется из равенства

$$-q_2+3=q_2+2$$

Отметим, что подстановкой $q_2 = ½$ в выражение для ожидаемого проигрыша игрока *В* можно найти минимаксное значение, равное 5/2, совпадающее, как и должно быть, со значением игры ν^*.

Аналогично может быть рассмотрена и комбинация (3, 4), дающая другое оптимальное решение. Любое взвешенное среднее комбинаций (2, 3) и (3, 4) также будет давать оптимальное решение, в которое входят стратегии 2, 3 и 4.

Пример. Рассмотрим следующую игру вида 4x2 (табл. 14).

Таблица 14. Матрица игры 4x2.

B / A	q_1	q_2
p_1	2	4
p_2	2	3
p_3	3	2
p_4	-2	6

Эта игра не имеет седловой точки. Пусть q_1 и q_2(=1-q_1) — смешанные стратегии игрока *В.* Проигрыши игрока В представлены в таблице 15.

Таблица 15. Ожидаемые проигрыши игрока В.

Чистые стратегии игрока А	Ожидаемые проигрыши игрока В
1 2 3 4	$-2q_1+4$ $-q_1+4$ q_1+2 $-8q_1+6$

Эти четыре прямые изображены на рис. 4. В данном случае минимаксная точка определяется как самая нижняя точка на огибающей сверху. Значение *у* получается как точка пересечения прямых 1 и 3. Это дает $q_1=2/3$ и $\nu^*=8/3$.

Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют чистым стратегиям 1 и 3 игрока *А*. Это показывает, что $p_2 = p_4 = 0$. Следовательно, $p_1 = 1- p_3$. Ожидаемые выигрыши игрока *А,* соответствующие чистым стратегиям игрока *В,* приведены в таблице 16.

Таблица 16. Ожидаемые выигрыши игрока А.

Чистые стратегии игрока В	Ожидаемые выигрыши игрока А
1 2	$-p_1+3$ $2p_1+2$

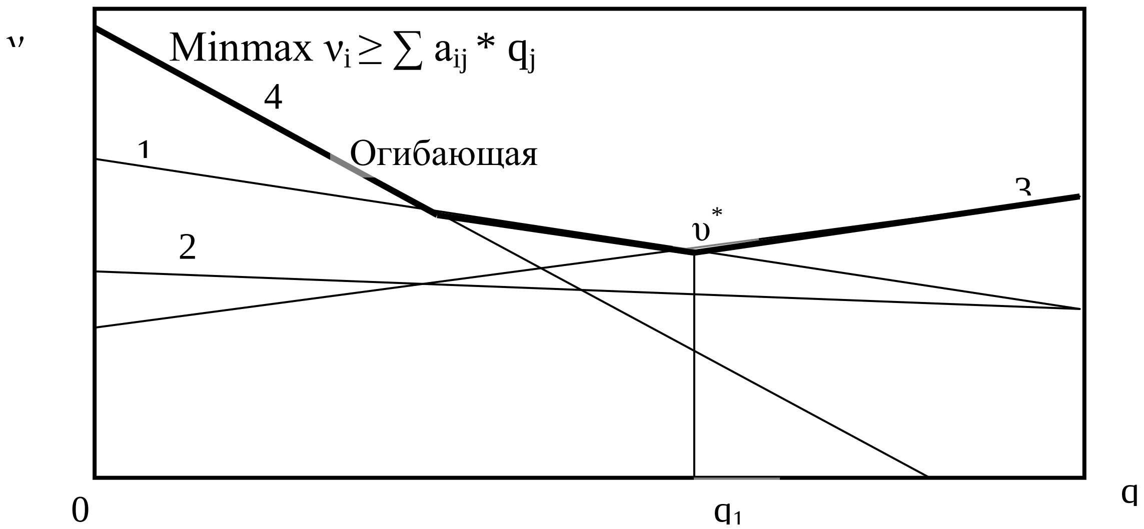


Рис. 4. Графическое решение игры.

Значение $p_1 = 1/3$ определяется из уравнения

$$-p_1+3=2p_1+2$$

Таким образом, оптимальной стратегией игрока *А* будет $p_1=1/3$, $p_2=0$, $p_3=2/3$, $p_4=0$. Это дает, как и прежде, $\nu^*=8/3$.

