

Тема 5 Неопределенность целей и методы устранения неопределенности

Понятие неопределенности целей.

Если одной цели соответствует несколько критериев, то говорят о неопределённости цели. Другие сложности связаны со стохастическим характером некоторых операций (воздействие помех).

Формализация цели (выбор целевой функции) почти всегда трудная проблема.

Например:

«Добиться максимума производства с минимумом затрат», если $f(x)$ – выручка от производства, а $F(x)$ – затраты, то доход $I=f(x) - F(x)$ и его нужно максимизировать увеличивая $F(x)$.

Если критериев много то неопределённость можно разрешить одним из способов (или их комбинированием), рассматриваемых ниже

Положим целевую функцию

$$F(x)=F(f_1(x),\dots,f_N(x))$$

где $f(x)$ – критерий цели и для определённости будем считать $f(x) \rightarrow \max$.

Способы устранения неопределенностей

Комплексная оценка критерия сразу по нескольким показателям затруднительна, поэтому на практике часто искусственно объединяют несколько показателей в один обобщенный критерий. Приемы объединения обычно неформальны (эвристически).

Нередко в качестве такого показателя берут дробь, в числителе стоят показатели, которые надо увеличить, а в знаменателе те, которые надо уменьшить.

Ниже рассмотрены некоторые способы объединения показателей.

1. Линейная свертка

$$F(x) = \max \sum_i c_i f_i(x), \quad \sum c_i = 1, \quad c_i > 0$$

коэффициенты C_i – экспертные оценки о компромиссе частных критериев f_i

Это один из способов ранжирования.

Критерий Лапласа получается при $c_i = \text{const}$, т.е. $c_i = \frac{1}{n}$ – равновероятны.

2. Контрольные показатели

Если есть система нормативов $\{f_i^*\}$, таких что $f_i(x)$ максимизируются при условиях $f_i(x) \geq f_i^*$, то целевую функцию можно представить как

$$F(x) = \min_i \frac{\max f_i(x)}{f_i^*} \equiv \max_i \min \max \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

Здесь максимизируется наихудший из показателей $f_i(x)$.

3. Выделение основного критерия (главного)

Если заданы контрольные показатели $\{f_i^*\}$ и среди критериев можно выделить основной $f_1(x)$ то решается задача:

$$F(x) = \max f_1(x) \text{ при условиях } f_i(x) \geq f_i^*$$

Этот прием самый простой и наиболее употребительный на практике.

4. **Отношение показателей**
$$\max f = \frac{\sum f_i}{\sum f_j}, \quad i \in \{i \rightarrow \max\}, \\ j \in \{j \rightarrow \min\}$$

5. Метод уступок

Пусть показатели расположены в порядке убывающей последовательности по важности. Тогда поиск можно провести последовательно используя метод уступок.

Ищем $\max f_1 = f_1^*$ и делаем уступку $f_1 \geq f_1^* - \Delta f_1$,

ищем $\max f_2 = f_2^*$, делаем уступку $f_2 \geq f_2^* - \Delta f_2$,

ищем $\max f_3 = f_3^*$ и т.д.

Даже небольшая уступка может оказаться существенной, т.к. для устойчивых решений в районе $\max$ обычно эффективность решения меняется слабо, т.е. не нужна большая точность решения задачи.

6. Введение метрики

Введем положительно определенную матрицу $R = (r_{i,j})$ и определим расстояние до точки максимума в пространстве критериев как

$$h = \sqrt{\sum_{i,j} (f_i(x) - f_i^{\wedge}) \cdot r_{i,j} (f_j(x) - f_j^{\wedge})}, \text{ где}$$

$f_i^{\wedge}$ – решение однокритериальной задачи $\max f_i(x) = f_i^{\wedge}$

В частном случае $R=I$; $h = \sqrt{\sum_{i,j} (f_i(x) - f_i^{\wedge})^2}$ – определяет расстояние в евклидовом пространстве критериев.

Задачу можно решить методом итераций.

Компромиссы Парето.

Как отмечалось ранее, многокритериальную задачу можно свести к обычной задаче с одним критерием. Эти способы носят неформальный характер.

