

О. В. Пугачева

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
Для студентов 3 курса экономического факультета

[illegible]

УД 8298
Установа адукацыі
"Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя Францыска Скарыны"
БІБЛІЯТЭКА

ПРАВЕРНА

Гомель 2006

Рецензенты:	
В. Л. Мережа, доцент, кандидат физико-математических наук;	Введение.....4
Л. А. Иоффе, доцент, кандидат экономических наук	Содержание дисциплины.....6
Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»	Теоретические основы метода моделирования.....8
Пугачева О. В.	Методы решения задач оптимального планирования деятельности предприятия.....32
Экономико-математические методы и модели	Тема 1 Графический метод решения задач оптимального планирования.....32
практическое пособие для студентов экономических специальностей вузов / О. В. Пугачева; М-во образования РГ	Тема 2 Решение задач оптимального планирования симплекс – методом.....40
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель: ГТУ им. Ф. Скорины, 2006. – 108 с.	Модели исследования операций.....52
ISBN 985-439-179-5	Тема 1 Игровые методы и модели их использования.....52
	Тема 2 Сетевые модели.....69
	Литература.....107

В пособии в логической последовательности приводится механизм организации собственного дела: раскрыты формы предпринимательства, права и обязанности предпринимателя, показана последовательность практической реализации собственного дела – регистрации предпринимателя, лицензирования деятельности, порядок получения субсидий, открытие счета в банке. Приведены образцы документов, необходимые для осуществления собственного дела. Особое место отведено методическим вопросам. Пособие рассчитано не только для тех, кто хочет реализовать себя как предпринимателя, но и студентов вузов и ссузов.

УДК 330.4 (075.8)
ББК 65в641я73

ISBN 985-439-186-8

© О. В. Пугачева, 2006
© УО «ГТУ им. Ф.Скорины», 2006

Введение

Развитие информационных технологий, прикладной математики и проникновение ее методов в другие отрасли знаний составляют одну из главных черт современного этапа развития общества. Причиной развития и широкого применения на практике экономико-математического моделирования послужило усложнение экономических процессов и систем управления ими. Принимаемые в сфере хозяйственной деятельности решения уже не могут основываться только на опыте и интуиции. С помощью экономико-математического моделирования решаются разнообразные задачи управления и выработки оптимальных решений: распределительные задачи различных классов, задачи управления запасами, ремонта и замены оборудования, проектирования сетей и выбора маршрутов и т.д.

Целью практического пособия по изучаемому курсу является помощь в овладении студентами навыками применения экономико-математических моделей и методов для решения практических задач, экономико-математического анализа полученных результатов, а также технологии выработки на этой основе управленческих решений.

Контрольные работы по курсу включают выполнение пяти заданий: а) построение экономико-математических моделей задач распределения; б) решение задач распределения графическим методом; в) решение задач распределения симплекс-методом и экономическая интерпретация результатов решения; г) использование игровых моделей в принятии управленческих решений; д) построение сетевых графиков и расчет их временных параметров.

Задание к самостоятельным и контрольным работам составлено в 35 вариантах, которые распределены по пяти шифрам. Студенты выполняют самостоятельные и контрольные работы в зависимости от шифра задания (по указанию преподавателя) и первой буквы фамилии, в соответствии с данными таблицы 1.

Таблица 1 – Данные

	Варианты				
	Шифры заданий				
	0 - 5	1 - 6	2 - 7	3 - 8	4 - 9
А, З, П, Ц	1	8	15	22	4
Б, И, Р, Ч	2	9	16	23	5
В, К, Ц, Ш	3	10	17	24	6
Г, Д, Т, Щ	4	11	18	25	7
Д, М, У, Э	5	12	19	1	8
Е, Н, Ф, Ю	6	13	20	2	9
Ж, О, Х, Я	7	14	21	3	10

Результаты решения задач должны быть оформлены в соответствии с рассматриваемыми примерами решения аналогичных задач в данном пособии.

При решении задач распределения симплекс-методом рекомендуется использовать следующую литературу:

Нарышев, Г.А. Основы исследования операций. Методическое пособие по курсу "Основы исследования операций"/ Г.А. Нарышев – Гомель, ГТУ им. Ф. Скорины. - 1979. - 49 с.

Нарышев, Г.А. Сборник задач по курсу "Основы исследования операций"/ Г.А. Нарышев, Н. В. Овчинникова, В. И. Громов – Гомель, ГТУ им. Ф. Скорины. - 1981. - 44 с.

При решении игровых задач дополнительно рекомендуется использовать следующие методические рекомендации:

Пугачева, О.В. Методические указания по решению задач по курсу «Исследование операций и методы оптимизации»/ О.В. Пугачева – Гомель, ГТУ им. Ф. Скорины. -1988.-36 с.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1 Теоретические основы метода моделирования

Тема 1 Теоретические основы метода моделирования

Общая характеристика экономико-математических методов, понятие модели и характеристика ее основных элементов. Классификация экономико-математических моделей. Система экономико-математических моделей оптимального планирования и управления в отраслях народного хозяйства. Содержание моделей и методик их построения. Унификация символики и записи моделей. Содержание и построение числовых моделей (матриц экономико-математических задач). Основные этапы экономико-математического моделирования. Информационное и математическое обеспечение экономико-математических задач.

Тема 2 Основные типы и система экономико-математических моделей

Основные признаки задач распределения. Экономико-математическая модель собственно задач распределения. Экономико-математические модели транспортной задачи. Экономико-математическая модель задачи о раскрое. Экономико-математическая модель задачи о смеси. Экономико-математическая модель задачи о назначении.

2 Математические модели планирования и анализа деятельности предприятия

Тема 1 Методы решения задач оптимального планирования деятельности предприятия

Модель задачи оптимального планирования (задачи линейного программирования (ЛП)). Способы преобразования модели

задачи ЛП в канонический вид. Графический метод решения задач оптимального планирования.

Прямой алгоритм симплекс-метода. Двойственность в ЛП. Двойственный симплекс-метод.

Тема 2 Модели оперативного управления

Характеристика задач упорядочения. Постановка задачи упорядочения. Формы представления расписаний. Методы решения задач оперативного управления. Постановка задачи упорядочения и метод ее решения для одного станка. Алгоритм Джонсона решения задач упорядочения для двух станков. Алгоритм решения задачи упорядочения для трех станков.

3 Модели исследования операций

Тема 1 Игровые методы и модели и их использования

Основные понятия теории игр. Понятие конфликтной ситуации, игры, классификация игр. Стратегические игры, цена игры. Решение матричных игр методами линейного программирования. Игры с природой. Основные понятия теории статистических решений. Критерии выбора решений в условиях неопределенности

Тема 2 Сетевые модели

Понятие сетевой модели, событий и работ. Порядок и правила построения сетевого графика. Расчет временных параметров сетевого графика. Расчет параметров событий сетевого графика. Расчет параметров работ сетевого графика. Анализ сетевого графика. Коэффициент напряженности работ. Определение потребности в трудовых ресурсах. Правила построения календарного графика. Определение потребности в трудовых ресурсах на основе календарных графиков.

Тема 3 Модели управления запасами и сбытом готовой продукции

Экономические предпосылки необходимости оптимизации материальных запасов. Типы затрат, учитываемых при управлении запасами. Модели определения оптимального размера партии. Модели определения оптимального размера партии при известном спросе. Модели определения оптимального размера партии при вероятностном спросе.

Тема 4 Имитационное моделирование экономических процессов

Особенности и принципы построения имитационных моделей. Реализация моделей на ЭВМ.

1 Теоретические основы метода моделирования

Тема 1 Теоретические основы метода моделирования

- 1.1 Понятие модели и моделирования.
- 1.2 Классификация экономико-математических моделей.
- 1.3 Основные этапы экономико-математического моделирования.