Решение игр вида (m x n) с помощью линейного программирования

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования .(И, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как игра.)

Г. Данциг указывает, что создатель теории игр Дж. фон Нейман, который первым ввел симплекс-метод в линейное программирование (1947 г.), установил это соотношение и в дальнейшем обосновал и развил концепцию *двойственности* в линейном программировании. В этом разделе описывается способ нахождения решения игры методом линейного программирования, который особенно эффективен для игр, описываемых матрицей большой размерности.

В разд. 2 показано, что оптимальная смешанная стратегия *A* определяется условиями $\max\limits_{p_i}\left\{\min\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{i1}\, p_i\,, \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i2}\, p_i\,, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{m} a_{in}\, p_i\right)\right\};\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1.$ Эта задача может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования. Пусть

$$\nu = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\, p_i\,, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\, p_i\,, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}\, p_i\right).$$

Тогда задача принимает вид:

максимизировать $z=\nu$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \ge \nu,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;\ \forall p_i \ge 0$$

где ν является значением игры.

Полученная задача линейного программирования может быть упрощена делением всех n+1 ограничений на ν. Эта операция возможна при $\nu>0$. В противном случае, если $\nu<0$, необходимо изменить знаки неравенств. При $\nu=0$ деление, естественно, недопустимо. Но этот случай не представляет особых затруднений, так как можно прибавить положительное число *К* ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения *модифицированной* игры. Тогда *истинное* значение игры может быть получено вычитанием *К* из *модифицированного* значения. Вообще, если максиминное (нижнее) значение игры неотрицательно, значение игры больше нуля (при условии, что игра не имеет седловой точки).

Таким образом, предполагая $\nu>0$, ограничения задачи могут быть записаны в виде

$$a_{11}(p_1/\nu) + a_{21}(p_2/\nu) + \ldots + a_{m1}(p_m/\nu) \ge 1,$$
$$a_{12}(p_1/\nu) + a_{22}(p_2/\nu) + \ldots + a_{m2}(p_m/\nu) \ge 1,$$
$$\cdots$$
$$a_{1n}(p_1/\nu) + a_{2n}(p_2/\nu) + \ldots + a_{mn}(p_m/\nu) \ge 1,$$
$$p_1/\nu + p_2/\nu + \cdots + p_m/\nu = 1/\nu$$

Положим $X_i=p_i/\nu$ для i = 1, ...,m. В силу того что

$\max \nu \equiv \min\{X_1+\ldots+X_m\}$ задача принимает вид

минимизировать $z = X_1+X_2+ \ldots +X_m$

при ограничениях

$a_{11}X_1 + a_{21}X_2+ \ldots +a_{m1}X_m \ge 1,$

$a_{12}X_1 + a_{22}X_2+ \ldots +a_{m2}X_m \ge 1,$

. .

. .

$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2+ \ldots +a_{mn}X_m \ge 1,$

$X_1, X_2, \ldots, X_m \geq 0$

Для игрока В задача записывается в виде

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, q_j\,, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, q_j\,, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, q_j\right)\right\};\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Эта задача также может быть записана как задача линейного программирования:

максимизировать $\omega = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$

при ограничениях

$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n \leq 1,$

$a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n \leq 1,$

...

$a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \ldots + a_{mn}Y_n \leq 1,$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \geq 0$

где $\omega = 1/\nu$, $Y_i = q_j/\nu$, $\forall q_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$.

Отметим, что задача игрока В является двойственной к задаче игрока А. Тем самым оптимальное решение одной из задач автоматически дает оптимальное решение другой задачи. Задача игрока *В* может быть решена, например, стандартным симплекс-методом, а игрока *А* — двойственным симплекс-методом. Выбор метода определяется тем, какая из задач имеет меньше ограничений, что в свою очередь зависит от числа чистых стратегий каждого из игроков.

Пример. Рассмотрим следующую игру (3x3) (табл. 17).

Таблица 17. Матрица игры 3x3.