Можно попытаться сократить множество исходных вариантов, исключив те, которые заведомо будут плохими. Один из путей предложен итальянским экономистом В. Парето в 1904 г.

Пусть сделан некоторый выбор x^* и пусть существует некоторый другой выбор $x^\wedge$ такой, что для всех критериев $f_i(x)$ имеет место неравенство

$$f_i(x^\wedge) \geq f_i(x^*), i = 1, \dots, n,$$

причем хотя бы одно неравенство строгое. Тогда все векторы x^* удовлетворяющие условию следует исключить из рассмотрения. Имеет смысл подвергнуть анализу только те векторы x^* , для которых не существует $x^\wedge$ такого, что для всех критериев удовлетворяются указанные неравенства. Множество всех таких оставшихся значений x^* называется **множеством Парето**, а вектор x^* называют **неулучшенным вектором результатов** (вектор Парето), (из $f_i(x^\wedge) \geq f_i(x^*)$ для любого i следует эквивалентный $f_i(x^\wedge) = f_i(x^*)$). Выбирать в качестве решения следует только тот вектор x , который принадлежит множеству Парето. Принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив, что облегчает процедуру выбора.

Если помимо критериев $f_i(x)$ есть еще общий критерий $F(x)$, то решение можно довести до конца

$$F(x) \rightarrow \max, x \in P_G(f_1, \dots, f_n),$$

где $P_G(f_1, \dots, f_n)$ – множество Парето для функций f_i на множестве G допустимых векторов x .

Построение множества Парето.

Рассмотрим случай двух критериев

$$f_1(x) \rightarrow \max$$

$$f_2(x) \rightarrow \max$$

Тогда каждому допустимому значению x отвечает точка на плоскости (f_1, f_2) и равенства

$$f_1 = f_1(x), \quad f_2 = f_2(x)$$

определяют параметрическое задание кривой $f_2 = F(f_1)$

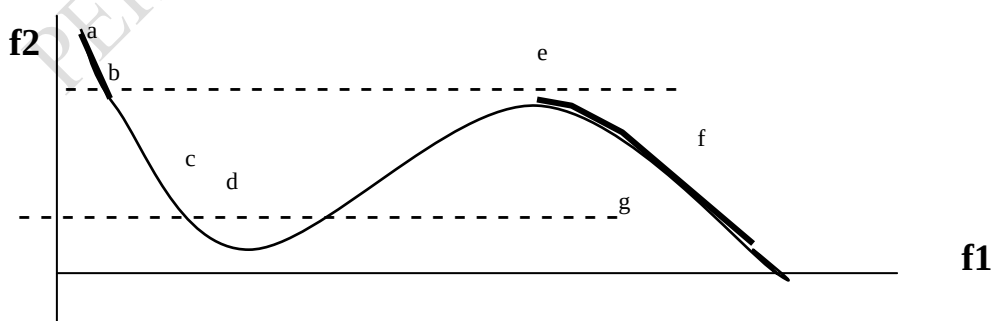


Рис.1. К построению множества Парето

К множеству Парето можно отнести те участки кривой, где критерии f_1 и f_2 имеют разные тенденции возрастания-убывания. Так на участке bd f_1 увеличивается, а f_2 уменьшается и участок подозрителен, участок de соответствует одновременному росту f_1 f_2 и исключается сразу. Участок ed удовлетворяет требованию и поскольку в нем f_1 больше, чем на bd , то участок bde нужно исключить из рассмотрения (принцип Парето). Останется $abeg$, причем точка «b» должна быть исключена, т.к. есть e , где $f_1(e) > f_1(b)$ (выколота точка)

Пусть теперь определено множество допустимых $x \in G_x$, тогда $f \in G_f$ носит название множества достижимости или множества предельных возможностей. Множеством Парето будет лишь часть границы множества достижимости.