Тема 2 Основные типы и система экономико-математических моделей

- 2.1 Экономико-математическая модель собственно задач распределения.
- 2.2 Экономико-математические модели транспортной задачи.
- 2.3 Экономико-математическая модель задачи о раскрое.
- 2.4 Экономико-математическая модель задачи о смеси, экономико-математическая модель задачи о назначении.

Основные этапы экономико-математического моделирования

Процесс экономико-математического моделирования экономических ситуаций можно разбить на следующие этапы:

- 1 Идентификация проблемной ситуации.
- 2 Выбор неизвестных величин.
- 3 Словесная формулировка критерия оптимальности и ограничений задачи.
- 4 Введение обозначений для неизвестных и известных величин.
- 5 Формализация: запись целевой функции и ограничений в принятых обозначениях.
- 6 Запись математической модели в численном виде.
- 7 Выбор метода решения задачи.
- 8 Численное решение задачи.
- 9 Интерпретация полученных результатов в терминах содержательной постановки задачи.

Примеры выполнения заданий

Задания:

1 Полосы листового проката длиной 200 см необходимо разрезать на заготовки трех типов: А, Б и В длиной соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие нужно по 4 заготовки типов А и Б и 5 заготовок типа В.

Определить, какое количество полос проката необходимо разрезать тем или иным способом для получения требуемого количества изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

Решение. Рассмотрим возможные способы раскроя одной полосы на заготовки заданных типов. Для составления целевой функции, выражающей суммарную величину отходов, подсчитаем величины отходов при раскрое одной полосы по каждому из способов. При первом способе отходы от каждой полосы со-

ставят $200 - 57 \times 3 = 29$ (см), при втором способе - $200 - (5 \times 2 + 82) = 4$ (см) и т.д. Полученные результаты сведем в таблицу 2.

Таблица 2 — Способы раскроя

Способ раскроя	Количество заготовок типа			Отходы (см)	План раскроя
	А	Б	В		
1	3	-	-	29	x_1
2	2	1	-	4	x_2
3	1	-	1	42	x_3
4	-	2	-	36	x_4
5	-	1	1	17	x_5
Количество заготовок	200	200	250		

Для производства 50 изделий необходимо $4 \times 50 = 200$ заготовок типа А, $4 \times 50 = 200$ заготовок типа Б и $5 \times 50 = 250$ заготовок типа В.

Введем следующие обозначения:

j — индекс способа раскроя;

i — индекс типа заготовки;

x_j — количество полос, раскраиваемых j -м способом, $j = 1, n(n = 5)$;

a_{ij} — количество заготовок i -го типа, получаемое при j -м способе раскроя, $i = 1, m(m = 3)$;

C_j — отходы при раскрое одной полосы j -м способом раскроя;

B_i — требуемое количество заготовок i -го типа.

В принятых обозначениях целевая функция задачи, выражающая минимум суммарной величины отходов при всех способах раскроя, будет иметь вид:

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \min$$

Ограничения задачи, показывающие общее количество заготовок каждого типа, которое необходимо получить при раскрое, будут иметь вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = B_i, \quad i = 1, m.$$

$j=1$

Обязательным является ограничение на неотрицательное значение количества раскраиваемых каждым способом сходных полос листового проката:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, n.$$

Если раскрыть знаки сумм и проставить значения индексов, математическая модель задачи будет иметь вид:

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4 + C_5 x_5 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_{15} x_5 = B_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5 = B_2,$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_{35} x_5 = B_3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Подставив численные значения используемых величин, получим следующую математическую модель задачи:

$$Z = 29x_1 + 4x_2 + 42x_3 + 36x_4 + 17x_5 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200,$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 = 200,$$

$$x_3 + x_5 = 250,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Решив задачу симплекс-методом, получим следующее оптимальное решение: $x_1 = 0, x_2 = 50, x_3 = 100, x_4 = 0, x_5 = 150, Z = 6950$ (см). То же значение целевой функции получается и при другом плане раскроя: $x_1 = 50, x_2 = 0, x_3 = 50, x_4 = 0, x_5 = 200$.

2 Составить оптимальный суточный рацион кормления на

стойловый период для дойных коров живой массой 500 кг и точным удоем 32 кг. На одну голову в сутки требуется не менее 22 кг кормовых единиц и 2502 г перевариваемого протеина. Рацион составляется из трех видов кормов: комбикорма, сена и силоса.

Содержание питательных веществ в единице каждого вида корма и себестоимость кормов показаны в таблице 3.

Согласно физиологическим особенностям животных в рационе должно содержаться не менее 30% концентратов и не более 25% грубых кормов от общей потребности в кормовых единицах.

Критерием оптимальности считается минимум себестоимости рациона.

Таблица 3 – Исходные данные

Показатели	Содержание питательных веществ на 1 кг корма		
	комбикорм	сено	силос
Кормовые единицы, кг	1	0,5	0,2
Перевариваемый протеин, г	160	60	30
Себестоимость 1 кг корма, усл. ден. ед.	14	3	2

Решение. Введем следующие обозначения:

i – индекс вида корма;

j – индекс вида питательного вещества;

x_i – искомое содержание i -го корма в рационе;

C_i – себестоимость 1 кг i -го корма;

a_{ij} – содержание j -го питательного вещества в кг i -го корма;

B_j – количество j -го питательного вещества, необходимо-

димое для нормального развития животного;

d_i – необходимое количество i -го корма в рационе.

В принятых обозначениях математическая модель задачи имеет вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m C_i x_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq B_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$i = \overline{1, m}$

$$x_i \geq d_i, \quad i = 1,$$

$$x_i \leq d_i, \quad i = 2,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 2, 3$$

Если раскрыть знаки сумм и проставить значения индексов, математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\min Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

при ограничениях

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \geq B_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geq B_2,$$

$$x_1 \geq d_1, \quad x_2 \leq d_2, \quad x_3 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

В численном виде математическая модель задачи имеет вид

$$\min Z = 14x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

при ограничениях на содержание питательных веществ в рационе

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 \geq 22,$$

$$0,16x_1 + 0,06x_2 + 0,03x_3 \geq 2,502,$$

а также условиях по содержанию концентратов (не менее, чем $22 \times 0,3 = 6,6$ кг), и грубых кормов (не более, чем $22 \times 0,25 = 5,5$ кг) в рационе

$$x_1 \geq 6,6;$$

$$x_2 \leq 5,5;$$

$$x_3 \geq 0;$$

$$x_3 \geq 0.$$

3 В хозяйстве за время уборки при заготовке силоса необходимо перевезти 4000 т зеленой массы с пяти полей к четырем фермам. Имеющееся количество зеленой массы на каждом поле, потребность в зеленой массе каждой фермы, а также стоимость перевозки зеленой массы между полями и фермами приведены в таблице 4.

Требуется составить такой план перевозки зеленой массы, при котором общая стоимость перевозки была бы минимальной.

Таблица 4 – Исходные данные

Ферма	1	2	3	4
Поле	600	800	1400	1200
1	600	5	6	2
2	240	9	7	4
3	1360	7	1	4
4	1000	5	2	2
5	800	6	4	3

Решение. Введем следующие обозначения:

x_{ij} – количество зеленой массы, перевозимое с i -го поля к j -й ферме;

C_{ij} – стоимость перевозки зеленой массы с i -го поля к j -й ферме;

a_i – количество зеленой массы на i -м поле;

B_j – потребность в зеленой массе j -й фермы.