B \ A	q_1	q_2	q3	$\min_j$
p_1	3	-1	-3	-3
p_2	-3	3	-1	-3
p_3	-4	-3	3	-4
$\max_i$	3	3	3	

Так как максиминное значение равно —3, то возможно, что значение игры не будет положительным. Следовательно, число К, которое нужно прибавить ко всем элементам матрицы, должно быть не меньше 3. Пусть К=5. Тогда матрица принимает вид, представленный в таблице 18.

Таблица 18. Преобразованная матрица игры.

B \ A	q_1	q_2	q3
p_1	8	4	2
p_2	2	8	4
p_3	1	2	8

Задача игрока *В* теперь записывается в форме задачи линейного программирования:

максимизировать $\omega = Y_1 + Y_2 + Y_3$

при ограничениях

$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1,$

$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1,$

$1Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1,$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0,$

Ниже приведена таблица 19 оптимального решения задачи

Таблица 19. Симплекс-таблица решения игры.

Переменные Базис	Y_1	Y_2	Y3	Y_4	Y_5	Y_6	B_i
ω				5/49	11/196	1/14	45/196
Y_1	1			1/7	-1/14		1/14
Y_2		1		-3/98	31/196	-1/14	11/196
Y_3			1	-1/98	-3/98	1/7	5/49

Таким образом, решением исходной задачи будет
$\nu = 1/\omega - K = 196/45 – 5 = -29/45$,
$y_1 = Y_1/\omega = (1/14)/(45/196) = 14/45$,
$y_2 = Y_2/\omega = (11/196)/(45/196) = 11/45$,
$y_3 = Y_3/\omega = (5/49)/(45/196) = 20/45$,

Оптимальные стратегии игрока *А* получаются из решения двойственной задачи. Так как прямая задача решалась на max, то соответствие решений задается формулой $X_i = \omega_{i+k}$, где k =3 – ранг прямой задачи (При решении прямой задачи на min в строке ω будут отрицательные коэффициенты и соответствие задается формулой $X_i = - \omega_{i+k}$).

$z = \omega = 45/196$, $X_1 = 5/49$, $X_2 = 11/196$, $X_3 = 1/14$.

Следовательно,
$x_1 = X_1/z = 20/45$, $x_2 = X_2/z = 11/45$, $x_3 = X_3/z = 14/55$.

Решение игр методом итераций.

Большинство алгоритмов, разработанных для решения задач с помощью математических моделей исследования операций, не позволяет получить решение в аналитической форме. Как правило, решение находится путём осуществления ряда повторяющихся вычислительных процессов – итераций. Основная особенность итерационного процесса состоит в том, что на каждом шаге существует перспектива получения решения, более близкого к оптимуму, чем текущее решение. В таком случае говорят, что решение сходится (итеративно) к оптимальной точке.

Итерационный характер вычислительных процессов, использующих при решении задач с помощью методов исследования операций, обусловливает необходимость применения цифровых ЭВМ – эффективного средства выполнения вычислений. Размерность некоторых задач, решаемых с помощью математических моделей исследований операций, настолько велика, что бессмысленно пытаться получить их решение, осуществляя вычисления вручную.

Хотя значительные успехи в практическом использовании методов исследования операций были обусловлены, прежде всего, прогрессом создания мощных вычислительных машин, остаётся ещё ряд задач эффективные численные методы решения которых пока не найдены. Основная причина возникающих при этом трудностей заключается в том, что даже в том случае, когда сходимость алгоритма теоретически доказана и возможно использование высокопроизводительной цифровой ЭВМ, затраты времени на выполнение соответствующих вычислений могут оказаться чрезвычайно большими. Этот отрицательный момент усугубляется и характерным недостатком любой цифровой ЭВМ – наличием ошибок округления. При реализации итерационного вычислительного процесса на цифровой ЭВМ влияние накопленной ошибки округления в определённый момент становится настолько существенным, что полученное решение фактически соответствует решению другой задачи. Влияние ошибки округления неизбежно проявляется при решении задач с целочисленными (или дискретными) значениями переменных, так как цифровая ЭВМ выполняет арифметические действия с плавающей запятой.

В практических задачах часто нет необходимости находить точное решение игры; достаточно бывает найти приближённое решение, обеспечивающее средний выигрыш, близкий к цене игры.