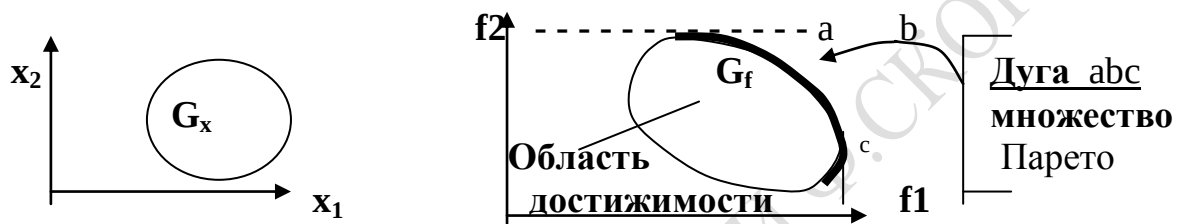


Рис.2. Пояснение к выбору множества Парето.

Приближенное построение множества Парето сводится к последовательному решению задач с дополнительными условиями на принадлежность критерия (критериев) области достижимости.

В случае двух критериев возможна следующая схема:

Решаем две задачи

$$f_1(x) \rightarrow \max$$

$$f_2(x) = C_2$$

$$x \in G_x$$

Точка а

Решение:

$$f_2(x) \rightarrow \max$$

$$f_1(x) = C_1$$

$$x \in G_x$$

Точка

Через две точки проводим прямую – простейшая аппроксимация множества Парето.

Для уточнения множества строится несколько пар решений и через полученные точки проводится ломаная.

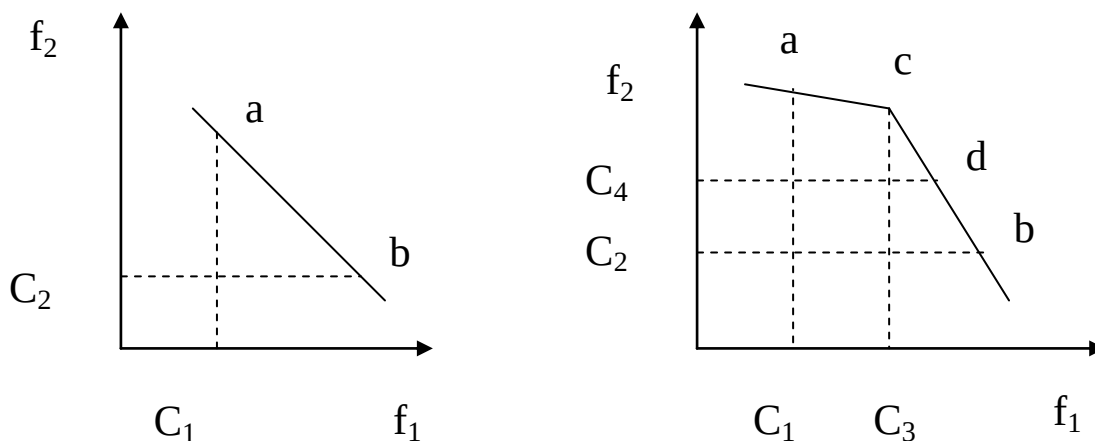


Рис. 3. К построению множества Парето

Другой способ аппроксимации множества Парето заключается в решении задачи

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \rightarrow \max, x \in G_x$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Каждому λ_1^a соответствует некоторый вектор X_a , который определит точку a с координатами $f_1(X_a)$, $f_2(X_a)$.

Если критерии – линейные функции, то решение можно получить и для более общего случая:

$$(\lambda_1 f) = \sum \lambda_i f_i(x) \rightarrow \max x \in G_x$$

$$\sum \lambda_i = 1$$

Если множество Парето не выпукло, то аппроксимация его резко усложняется

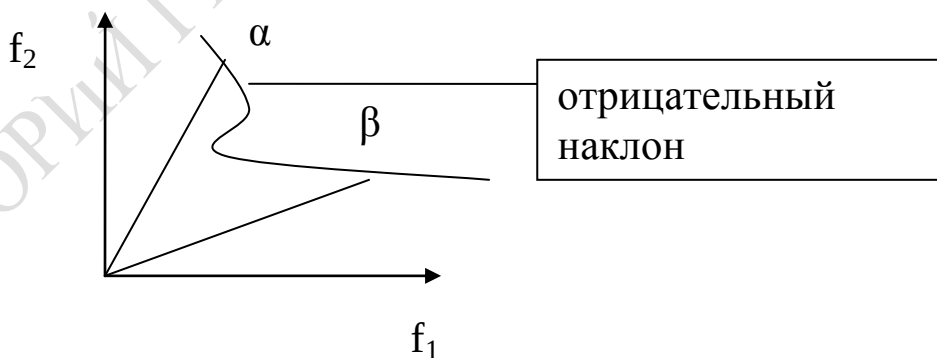


Рис.4. К построению множества Парето

1. Сравнимость критериев в многокритериальной задаче [03,242-254]