В общем виде математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = B_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Развернутый вид модели:

$$\min Z = C_{11} x_{11} + C_{12} x_{12} + C_{13} x_{13} + C_{14} x_{14} + C_{21} x_{21} + C_{22} x_{22} + C_{23} x_{23} + C_{24} x_{24} + C_{31} x_{31} + C_{32} x_{32} + C_{33} x_{33} + C_{34} x_{34} + C_{41} x_{41} + C_{42} x_{42} + C_{43} x_{43} + C_{44} x_{44} + C_{51} x_{51} + C_{52} x_{52} + C_{53} x_{53} + C_{54} x_{54}$$

при ограничениях:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = B_1,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = B_2,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = B_3,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = B_4,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = a_4,$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = a_5,$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

Математическая модель в численном виде записывается следующим образом:

$$\text{найти } \min Z = 5x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 9x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} + 7x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} + 5x_{41} + 2x_{42} + 2x_{43} + 4x_{44} + 6x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53} + 4x_{54}$$

при ограничениях:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 600,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 800,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1400,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1200,$$

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 600, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 240, \\x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1360, \\x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1000, \\x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} &= 800.\end{aligned}$$

В результате решения задачи получаем следующий план перевозок:

$$x_{31} = 560, x_{41} = 40, x_{32} = 800, x_{23} = 240, x_{13} = 960, x_{53} = 200, x_{54} = 600, x_{34} = 600, Z = 12000.$$

Задания:

1 Для выпуска продукции определенного вида используются два способа. Известны общее количество ресурсов В и А и затраты на единицу продукции при каждом способе (таблица 5).

Таблица 5 – Исходные данные

Ресурсы	Общее количество ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции	
		При 1 способе	При 2 способе
А	24	5	3
В	12	2	3

Максимизировать выпуск продукции при данном объеме ресурсов.

2 При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). В таблице 6 приведены данные о содержа-

нии указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и стоимости (тыс. руб./кг) этих продуктов. Определить оптимальный рацион из условия минимума стоимости.

Таблица 6 – Исходные данные

Компонент Продукты	Количество кормовых единиц	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Фосфор (г/кг)	Себестоимость (тыс. руб./кг)
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

3 Из листов размером 4 x 12 м выкроить заготовки прямоугольной формы размерами 3 x 3 и 2 x 3 метра и составить 90 эмблем, в каждый из которых входит 2 детали первого вида 10 деталей второго. Определить, сколько листов и по какому варианту раскроить, чтобы использовать при этом минимальное количество листов.

4 Определить минимальное количество сырья, необходимого для производства двух видов продукции в объеме 85 единиц первого вида и 150 единиц второго вида при использовании двух технологических способов.

Нормы получения продукции из единицы сырья при каждом технологическом способе приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Исходные данные

Продукция	Технологические способы	
	1 способ	2 способ
1-й вид продукции	2	1
2-й вид продукции	3	6

5 Определить минимальное количество сырья, необходимо для изготовления 26 изделий А и 96 изделий Б, используя четыре технологические способа. Нормы выхода продукции из единицы сырья заданы в таблице 8.

Таблица 8 – Исходные данные

Изделия	Нормы выхода продукции из единицы сырья при технологических способах			
	1	2	3	4
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

6 В сплаве должно содержаться не менее 8 единиц химического элемента А, 21 единицы – элемента Б и 16 единиц – элемента В. Предприятие закупает металлический лом двух видов: 1 и 2. В таблице 9 указано содержание химических элементов в ломе каждого вида и цена единицы лома. Минимизировать расходы при закупке необходимого предприятия металлического лома.

Таблица 9 – Исходные данные

Химические элементы	Содержание элементов в единице веса лома	
	1	2
А	1	5
Б	12	3
В	4	4
Цена единицы лома, ден.ед.	5	2

7 Для производства столов и стульев имеются ресурсы трех видов: доски 1-го типа – 500 м, доски 2-го типа – 290 м и трудовые ресурсы 440 чел.-ч. От реализации столов организация получает прибыль в размере 12 у.д.е., стульев – 5 у.д.е. Затраты ресурсов на единицу изделия представлены в таблице 10.

Таблица 10 – Исходные данные

	Столы	Стулья
Доски 1-го типа, м	5	1
Доски 2-го типа, м	2	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2

Определить выпуск продукции при максимальной прибыли.

8 В два пункта А и В прибыло 30 вагонов с некоторым грузом, по 15 вагонов в каждый пункт. Все вагоны требуется доставить в пункты потребления С и Д, причем в пункт С необходимо доставить 10 вагонов, а в пункт Д – 20. Известно, что транспортировка одного вагона из пункта А в пункты С и Д стоит соответственно 1 и 3 денежные единицы, и из пункта В соответственно 2 и 5 единиц. Определить план перевозок, минимальную стоимость.

9 Для изготовления двух видов продукции используется два вида сырья, нормы расхода сырья на единицу каждого вида продукции и стоимость единицы продукции указаны в таблице 11.

Таблица 11 – Исходные данные

Сырье	Ресурсы сырья	Нормы сырья на единицу продукции	
		A	B
1	24	2	1
2	12	1	2
3	30	3	0
Стоимость единицы продукции, у. д. е.		8	3

Максимизировать выпуск продукции.

10 В сплав может входить не менее 4 % никеля и не более 80 % железа. Для составления сплава используется три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимости различных видов сырья и процентов содержания в нем соответствующих компонентов сплава представлены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные

Компоненты сплава	Содержание компонентов для вида сырья, %		
	1	2	3
Железо	70	90	85
Никель	5	2	7
Прочие	25	8	8
Стоимость сырья, у. д. е./кг	6	4	8

Определить состав сырья, минимизирующий стоимость.

11 Цех выпускает три вида изделия. Производственные возможности цеха характеризуются данными:

- а) суточный фонд рабочего времени оборудования – 780 ч;
- б) суточный расход сырья – 850 т;
- в) суточный расход электроэнергии – 790 кВт.ч;

Нормы затрат ресурсов на единицу продукции представлены в таблице 13.

Таблица 13 – Исходные данные

Данные	Изделия		
	1 вида	2 вида	3 вида
оборудование, ч	2	3	4
сырье, т.	1	4	5
электроэнергия, кВт.ч	3	4	2

Оптовая цена изделия 1 – 8 у.д.е., изделия 2 – 7 у.д.е., изделия 3 – 6 у.д.е.. Максимизировать объем выпуска продукции.

12 Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок двух типов А и В для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется 2 заготовки типа А и 10 заготовок типа В. Возможны четыре варианта раскроя одного листа проката. Количества заготовок А и В, получаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, иходы от раскроя указаны в таблице 14.

Таблица 14 – Исходные данные

Варианты раскроя	Заготовки, шт.		Отходы от раскроя
	А	В	
1	4	0	12
2	3	3	5
3	1	9	3
4	0	12	0

Какое количество листов проката нужно раскроить каждым вариантом для изготовления 90 штук изделия, чтобы отходы раскроя были минимальными.

13 Для изготовления изделий А, В, С и Д имеется 16 единиц ресурса первого вида, 110 единиц ресурса второго вида и 1 единица ресурса третьего вида. Стоимость единицы изделия А – 60 у.д.е., изделия В – 70 у.д.е., изделия С – 120 у.д.е. и изделия Д – 130 у.д.е. Определить максимальный выпуск продукции, если затраты ресурсов на единицу каждого ее вида следующие (таблица 15).

Таблица 15 – Исходные данные

Вид ресурса	Затраты ресурсов на единицу изделия			
	А	В	С	Д
1	1	1	1	1
2	6	5	4	3
3	4	6	10	13

14 Составить наиболее дешевый рацион из трех веществ. 11 единицы вещества В и 32 единицы вещества С. Вещества состав рациона должно входить не менее 12 единиц вещества А. Вещества А – 1 единица, вещества В – 3 единицы и С – 4 единицы, во втором продукте соответственно

15 Для производства четырех видов продукции затрачивается три вида ресурсов А, В и С. Затраты ресурсов на единицу продукции заданы в таблице. Известно, что от реализации первого вида продукции предприятие получает прибыль 3 у.д.е., второго – 4 у.д.е., третьего – 3 у.д.е. и четвертого – 1 у.д.е. Определить, какие виды продукции предприятие должно производить в каком объеме, чтобы получить максимум дохода, если предприятие имеет ресурса А – 12 единиц, В – 8 единиц, С – 48 единиц (таблица 17).