Ориентировочную цену игры ν можно определить непосредственно из матрицы, зная нижнюю цену игры α и верхнюю β. Если α и β близки, то практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет в качестве оптимальных взять чистые минимаксные стратегии. В тех же случаях, когда α и β не близки, приближённое решение игры можно получить, пользуясь **методом итераций** (иначе метод Брауна- Робинссона).

Идея этого метода сводится к следующему. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны А и В применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности отдельных «партий» данной игры. Начинается он с того, что один из игроков (скажем А или «мы») выбирает произвольно одну из своих стратегий, например A_i. Противник В отвечает той из своих стратегий B_j, которая наименее выгодна для нас, т. е. обращает выигрыш при стратегии A_i в минимум. На этот ход мы отвечаем той своей стратегией A_k, которая даёт максимальный выигрыш при стратегии противника B_j. Далее – снова очередь противника. Он отвечает на пару ходов A_i и A_k той своей стратегией B_1, которая даёт наименьший средний выигрыш на одну партию при этих двух стратегиях, и т. д.

На каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого той своей стратегией, которая является *оптимальной относительно всех предыдущих ходов противника,* рассматриваемых как некая «смешанная стратегия», в которую чистые стратегии входят в пропорциях, определяемых частотой их применения.

Вместо того чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться просто «накопленным» за предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален (минимален).

Такой метод построения оптимальных стратегий представляет собой некоторую модель практического «взаимного обучения» игроков, когда каждый из них на опыте «прощупывает» способ поведения противника и стремится отвечать на него наилучшим для себя образом.

Можно доказать, что процесс итераций сходится; если такую чередующуюся последовательность партий продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну партию, будет стремиться к цене игры ν, а частоты $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_m^*$; $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*$, с которыми применялись стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$, в этом «розыгрыше», будут приближаться к вероятностям $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в оптимальных смешанных стратегиях: $S_A^*=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$; $S_B^*=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Расчёты показывают, что сходимость метода – очень медленная, однако для быстродействующих ЭЦВМ это не является серьёзным препятствием. Преимущество метода итераций состоит в том, что его сложность сравнительно медленно возрастает с увеличением размера таблицы $m \times n$, тогда как сложность решения задачи линейного программирования резко растёт при увеличении m и n.

Продемонстрируем применение итерационного метода на примере.

Пример. Решить методом итераций игру с матрицей (табл. 20).

Таблица 20. Матрица игры 3х3.

	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Решение. В табл. 21 приведены первые 30 шагов процесса итераций. В первом столбце дан номер партии (пары выборов) **k**, во втором – номер **i** выбранной данной партии стратегии игрока А. В последующих трёх столбцах – «накопленный выигрыш» за первые k партий при тех стратегиях, которые применяли оба игрока в предыдущих партиях, при стратегии A_i игрока А в данной партии при стратегиях B_1, B_2, B_3 игрока В в данной партии. Из этих накопленных выигрышей подчеркнут минимальный (если таких минимальных выигрышей несколько, то подчёркиваются они все). Подчёркнутое число определяет собой наивыгоднейшую стратегию игрока В в данной партии – она соответствует той стратегии B_j, для которой достигается минимум накопленного выигрыша (если таких минимумов несколько, берётся любой из них, например, случайным розыгрышем). Номер оптимальной ответной стратегии противника **j** проставляется в следующем столбце. В последующих трёх столбцах приводится накопленный выигрыш за k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока А. Из этих значений двойным подчёркиванием выделено максимальное; оно определяет собой выбор стратегии игрока А в следующей партии (следующей строке таблицы). В дальнейших столбцах таблицы помещаются такие данные:

$\underline{\nu}$ – минимальный накопленный выигрыш игрока B, делённый на число партий k;

$\underline{\underline{\nu}}$ – максимальный накопленный выигрыш игрока A, делённый на число партий k;

$\nu^* = (\underline{\nu} + \underline{\underline{\nu}}) / 2$ –среднее арифметическое. Величина ν^* может служить приближённым значением цены игры.

Таблица 21. Экспериментальные данные розыгрыша.