Заключение о сравнимости критериев может быть получено на основе информации о предпочтениях лица принимающего решение.

По своему характеру информацию можно разделить на **ординальную** (констатирующую упорядоченность) и **кардинальную** (отражающую степень предпочтительности оценок). Кардинальная информация

подразделяется на информацию о разностях оценок, отношениях оценок и т.п.

Степень достоверности информации связана по степеням затруднений лица при ее предоставлении, чем больше затруднения, тем меньше уверенность в ее достоверности.

Среди различных отношений предпочтения может быть выделен класс таких отношений, для сравнения по которым двух оценок не требуется знания степени близости этих оценок, важен лишь порядок оценок, т.е. знак разностей. Такие соотношения называются **координатными**.

Введем в рассмотрение для оценок x, y следующие векторы

$$\Delta^{xy} = (\Delta_1^{xy}, \Delta_2^{xy}, \dots, \Delta_m^{xy}) - \text{разности.}$$

$$\delta^{xy} = (\delta_1^{xy}, \delta_2^{xy}, \dots, \delta_m^{xy}) - \text{знаки разностей (sgn)}$$

$$\text{где } \Delta_i^{xy} = x_i - y_i,$$

$$\delta_i^{xy} = \text{sgn}(\Delta_i^{xy}) = \begin{cases} 1, & x_i - y_i > 0, \\ 0, & x_i = y_i, \\ -1 & x_i - y_i < 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta_i^{xy} > 0 \\ \Delta_i^{xy} = 0 \\ \Delta_i^{xy} < 0 \end{cases}.$$

Тогда отношения Парето могут быть сформулированы так:

$$xR^0 y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \Delta_i^{xy} \geq 0, \delta^{xy} \text{ нестрогий порядок}$$

$$xI^0 y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \Delta_i^{xy} = 0, \delta^{xy} \text{ равенство}$$

$$xP^0 y \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, m\} \Delta_i^{xy} \geq 0 \wedge (\exists i_0 \in \{1, \dots, m\} \Delta_{i_0}^{xy} = 1)) \text{ строгий порядок,}$$

$$\text{где } R^0\text{-отношение предпочтения } xR^0 y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} x_i \geq y_i$$

I^0 -отношение равнозначности (симметричная часть R)

$$xI^0 y = yI^0 x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} x_i = y_i$$

P^0 -отношение асимметричности (строгое отношение Парето)

$$xP^0 y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} x_i \geq y_i \wedge (\exists i_0 \in \{1, \dots, m\} x_{i_0} > y_{i_0})$$

$$R^0 = P^0 \cup I^0, P^0 \cap I^0 = 0, xR^0 \Leftrightarrow xI^0 y \vee xP^0 y. \quad P^0 \cup I^0 \cup R^0 \leq R.$$

Вопросы для изучения

Понятие неопределенных целей. Комплексная оценка критериев.
Способы устранения неопределенностей. Понятие обобщенного критерия.
Вычисление показателей. Метод уступок. Линейная свертка, критерий Лапласа. Контрольные показатели, выделение основного критерия, введение метрики.
Компромиссы Парето. Построение множества Парето.
Сравнение критериев в многофункциональной задаче.
«Природная» неопределенность. Принципы гарантированного результата.
Критерии оценки цели в случае неопределенного параметра.
Критерий Лапласа, Гурваца, Вальда, Сэвиджа, субъективная (экспертная) оценка.
Метод средних значений.
Случай искусственного противодействия. Ситуации равновесия. Понятие о седловой точке.
Принцип Неша.