Таблица 16 – Исходные данные

Вещества	Продукты		
	1	2	3
А	1	1	2
В	3	2	1
С	4	3	2

Таблица 17 – Исходные данные

Ресурсы	Продукция			
	1	2	3	4
А	2	4	0	8
В	7	2	2	6
С	5	8	4	3

16 В смесь должно входить не менее 12 единиц вещества А, 11 единицы вещества В и 32 единицы вещества С. Вещества А – 1 единица, вещества В – 3 единицы и С – 4 единицы, во втором продукте соответственно

1 - 2 - 3 и в третьем продукте 2 - 1 - 2. В каком количестве должны входить продукты в смесь, чтобы стоимость ее была минимальной, если учесть, что весовая единица первого продукта стоит 20 у.е., второго - 20 у.е., третьего - 10 у.е. (таблица 18).

Таблица 18 - Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат сырья на единицу продукции		
	A	B	C
1	5	7	4
2	10	5	20
3	5	2	1
4	2	1	1

17 Необходимо из имеющегося сырья выпустить не менее изделий А, 8 изделий Б, 60 изделий В. Известно, что из 2 единиц сырья первого вида и 1 единицы сырья второго вида получается одно изделие А, из 2 единиц сырья первого вида и 4 единиц второго вида - изделие Б, из 10 единиц сырья первого вида - второго и 2 единиц третьего получается одно изделие В. Единица сырья первого вида стоит 5 у.е., второго - 4 и третьего - 2 у.е. Определить затраты сырья каждого вида на производство всех изделий, минимизируя его общую стоимость.

18 Из листов материала размером 6 x 13 метров необходимо получить заготовки двух типов: типа А размером 4 x 5 метра 800 штук и типа В размером 2 x 3 метра в количестве 400 штук. Составить план раскроя, при котором суммарные отходы были бы минимальными.

21 Составить наиболее дешевую смесь из трех веществ. В состав смеси должно входить не менее 6 единиц химического вещества А, не менее 8 единиц вещества В и не менее 12 единиц вещества С. Имеется три вида продуктов (1, 2, 3), содержащих эти химические вещества в следующих количествах (таблица 19).

Таблица 19 - Исходные данные

Вещества	Продукты		
	1	2	3
A	2	1	3
B	1	2	2
C	3	4	2

19 На предприятии имеется 400 тыс. литров алкилата, 2 тыс. литров крекин-бензина, 350 тыс. литров бензина прямой перегонки и 100 тыс. литров изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: А - 2:3:5:2, бензина Б - 4:1:2 и бензина С - 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. литров бензина А равна 110 у.е., бензина Б - 100 у.е., бензина С - 150 у.е. Определить план смешивания компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

Стоимость одной весовой единицы продукта 1 - 2 у.е., продукта 2 - 3 у.е., продукта 3 - 2,5 условных денежных единицы.

20 Имеется четыре вида сырья: первого - 24 единицы, второго - 80, третьего - 10 и четвертого - 6. Из этого сырья производится три вида продукции: А, В и С. Определить, сколько продукции каждого вида необходимо производить из имеющегося сырья для получения максимального дохода, если прибыль с

22 На рынок в город привозят одним видом транспорта картофель по 12 у.е., 11 у.е. и 9 у.е. за килограмм из 1, 2 и 3 автобусов соответственно. На погрузку тонны картофеля ленточ-

ним методом требуется: в первом совхозе – 1 мин, во втором – 2 мин, в третьем – 3 мин. Для своевременного поступления продукции на рынок необходимо, чтобы на погрузку 12 т. трех населению города на каждый день, затрачивалось не более 40 мин. Сколько надо привозить картофеля из этих совхозов, чтобы общая стоимость картофеля на рынке была минимальной, если известно, что 1 совхоз может ежедневно отправлять не более 10 т, 2 совхоз – не более 8 т, 3 совхоз – не более 6 т?

Таблица 21 – Исходные данные

Тип станка	Затраты времени на изготовление 1 изделия				
	А	Б	В	Г	Д
1	3	1	2	1	1
2	2	1	1	1	4
Стоимость одного изделия, ден.ед.	1	1	3	2	1

23 Для изготовления изделий А, Б, В, Г используется три вида ресурсов. Затраты ресурсов на единицу продукции и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице. Определить, сколько и какой продукции надо выпустить, чтобы получить максимальную прибыль (таблица 20).

Таблица 20 – Исходные данные

Вид ресурса	Количество ресурса	Нормы затрат ресурсов на ед. продукции			
		А	Б	В	Г
1	60	3	5	2	4
2	400	22	14	18	30
3	128	10	14	8	16
Прибыль, ден.ед.		30	25	56	48

24 На двух станках разного типа необходимо изготовить пять видов изделий. Известны затраты времени на изготовление одного изделия на каждом станке и стоимость обработки единицы изделия (таблица 21).

Сколько изделий каждого типа будет изготовлено, если фонд времени 1-го станка 200 часов, 2-го – 300 часов. Фонд времени станков должен быть использован полностью, при этом необходимо добиться минимальной стоимости обработки.

25 Составить план производства четырех деталей на участке, располагающем тремя группами оборудования. Добиться при этом минимальной стоимости изготовления деталей. Исходные данные указаны в таблице 22.

Запланированный объем производства деталей – 5300 у.д.е. Оборудование должно быть загружено полностью.

Таблица 22 – Исходные данные

Группы станков	Время на обработку одной детали				Полезный фонд времени в планируемом периоде
	1	2	3	4	
А	4	2	0	1	800
Б	2	0	2	1	700
В	2	2	2	0	740
Себестоимость изготовления детали в у.д.е.	9	6	8	7	
Цена одного изделия, у.д.е.	12	9	10	11	

26 Груз, находящийся в пунктах А и В, необходимо перевезти в пункты С и Д. В пунктах А и В имеются грузы соответственно на 6 и 4 машины. В пункты С и Д надо отправить соответственно 3 и 7 машин груза. Расстояния между пунктами заданы следующей матрицей (таблица 23).

Таблица 23 — Исходные данные

	С	Д
А	80	30
В	60	90

Требуется спланировать перевозки так, чтобы суммарный пробег машин был наименьшим.

27 Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь — 100 ед., труд — 120 ед., тяга — 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: 1, 2, 3, 4. Затраты на производство единицы каждого вида продукции и доход от их производства указаны в таблице 24.

Таблица 24 — Исходные данные

Продукция	Затраты на единицу продукции			Доход
	площадь	труд	тяга	
1	2	2	2	1
2	3	1	3	4
3	4	2	1	3
4	5	4	1	5

Определить план производства продукции, дающий максимальную сумму дохода.

28 Из листового материала размером 5 х 12 м необходимо получить заготовки трех типов: типа А размером 4 х 8 м в количестве

500 штук, типа В размером 1 х 4 м в количестве 1000 штук, типа С размером 2 х 6 м в количестве 100 штук. Составить план раскроя, минимизирующий расход исходного материала.

29 Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют соответственно 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида в кг, необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации, приведены в таблице 25.

Таблица 25 — Исходные данные

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 изделий	
	свитера	кофточки
Шерсть	4	2
Силон	2	1
Нитрон	1	1
Прибыль, ден.ед.	6	5

Определить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

30 Из листов стали размером 5 х 10 м выкроить детали двух видов, одну размером 3 х 6 м, другую размером 2 х 4 м. Из выкроенных деталей составить 60 комплектов, в каждый из которых входит 2 детали первого вида и 3 второго. Определить, сколько листов и по какому варианту нужно раскроить, чтобы минимизировать отходы.

31 Из листов стали размером 6 х 13 м выкроить детали двух видов, одну размером 4 х 5 м, другую размером 2 х 3 м. Деталей первого вида необходимо получить 800 штук, а деталей второго вида — 400 штук. Определить, сколько листов и по какому варианту

анту нужно раскроить, чтобы минимизировать отходы, предварительно составив варианты раскроя целых листов на детали.