K	i	B1	B2	B3	j	A1	A2	A3	$\underline{\nu}$	ν*	$\underline{\underline{\nu}}$
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	4.5	9
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4.5	6.75	9
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3.67	4.84	6
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2.75	4.13	5.50
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4.00	5.30	6.60
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4.84	5.17	5.50
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4.43	4.79	5.14
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5.00	5.30	5.61
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4.45	4.78	5.11
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4.90	5.10	5.30
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4.64	4.87	5.09
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5.00	5.20	5.41
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4.61	4.84	5.07
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4.93	5.07	5.21
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4.74	4.90	5.06
16	2	80	80	80	2	77	85	73	5.00	5.16	5.31
17	2	82	89	80	3	86	85	84	4.71	4.89	5.07
18	1	89	91	89	1	93	87	93	4.95	5.06	5.17
19	3	98	91	100	2	95	96	93	4.79	4.93	5.06
20	2	100	100	100	2	97	105	93	5.00	5.15	5.31
21	2	102	109	100	3	106	105	104	4.76	4.90	5.04
22	1	109	111	109	1	113	107	113	4.97	5.05	5.14
23	3	118	111	120	2	115	116	113	4.83	4.94	5.04
24	2	120	120	120	2	117	125	113	5.00	5.10	5.20
25	2	122	129	120	3	126	125	124	4.80	4.92	5.04
26	1	129	131	129	1	133	127	133	4.96	5.04	5.11
27	3	133	131	140	2	135	136	133	4.86	4.95	5.04
28	2	140	140	140	2	137	145	133	5.00	5.10	5.09
29	2	142	149	140	3	146	145	144	4.84	4.94	5.04
30	1	149	151	149	1	153	147	153	4.97	5.04	5.10

Подсчитывая число случаев применения игроком каждой стратегии и деля его на число партий k, получим приближённые значения вероятностей, с которыми применяются стратегии в оптимальной смеси

$S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$; $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$.

Как видно из таблицы 1, величина ν^* незначительно колеблется около цены игры $\nu = 5$. Подсчитывая по таблице 1 частоты применения стратегий A_1, A_2, A_3 в первых 30 партиях, получим:

$P_1^* = 8/30 \approx 0{,}276$; $P_2^* = 15/30 = 0{,}5$; $P_3^* = 7/30 \approx 0{,}233$;

Они оказались довольно близкими к истинным вероятностям:

$p_1 = ¼ = 0{,}25$; $p_2 = ½ = 0{,}5$; $p_3 = ¼ = 0{,}25$;

Аналогично для игрока B находим частоты стратегий B_1, B_2, B_3 в первых 30 партиях:

$q_1^* = 6/30 = 0.2$; $q_2^* = 15/30 = 0.5$; $q_3^* = 9/30 = 0.3$;

Это уже сильнее отличается от решения игры, согласно которому:

$q_1 = 0.25$; $q_2 = 0.5$; $q_3 = 0.25$.

Если противник будет пользоваться смешанной стратегией

$S_B^* = (0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}3)$,

то наш выигрыш (его проигрыш) ≈5,10 (последняя строка в табл. 1), что лишь немного отличается от истинной цены игры 5,0. Заметим, что ставя практическую игровую задачу, мы обычно делаем упрощения и допущения, которые делают излишней погоню за большой точностью решения, так что ориентировочное решение игры, получаемое методом итераций (даже при небольшом числе «партий»), часто может оказаться достаточным.

Таким образом, даже при небольшом числе итераций (k = 30) цена игры и решение находятся с удовлетворительной точностью.

Решение симплекс задач игровым методом

Если игровая модель всегда сводится к паре моделей задач линейного программирования, то обратное утверждение неверно. Рассмотрим перевод задачи линейного программирования к игровой модели.

В общем случае целевая функция $z=\sum c_i * x_i$

Заменой переменных $(c_i * x_i) / z = p_i$ целевая функция приводится к виду $1=\sum p_i$, это основное условие перехода к игровой модели. Так как $p_i \geq 0$, то должно быть выполнено требование $(c_i * x_i) / z \geq 0$ и $z \neq 0$ ввиду невозможности деления на нуль. При $x_i \geq 0$, что обычно ставится одним из условий задач линейного программирования, основным требованием является $\mathrm{sign}(c_i) * \mathrm{sign}(z) \geq 0$. Если условие не выполняется, то можно построить неполную модель игры, принимая отрицательные p_i равными нулю и тем самым полагая равными нулю соответствующие исходные переменные. Неполная модель дает верхнюю оценку целевой функции. Далее будем считать, что требование неотрицательности коэффициентов в целевой функции выполнено. Рассмотрим отдельно задачи на min и max.

Пусть целевая функция $\min z=\sum c_i * x_i$

В ограничения вида

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ &a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ &\ldots \\ &a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n \end{aligned}\right\}$$

Подставим $x_i = (p_i * z) / c_i$, левые и правые части ограничений разделим на z и нормируем ограничения поделив каждое на b_i (по условию b_i положительно определённые коэффициенты). Ограничения с $b_j = 0$ из системы исключаем в дополнительные условия, которым должно удовлетворять конечное решение. Очевидно, что нормировка правой части ограничений может быть выполнена и в начале. В результате получим игровую модель

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{a}_{11}p_1 + \tilde{a}_{21}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{m1}p_m \geq \nu_1 \\ &\tilde{a}_{12}p_1 + \tilde{a}_{22}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{m2}p_m \geq \nu_2 \\ &\ldots \\ &\tilde{a}_{1n}p_1 + \tilde{a}_{2n}p_2 + \ldots + \tilde{a}_{mn}p_m \geq \nu_n \end{aligned}\right\},\ \sum p_i = 1.$$

Учитывая, что в исходной задаче $z \to \min$, то $\eta \to \max$, так что здесь реализуется максиминный критерий для игрока А.

Аналогично для линейной модели на $\max z=\sum c_i * x_i$ с ограничениями вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \le b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \le b_2 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \le b_n \end{array}\right\}$$

Подстановка и нормировка приводят к следующей игровой модели

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a}_{11}q_1 + \tilde{a}_{21}q_2 + \ldots + \tilde{a}_{m1}q_m \le \nu_1 \\ \tilde{a}_{12}q_1 + \tilde{a}_{22}q_2 + \ldots + \tilde{a}_{m2}q_m \le \nu_2 \\ \ldots \\ \tilde{a}_{1n}q_1 + \tilde{a}_{2n}q_2 + \ldots + \tilde{a}_{mn}q_m \le \nu_n \end{array}\right\}, \ \sum q_i = 1.$$

Учитывая, что в исходной задаче z → max, то η → min, так что здесь реализуется минимаксный критерий для игрока B.

Необходимо отметить еще один возможный случай, когда в результирующих неравенствах возможно наличие ограничений разных типов, в этом случае в игровую модель включаются только ограничения одного вида и фактически модель распадается на две, что соответствует разбиению исходной задачи также на два вида экстремума.

Вид экстремума меняется в двойственной задаче с одновременной заменой знака отношений в ограничениях.

Игровая модель (матрица игры) одна и та же как для прямой, так и для двойственной задач, так как решения для игроков как раз и определяют свойство двойственности.

После решения игры (например, методом итераций) определяем решение исходной задачи линейного программирования с помощью восстановления цепочки замены переменных.

Рассмотрим решение на примере известной из раздела линейного программирования задачи:
найти max $z = 2x_1 + 3x_2$
при ограничениях

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \qquad \le 2 \end{array}, \ \forall x_i \ge 0.$$

Сравнивая вид неравенств в ограничениях с игровыми моделями выше, видим, что модель игры нужно строить как минимаксную для игрока B.

Разделим целевую функцию на z и положим ее равной единице, т.е.

$1 = q_1 + q_2$, откуда $\mathbf{x_1=(1/2)\,q_1\,z,\ x_2=(1/3)\,q_2\,z}$ и подстановка в ограничения после нормировки и деления на z даёт следующую игровую модель

$$\begin{array}{l} \frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{18}q_2 \le \nu \\ \frac{1}{16}q_1 + \frac{1}{12}q_2 \le \nu \\ \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{3}q_2 \le \nu \\ \frac{1}{4}q_1 \qquad \le \nu \end{array}, \text{ соответствующая матрица игры } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

На рисунке 5 приведено графическое решение игровой модели.