Таблица 27 – Исходные данные

Показатели	Трудоемкость изготовления деталей, час			Фонд времени рабочих, час
	А	Б	В	
1 рабочий	6	8	10	180
2 рабочий	4	4	7	180
3 рабочий	12	16	21	160
Цена детали, тыс. руб.	6	15	28	

32 Планом определено строительство трех машиностроительных заводов с годовым выпуском продукции соответственно в 500, 800 и 850 млн. руб. Их продукция будет потребляться в 5 экономических районах, причем потребности первого района определены в 400 млн. руб., второго – 200, третьего – 300, четвертого – 200 и пятого – 650. Матрица расстояний между заводами и потребителями задана в таблице 26.

Таблица 26 – Исходные данные

Заводы	Расстояние до потребителей, км				
	1	2	3	4	5
1	600	300	1800	800	2500
2	3000	6000	100	700	1500
3	400	800	2000	600	300

34 Из пруткового проката длиной 2 м необходимо нарезать некоторое количество заготовок А и Б длиной соответственно 50 и 620 мм для производства 100 изделий. Для одного изделия требуется по 2 заготовки каждого типа. Возможны следующие варианты раскроя (таблица 28).

Таблица 28 – Исходные данные

Варианты раскроя	Количество заготовок типа	
	А	Б
1	5	0
2	3	1
3	2	2
4	0	3

33 Составить план закрепления экономических районов за заводами, который минимизировал бы суммарные грузоперевозки.

33 Распределить работу между тремя рабочими таким образом, чтобы максимизировать выпуск деталей трех видов. Трудоемкость изготовления деталей рабочими, их цена, а также фонд времени каждого рабочего приведены в таблице 27.

Минимизировать общий расход материала при раскрое.

35 В мастерской освоено производство столов и тумбочек для торговой сети. Имеется два вида древесины – 72 м³ и 56 м³, а каждое изделие требуется определенное количество древесины каждого вида, приведенное в таблице 29.

Таблица 29 – Исходные данные

Изделие	Вид древесины	
	1	2
Столы	0,18	0,08
Тумбочки	0,09	0,28

Кроме того, от производства одного стола может быть получен чистый доход в 1,1 ден. единиц, а от одной тумбочки – 0,9 ден. единиц. Определить, сколько столов и тумбочек должна производить мастерская для получения максимального дохода.

2 Методы решения задач оптимального планирования деятельности предприятия

Тема 1 Графический метод решения задач оптимального планирования

Графический метод используется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в симметричной форме, и многими переменными, заданными в канонической форме (при условии, что они содержат не более двух свободных переменных).

Решение задачи графическим способом проводится в такой последовательности:

- записывают уравнения граничных прямых и строят их в плоскости $X_1, 0, X_2$;
- определяют полуплоскости, соответствующие исходным ограничениям-неравенствам. Для этого берут произвольную точку, лежащую по ту или иную сторону от граничной прямой, ее координаты подставляют в левую часть ограничения

равенства. Если оно удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которая содержит выбранную точку; если не удовлетворяется, то искомой будет полуплоскость, которой данная точка не принадлежит;

в) выделяют область допустимых решений задачи как общую часть $m+2$ полуплоскостей, где m полуплоскостей соответствуют исходным неравенствам задачи, а две полуплоскости – условию неотрицательности искомых переменных;

г) строят вектор $V = (C_1; C_2)$ перпендикулярно к нему одну из прямых семейства Z , например, $Z = 0$;

д) определяют экстремальную точку многоугольника решения путем параллельного перемещения вспомогательной прямой $Z = 0$ в направлении вектора V ;

е) вычисляют координаты оптимальной точки и значение функции Z .

Задачу со многими переменными можно решить графически, если в ее канонической записи присутствует не более двух свободных переменных. Чтобы решить такую задачу в системе ограничений уравнений необходимо выделить базисные переменные, а затем их следует опустить и перейти к эквивалентной системе неравенств. Целевая функция также должна быть выражена только через свободные переменные. Полученную двумерную задачу решают обычным графическим методом. Зная две координаты оптимального решения, подставляют их в уравнения ограничений исходной задачи и определяют остальные координаты оптимального решения.

Решая графически получившуюся двумерную задачу необходимо помнить, что на каждой граничной прямой соответствующее неравенство обращается в равенство, поэтому опущенная при образовании этого неравенства базисная переменная равна нулю. В связи с этим в каждой из вершин области допустимых решений по крайней мере две переменные исходной задачи принимают нулевые значения.

Примеры выполнения заданий

Задания:

1 Построить модель производственной задачи, используя две технологии и три вида ресурсов при значениях величин a_{ij} , b_i и b_j , заданных таблицей 30.

Таблица 30 – Исходные данные

Вид ресурса i	Коэффициенты a_{ij}		Запас ресурса b_i
	a_{i1}	a_{i2}	
1	1	3	270
2	4	6	600
3	3	1	240
Доход c_j	3	2	

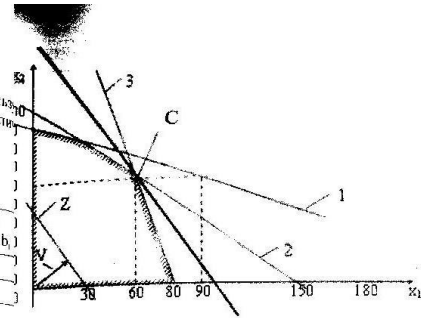


Рисунок 1 – Решение

Решить задачу графически.

Решение. Математическая модель задачи в численном виде может быть записана следующим образом:

$\max Z = 3x_1 + 2x_2$,
при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 \leq 270,$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 600,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 240,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для построения допустимой области решений, заданной неравенствами, построим на плоскости множество коэффициентов при неизвестных уравнения прямой Z . Угловик, ограниченный прямыми $x_1 + 3x_2 = 240$; $4x_1 + 6x_2 = 600$ перпендикулярен этой прямой и указывает направление возрастания Z . Максимальное значение $Z = 300$ достигается в точке $(60; 60)$, которая является точкой пересечения двух уравнений системы. Убедимся, что любая точка, лежащая внутри заштрихованной области, удовлетворяет всем уравнениям системы. Подставляя любую из точек заштрихованной области, например, начало координат $(0; 0)$ в каждое из неравенств системы.

$$\begin{aligned} & \text{а) } x_1 + 3x_2 = 240; & \text{б) } 4x_1 + 6x_2 = 600; & \text{в) } 3x_1 + x_2 = 240; \\ & \text{при } x_1 = 0, x_2 = 60; & x_1 = 0, x_2 = 100; & x_1 = 0, x_2 = 240; \\ & x_1 = 0, x_2 = 90; & x_1 = 150, x_2 = 0; & x_1 = 80, x_2 = 0 \end{aligned}$$

Приравняем правую часть уравнения целевой функции к некоторой постоянной величине $Z = 90$ и построим уравнение прямой $3x_1 + 2x_2 = 90$ ($x_1 = 0, x_2 = 45$; $x_2 = 0, x_1 = 30$). Увеличивая Z , будем передвигать эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора $V = (c_1; c_2) = (3; 2)$, координатами которого являются коэффициенты при неизвестных уравнения прямой Z . Максимальное значение $Z = 300$ достигается в точке $(60; 60)$, которая является точкой пересечения двух уравнений системы.

2 Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные приведены в таблице 31.

Таблица 31 - Исходные данные

Культура	Урожайность участка, ц/га.	
	1	2
Пшеница	20	15
Кукуруза	30	30

По плану должно быть собрано не менее 1500 ц. пшеницы и 4500 ц. кукурузы. Цена 1 ц. пшеницы 6 денежных единиц, кукурузы - 4 денежных единиц. Критерием оптимальности считается максимум валовой продукции в денежном выражении.

Решение Если обозначить через x_1 - площадь, отводимую под посев пшеницы на 1 участке, через x_2 - на 2, через x_3 и x_4 - площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на 2 участках, то ограничения задачи запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 100, \\ x_2 + x_4 &= 200, \\ 20x_1 + 15x_2 &\geq 1500 \text{ (ограничение на сбор пшеницы)}, \\ 35x_1 + 30x_3 &\geq 4500 \text{ (ограничение на сбор кукурузы)}, \\ x_j &\geq 0 \text{ (} j = 1, 4 \text{)}. \end{aligned}$$

Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с 2 участков, составляет 6 ($20x_1 + 15x_2$) денежных единиц; стоимость кукурузы - 4 ($35x_3 + 30x_4$) денежных единиц, а стоимость валовой продукции выразится суммой $Z = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4$, которая должна стремиться к максимуму. Для решения задачи графическим способом преобразуем составленную модель в каноническую форму введением дополнительных переменных $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \max Z &= 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 + 0x_5 + 0x_6; \\ x_1 + x_3 &= 100, \\ x_2 + x_4 &= 200, \\ 20x_1 + 15x_2 - x_5 &= 1500, \\ 35x_1 + 30x_3 - x_6 &= 4500, \\ x_j &\geq 0 \text{ (} j = 1, 6 \text{)}. \end{aligned}$$

Выделим в системе ограничений какой-либо базис и убедимся, что число свободных переменных не превышает двух.

$$\begin{aligned} \max Z &= 38000 - 20x_1 - 30x_2, \\ x_3 &= 100 - x_1, \\ x_4 &= 200 - x_2, \\ x_5 &= -1500 + 20x_1 + 15x_2, \\ x_6 &= 4500 - 35x_1 - 30x_2. \end{aligned}$$

Перейдем к эквивалентной системе неравенств, опуская базисные переменные x_3, x_4 и x_6 :

$$\begin{aligned} \max Z &= -20x_1 - 30x_2 + 38000, \\ x_1 &\leq 100, \\ x_2 &\leq 200, \\ 20x_1 + 15x_2 &\geq 1500, \\ 35x_1 + 30x_2 &\leq 4500, \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение полученной двумерной задачи приведено на рисунке 2.

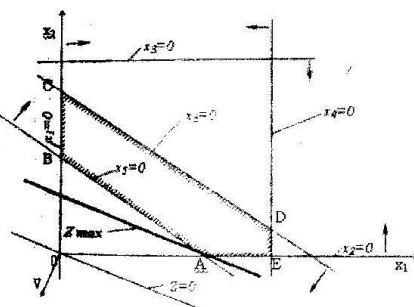


Рисунок 2 - Решение

При этом на каждой граничной прямой одна из переменных исходной задачи обращается в нуль. Так, неравенству $20x_1 + 15x_2 \geq 1500$ соответствует граничная прямая АВ с уравнением $20x_1 + 15x_2 = 1500$.

Но указанное неравенство образовано из третьего уравнения системы ограничений $x_5 = -1500 + 20x_1 + 15x_2$ путем отбрасывания переменной x_5 , следовательно, на прямой АВ $x_5 = 0$.

$$\begin{aligned} 20x_1 + 15x_2 &= 1500; & 35x_1 + 30x_2 &= 4500; \\ x_1 = 0, x_2 &= 100, & x_1 = 0, x_2 &= 150, \\ x_2 = 0, x_1 &= 75, & x_2 = 0, x_1 &= 128,75. \end{aligned}$$

Из рисунка 2 видно, что наибольшее значения функции достигает в т. А пересечения прямых АВ и АЕ ($x_2 = 0$), имею координаты (75; 0), т.е. $x_1 = 75$, $x_2 = 0$. Одновременно в вершине $x_5 = 0$.

Значения других переменных, приводящих к оптимальному решению, находятся из системы ограничений с выделенным зисом:

$$x_3 = 100 - 75 = 25, x_4 = 200, x_6 = 2375, \text{ при этом } Z = 36500.$$

Таким образом, пленицу следует посеять только на первом участке и засеять ею площадь в 75 га; кукурузу надо посеять на обоих участках, причем на первом - 25, а на втором - 200. Тогда валовая продукция достигнет (в денежном выражении) максимума и составит 36500 денежных единиц.

Дополнительные переменные x_5 и x_6 , которые в канонической записи задачи соответственно равны $x_5 = (20x_1 + 15x_2 - 1500)$ и $x_6 = (35x_1 + 30x_2 - 4500)$, имеют вполне определенный экономический смысл: это превышение сбора пшеницы и кукурузы над плановым заданием. При найденном оптимальном решении посевов задание по сбору пшеницы будет выполнено ($x_5 = 0$), а по кукурузе пересыполнено на 2375 ц. ($x_6 = 2375$).

Задания:

- 1 Решить графическим методом задачу 1 первого задания.
- 2 Решить графическим методом задачу 2 первого задания.

- 3 Решить графическим методом задачу 3 первого задания.
- 4 Решить графическим методом задачу 4 первого задания.
- 5 Решить графическим методом задачу 5 первого задания.
- 6 Решить графическим методом задачу 6 первого задания.
- 7 Решить графическим методом задачу 7 первого задания.
- 8 Решить графическим методом задачу 9 первого задания.
- 9 Решить графическим методом задачу 29 первого задания.
- 10 Решить графическим методом задачу 35 первого задания.

Решить графическим методом следующие задачи линейного программирования при целевой функции: $\max Z = x_1 + 2x_2$.

$$\begin{aligned} 1 \quad & -x_1 + x_2 \leq 2, & 2 \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4, & 3 \quad & x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10, & & & & 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 5, & & & & x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & & & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \\ 4 \quad & x_1 + 2x_2 \geq 2, & 5 \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4, & 6 \quad & 3x_1 - x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8, & & & & -x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 12, & & & & 2x_1 - x_2 \leq 9, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & & & & x_1 + 4x_2 \geq 9, \\ & & & & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решить графическим методом следующие задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 2x_2, & 8 \quad \max Z &= 2x_1 + 4x_2, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18, & & 3x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9, & & -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10, & & x_1 - 3x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- 9 $\max Z = x_1 + 8x_2$,
 $x_1 - x_2 \leq 1$,
 $2x_1 + x_2 \leq 2$,
 $x_1 - x_2 \geq 0$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 11 $\max Z = 2x_1 + 4x_2$,
 $3x_1 + 2x_2 \leq 11$,
 $-2x_1 + x_2 \leq 2$,
 $x_1 - 3x_2 \leq 0$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 13 $\max Z = 2x_1 + 4x_2$,
 $4x_1 + 3x_2 \leq 40$,
 $12x_1 + 3x_2 \leq 24$,
 $x_1 \leq 3$,
 $x_2 \leq 3$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 15 $\max Z = 3x_1 + 2x_2$,
 $x_1 + x_2 \geq 1$,
 $-5x_1 + x_2 \leq 0$,
 $5x_1 - x_2 \geq 0$,
 $x_1 - x_2 \geq -1$,
 $x_1 + x_2 \leq 6$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 10 $\min Z = 2x_1 + 3x_2$,
 $3x_1 + 2x_2 \geq 6$,
 $x_1 + 4x_2 \geq 4$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 12 $\min Z = x_1 - 2x_2$,
 $x_1 - x_2 \leq 1$,
 $x_1 + x_2 \geq 2$,
 $x_1 - 2x_2 \leq 0$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.
- 14 $\max Z = x_1 + x_2$,
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$,
 $x_1 + 2x_2 \geq 2$,
 $2x_1 + x_2 \leq 10$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

ТЕМА 2 Решение задач оптимального планирования симплекс-методом

Обобщенная схема решения задач оптимального планирования симплекс-методом следующая:

- 1 Приведение задачи к каноническому виду.
- 2 Нахождение исходного базисного решения, составление симплексной таблицы.
- 3 Проверка базисного решения на оптимальность.

Если полученное решение не оптимально, то выполняются

следующие шаги: 1) последовательная замена базисной переменной на свободную переменную до получения оптимального решения.