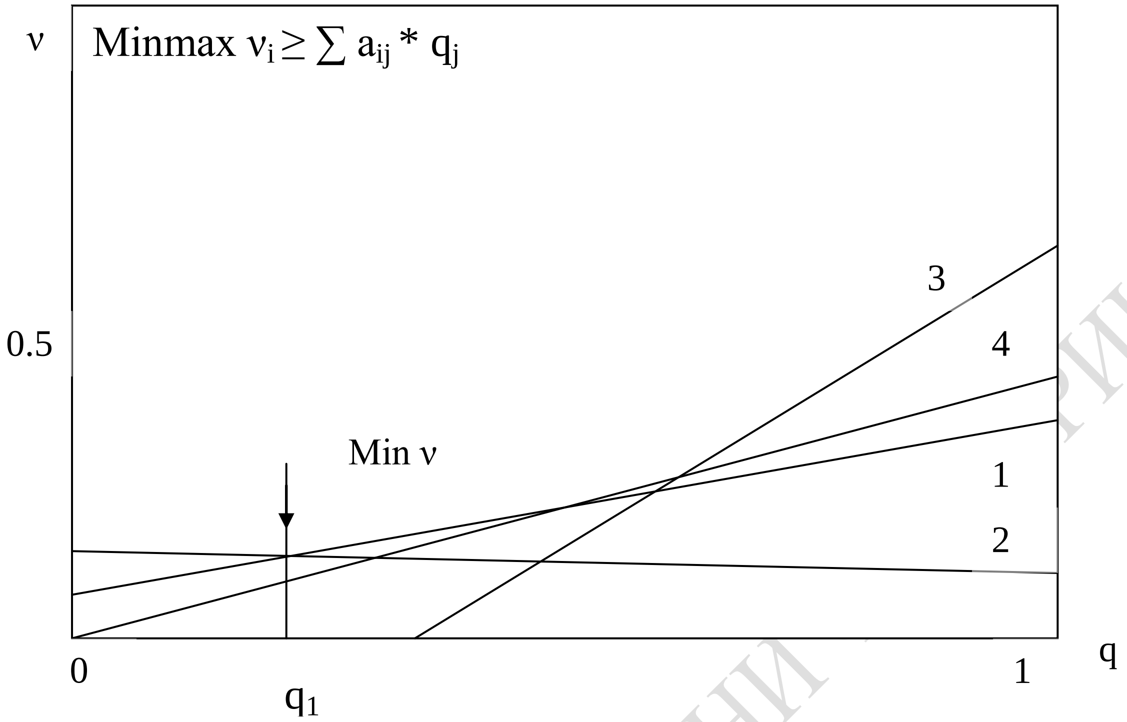


Рис 5. Графическое решение задачи.

Экстремальная точка определяется первым и вторым уравнением. С учетом условия нормировки вероятностей имеем три уравнения для трех переменных. Их решение дает $q_1 = 4/19$ $q_2 = 15/19$, $\nu = 3/38$, обратная подстановка приводит к исходным данным: $x_1 = 4/3$, $x_2 = 10/3$, $z = 38/3$, что совпадает с ранее найденным решением.

Заметим, что результирующая матрица игры состоит всего из двух первых строк.

Рассмотрим теперь двойственную задачу. Модель для нее:

$\min z=6y_1+8y_2+y_3+2y_4$

при ограничениях

$$\begin{matrix} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3 \end{matrix}, \ \forall y_i \geq 0.$$

После нормировки

$$\begin{matrix} y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \geq 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \geq 1 \end{matrix}$$

, т.е. имеем maxmin и модель для игрока А.

Из z $y_1=1/6p_1z$, $y_2=1/8p_2z$, $y_3=p_3z$, $y_4=1/2p_4z$ и подстановка в ограничения после деления на z дает следующие соотношения

$$\begin{matrix} \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{16}p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_4 \geq \nu \\ \frac{1}{18}p_1 + \frac{1}{12}p_2 - \frac{1}{3}p_3 \geq \nu \end{matrix}.$$

Соответствующая матрица игры совпадает с ранее найденной.

Рассмотрим **модель с отрицательными коэффициентами**.