Вычислительная схема прямого алгоритма симплекс-метода состоит из следующих шагов:

1 Просматриваются знаки всех элементов оценочной строки. Если в задаче на максимум все $Z_j > 0$, то задача решена: достигнуто базисное решение оптимально, $\max Z = Z_0$. Если не все $Z_j > 0$, то осуществляется переход к шагу 2.

2 Среди всех отрицательных элементов оценочной строки в задаче на максимум находится наибольшее по абсолютной величине, и соответствующий ему столбец выбирается в качестве ключевого. Если в ключевом столбце элементы < 0 , то целевая функция неограничена, $\max Z = \infty$. Решение окончено. Если не все эти элементы < 0 , то переходим к шагу 3.

3 Для каждого положительного элемента ключевого столбца находится отношение к нему соответствующего элемента столбца свободных членов, выбирается наименьшее отношение и ключевой строкой называется строка, где оно достигается. Элемент, стоящий на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, называется ключевым.

4 Выполняется преобразование симплексной таблицы по формулам [14, с.22] и осуществляется переход к шагу 1.

Вычислительная схема двойственного симплекс-метода состоит из следующих шагов:

1 Проверяются знаки коэффициентов ограничений. Если все $b_i \geq 0$ ($i = 1, m$), то базисное решение и значение целевой функции, записанные в столбце свободных членов, дают оптимальное решение исходной задачи. Если не все $b_i \geq 0$, то переходим к шагу 2.

2 Среди отрицательных элементов b_i выбирается величина, наибольшая по абсолютной величине. Этому элементу соответствует ключевая строка.

3 В ключевой строке проверяются знаки всех элементов a_{ij} ($j = 1, n$).

Если все $a_{ij} \geq 0$, то решение окончено, задача неразрешима.

Если найдется хотя бы один коэффициент $a_{ij} < 0$, то осуществляется переход к шагу 4.

4 Среди отрицательных элементов a_{ij} ключевой строкой выбирается элемент a_{ik} , для которого $Z_k / a_{ik} = \max (Z_j / a_{ij})$. Элемент a_{ik} называется ключевым.

$a_{ij} < 0$.

5 Выполняется преобразование симплексной таблицы, переход к шагу 1.

Если в исходной задаче имеются отрицательные элементы среди элементов столбца свободных членов и Z - строка одновременно, то решение задачи состоит из двух этапов: сначала с помощью двойственного симплекс - метода исключаются все $x_i < 0$, затем оптимальное решение находится прямым симплекс - методом. Следует только на первом этапе изменить шаг 4 алгоритма следующим образом.

4. Среди отрицательных элементов a_{ij} ключевой строкой выбирается элемент a_{ik} , для которого $b_i / a_{ik} = \max (b_i / a_{ij})$, $a_{ij} < 0$.

Примеры выполнения заданий

Задания:

1 Решить задачу симплекс-методом, т.е. определить максимум $3x_1 + 2x_2$

$$x_1 + 3x_2 \leq 270,$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 600,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 240,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решение. Введение дополнительных неотрицательных переменных x_1, x_2, x_3 приведем задачу к каноническому виду:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 270,$$

$$4x_1 + 6x_2 + x_4 = 600,$$

$$3x_1 + x_2 + x_5 = 240,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными.

4. Среди отрицательных элементов a_{ij} ключевой строкой выбирается элемент a_{ik} , для которого $Z_k / a_{ik} = \max (Z_j / a_{ij})$. Элемент a_{ik} называется ключевым.

$a_{ij} < 0$.

5 Выполняется преобразование симплексной таблицы, переход к шагу 1.

Таблица 32 - Допустимое базисное решение

аз. пер.	С _{вн}						b _i	α _i
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅		
x ₃	0	1	3	1	0	0	270	1
x ₄	0	4	6	0	1	0	600	150
x ₅	0	3	1	0	0	1	240	80
Z	---	-3	-2	0	0	0	0	---

Поскольку базисные переменные x_3, x_4, x_5 входят в целевую функцию с коэффициентами 0, естественно, что начальное базисное решение $x_3 = 270, x_4 = 600, x_5 = 240$ с нулевым значением целевой функции. Отрицательные значения $Z_1 = -3, Z_2 = -2$ свободных переменных в оценочной строке указывают, что данное базисное решение может быть улучшено.

Выполняя шаг 2 алгоритма устанавливаем, что наименьшее отрицательное значение в оценочной строке равно -3, находится в первом столбце таблицы 32, который, становится ключевым. Для увеличения целевой функции надо ввести в базис свободную переменную x_1 и вывести из базиса одну из базисных переменных x_3, x_4, x_5 . На шаге 3 находим отношение $270/1, 600/4, 240/3$ элементов вектора b к положительным элементам ключевой строки и по наименьшему из этих отношений выбираем оценочную строку и ключевой элемент $a_{31} = 1$, взятый в рамку.

В соответствии с шагом 4 по формулам выполняем преобразование элементов таблицы, включая и оценочную строку Z . Этим заканчивается первая итерация симплекс-метода, в результате из базиса выведена переменная x_3 и введена переменная x_1 .

Новое базисное решение $x_3 = 190$, $x_4 = 280$, $x_5 = 80$, связанное со значением целевой функции $Z = 240$, и преобразования приведены в таблице 33.

Таблица 33 – Новое базисное решение

Баз. пер.	$C_{\text{ит}}$	3	2	0	0	0	b_i	α_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	0	8/3	1	0	-1/3	190	71.2
x_4	0	0	14/3	0	1	-4/3	280	60
x_5	3	1	1/3	0	0	1/3	80	240
Z	---	0	-1	0	0	1	240	---

В этой таблице имеется единственный отрицательный элемент $Z_2 = -1$.

Выполняя вторую операцию с ключевым элементом 14/3, получаем таблицу 34, в которой все коэффициенты вочной строки неотрицательны.

Таблица 34 – Оптимальное решение

Баз. пер.	$C_{\text{ит}}$	3	2	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-4/7	3/7	30
x_2	2	0	1	0	3/14	-2/7	60
x_1	3	1	0	0	-1/14	3/7	60
Z	---	0	0	0	3/14	5/7	300

Оптимальное решение $(x_1, x_2, x_3) = (60, 60, 30)$, $Z = 300$ показывает, что при одинаковых объемах производства первого и второго изделий, равных 60 единиц, будет получен доход в денежных единицах. При этом первый ресурс имеется в избытке $x_5 = 30$ единиц, а второй и третий используются полностью $x_4 = x_6 = 0$.

Решить задачу:

$$\max Z = 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 6x_5,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 16,$$

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 20,$$

$$x_1, 2, 3, 4, 5 \geq 0.$$

Решение. Система ограничений задачи не содержит базисных переменных, поэтому введем в уравнение искусственные переменные x_6, x_7 , включив их в целевую функцию с коэффициентом, значение которого заранее не фиксируется. Получим следующую задачу:

$$\max Z = 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 6x_5 - Mx_6 - Mx_7,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 16,$$

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 20,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7,$$

решение которой приведено в таблице 35. Отметим, что после того, как искусственная переменная была выведена из базисных переменных, в силу выбора коэффициента $-M$ она уже не может попасть в число базисных переменных, поэтому в последующих симплекс-таблицах столбец, соответствующий этой переменной, можно исключить.

Таблица 35 – Решение

аз. стр.	$C_{\text{ит}}$	8	2	-2	-5	-6	-M	-M	b_i	α_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_6	-M	1	1	-1	-1	0	1	0	16	16
x_7	-M	4	-2	2	0	-1	0	1	20	5
Z	---	-8M-8	M-2	-M+2	M+5	M+6	0	0	-36M	---
x_6	-M	0	3/2	-3/2	-1	1/4	1	-1/4	11	---
x_1	8	1	-1/2	1/2	0	-1/4	0	1/4	5	---
Z	---	0	-3/2M	3/2M	M+5	1/4M+4	0	5/4M+1	-1M	---
x_2	2	0	1	-1	-2/3	1/6	2/3	-1/6	22/3	---
x_1	8	1	0	0	-1/3	1/6	1/3	1/6	26/3	---
Z	---	0	0	0	1	23/5	4+M	1+M	84	---

Оптимальное решение задачи: $x_1 = 26/3$, $x_2 = 22/3$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$, $Z = 84$.