Пусть задана линейная модель в виде:

Min $z = 5x_1-2x_3$,

ограничения $\begin{pmatrix} -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5 \\ -3x_1 + 5x_4 \le 7 \end{pmatrix}$, $\forall x_i \ge 0$.

По виду ограничений соответствующая игровая модель - minmax для игрока B, поэтому вид экстремума нужно изменить. Так как min z = max(-z), то получим целевую функцию в виде max z = -5x$_1$+2x$_3$. Первый коэффициент отрицательный, поэтому адекватную линейной игровую модель построить нельзя. Полагая q_1=0, и, следовательно, x_1=0, получим q_2=0, q_4=0, x_2=0,x_4=0 соответствующая игровая модель

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} q_3 \le \nu \\ \frac{1}{10} q_3 \le \nu \end{matrix} \quad \text{и матрица игры A=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Минимальный проигрыш соответствует нижнему элементу матрицы, решение получено в чистых стратегиях: q_3 = 1, ν = 1/10, max(-z)=10, x_1 =0, x_3=1/2 q_3 * 10 = 5, z = -10.

Подставим найденное решение в исходную систему ограничений:
-x2 + 2*5 ≤ 2, 5 +x4 ≤ 5. Отсюда x_4 =0, x_2 = 8.
Решив задачу симплекс-методом, получим X = (0, 8, 5, 0, 0, 0, 7), min z = -10.

В общем случае нужно помнить, что мы получаем оценку решения.

Заключение

Когда теория игр только развивалась, на неё возлагались большие надежды, так как она могла облегчить выбор решений в конфликтных ситуациях. Но эти надежды оправдались лишь в малой степени. В связи с этим сделаем несколько замечаний.

Первое. На практике редко возникают строго антагонистические конфликты, наиболее часто они встречаются в настоящих играх (шахматах, шашках, картах и других). Вне этих искусственных ситуаций, где одна сторона стремится обратить выигрыш в максимум, а другая - в минимум, таких конфликтов почти не бывает. Оказывается, что теория реальных игр намного сложнее, чем теория игр антагонистических.

Например, в военной области конфликты довольно редко удается свести к парным играм с нулевой суммой. Схема строгого антагонизма применима, как правило, только к операциям малого масштаба, ограниченным по значению.

Первое. Если цели участников конфликта не прямо противоположны, а просто не совпадают, то математическая модель становится много сложнее: мы уже не можем интересоваться выигрышем только одной стороны; возникает так называемая биметрическая матрица, где каждый из участников стремится максимизировать свой выигрыш, а не просто минимизировать выигрыш противника. Теория таких игр гораздо сложнее теории антагонистических игр, а главное, из этой теории не удается получить четких рекомендаций.

Второе. Имеется также критическое замечание по поводу «смешанных стратегий». Если речь идёт о многократно повторяемой ситуации, то оптимальные смешанные стратегии действительно могут повысить выигрыш. Но ведь бывают ситуации, когда надо принять одно-единственное решение, и действовать в этом случае наугад довольно рискованно. Разумно ли будет передоверять свой выбор случаю?

Третье. В теории игр считается, что каждому игроку известны все возможные стратегии противника, не известно лишь, как он ими воспользуется. В реальном конфликте это обычно не так: перечень возможных стратегий противника не известен, решение надо принимать, выйдя за пределы стратегий известных противнику.

В теории игр каждому игроку известны все возможные стратегии противника, неизвестно лишь то, какую из них противник применит в данной партии. В реальном конфликте – другая ситуация: стратегии противника не известны.

Из выше перечисленного видно, что теория игр в качестве основы для выбора решения в конфликтной ситуации имеет много слабых мест, однако она учит выбирать решения в конфликтной ситуации, не забывая о том, что противник тоже мыслит, и действовать, принимая во внимание все его хитрости и уловки

Литература

1. Вентцель Е. С. «Исследование операций»-М.: Наука, 1980
2. Давыдов Э. Г. Исследование операций : Учебное пособие для студентов вузов. - М. : Высш. шк., 1990. - 383 с. : ил.
3. Дегтярев Ю. И. Исследование операций : Учебник для вузов по спец. АСУ.- М. : Высш. шк., 1986.- 320 с.: ил.
4. Таха О.П. «Введение в исследование операций».