3 Решить задачу:
 $\min Z = x_1 + 2x_2$,
 $2x_1 + x_2 \geq 3$,
 $2x_1 - 7x_2 \leq 1$,
 $2x_1 + 3x_2 \geq 6$,
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Решение. Перейдем к эквивалентной задаче максимизации. Для этого поменяем знаки коэффициентов целевой функции, умножим на -1 первое и третье неравенства и введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 . В результате получаем задачу:

$$\begin{aligned} \max Z &= -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 &= 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_5 &= -6, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

В исходной симплекс - таблице все элементы оценочной строки отрицательны. В соответствии с шагами 1, 2 двойственного симплекс - метода выбираем ключевую строку, соответствующую наименьшему отрицательному элементу -6 в столбце свободных членов и, выполняя шаг 4, находим отношения коэффициентов оценочной строки к отрицательным элементам ключевой строки, равные $1/(-2)$ и $2/(-3)$.

Большее из этих чисел указывает ключевой элемент $a_{31} = -2$. Выполнив требуемые преобразования, на следующей итерации по тем же правилам находим ключевой элемент $a_{22} = -10$. После двух итераций двойственного симплекс - метода получаем оптимальный план:

$$x = (9/4, 1/2, 2, 0, 0), Z_{\max} = -13/4 \text{ (таблица 36)}.$$

Таблица 36 - Решение

Баз. пер.	C _{баз}	-1	-2	0	0	0	b _i
		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	0	-2	-1	1	0	0	-3
x ₄	0	2	-7	0	1	0	1
x ₅	0	-2	-3	0	0	1	-6
Z	---	-1	-2	0	0	0	0
x ₃	0	0	2	1	0	-1	3
x ₄	0	0	-10	0	1	1	-5
x ₁	-1	1	3/2	0	0	-1/2	3
Z	---	0	1/2	0	0	1/2	-3
x ₃	0	0	0	1	1/5	0	2
x ₂	-2	0	1	0	-1/10	0	1/2
x ₁	-1	1	0	0	3/20	-1/2	9/4
Z	---	0	0	0	1/20	1/2	-13/4

Это дает решение исходной задачи в виде $x = (9/4, 1/2)$, $Z_{\min} = 13/4$.

4 Решить задачу:

$$\begin{aligned} \max Z &= 8x_1 + 2x_2 - 5x_3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\geq 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение. С помощью дополнительных переменных x_4, x_5, x_6 ≥ 0 переходим от ограничений неравенств к ограничениям - равенствам, и после умножения первого и второго ограничений на -1 окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \max Z &= 8x_1 + 2x_2 - 5x_3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 &= -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 2, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Заполняем симплекс - таблицу и в соответствии с шагами 1 и 2 двойственного алгоритма выбираем ключевую строку, соответствующую наименьшему отрицательному числу в столбце свободных членов. Сравниваем отношения $(-6)/(-2)$ и $(-6)/(-1)$ и по скольку второе из них больше, то ему соответствует ключевой столбец. Выполняя преобразования с ключевым элементом $a_{12} = -1$, получаем эквивалентную задачу с неотрицательными значениями b_i . Проведя еще две итерации по правилам обычного симплекс - метода получаем оптимальный план: $x = (7/5, 11/5, 3, 0, 0, 0)$, $Z \max = 3/5$ (таблица 37).

Таблица 37 - Решение

Баз. пер.	$C_{\text{пер}}$	8	2	-5	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	1	-2	-1	1	0	0	-6
x_5	0	-1	2	-2	0	1	0	-3
x_6	0	2	1	-1	0	0	1	2
Z	---	-8	-2	5	0	0	0	0
x_3	-5	-1	2	1	-1	0	0	6
x_5	0	-3	6	0	-2	1	0	9
x_6	0	1	3	0	-1	0	1	8
Z	---	-3	-12	0	5	0	0	-30
x_3	-5	0	0	1	-1/3	-1/3	0	3
x_2	2	-1/2	1	0	-1/3	1/6	0	3/2
x_6	0	5/2	0	0	0	-1/2	1	7/2
Z	---	-9	0	0	0	2	1	-12
x_3	-5	0	0	1	-1/3	-1/3	-1/3	3
x_2	2	0	1	0	-1/3	1/15	1/15	11/5
x_1	8	1	0	0	0	-1/5	2/5	7/5
Z	---	0	0	0	1	1/5	18/5	3/5

задания:

- 1 Решить симплекс-методом задачу 1 первого задания.
- 2 Решить симплекс-методом задачу 3 первого задания.
- 3 Решить симплекс-методом задачу 4 первого задания.
- 4 Решить симплекс-методом задачу 5 первого задания.
- 5 Решить симплекс-методом задачу 6 первого задания.
- 6 Решить симплекс-методом задачу 7 первого задания.
- 7 Решить симплекс-методом задачу 9 первого задания.
- 8 Решить симплекс-методом задачу 10 первого задания.
- 9 Решить симплекс-методом задачу 11 первого задания.
- 10 Решить симплекс-методом задачу 12 первого задания.
- 11 Решить симплекс-методом задачу 13 первого задания.
- 12 Решить симплекс-методом задачу 14 первого задания.
- 13 Решить симплекс-методом задачу 15 первого задания.
- 14 Решить симплекс-методом задачу 16 первого задания.
- 15 Решить симплекс-методом задачу 17 первого задания.
- 16 Решить симплекс-методом задачу 18 первого задания.
- 17 Решить симплекс-методом задачу 19 первого задания.
- 18 Решить симплекс-методом задачу 20 первого задания.
- 19 Решить симплекс-методом задачу 21 первого задания.
- 20 Решить симплекс-методом задачу 23 первого задания.
- 21 Решить симплекс-методом задачу 24 первого задания.
- 22 Решить симплекс-методом задачу 25 первого задания.
- 23 Решить симплекс-методом задачу 27 первого задания.
- 24 Решить симплекс-методом задачу 28 первого задания.
- 25 Решить симплекс-методом задачу 29 первого задания.
- 26 Решить симплекс-методом задачу 30 первого задания.
- 27 Решить симплекс-методом задачу 31 первого задания.
- 28 Решить симплекс-методом задачу 33 первого задания.
- 29 Решить симплекс-методом задачу 34 первого задания.
- 30 Решить симплекс-методом задачу 35 первого задания.

Решить симплекс-методом следующие задачи

- 31 Определить оптимальный план выпуска продукции из ус-

ловия максимизации прибыли. Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В, Г) используются три вида сырья (1, 2, 3). Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции заданы в таблице 38:

Таблица 38 – Исходные данные

Сырье	Нормы расхода				Ресурсы
	А	Б	В	Г	
1	1	3	2	1	2000
2	0	4	2	3	1000
3	4	0	2	3	3000
Прибыль	8	4	6	10	

32 Предприятие выпускает изделия четырех видов. Расход ресурсов на производство единицы изделия каждого вида и прибыль от реализации единицы изделия всех видов приведены в таблице 39.

Таблица 39 – Исходные данные

	Расход ресурсов сырья на производство единицы продукции (усл.ед.)				Объем ресурсов (усл. ед.) b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1					
B_2	1	1000	5	3	1000
B_3	1	800	2	1	800
B_4	3	2500	1	2	2500
Прибыль (ден. ед.)	3	2	2	1	

1 Составить экономико-математическую модель, позволяющую решить проблемную ситуацию, описанную в задаче. Претворить модель в каноническом виде и объяснить экономичес-

смысл введенных при этом балансовых переменных.

2 Найти оптимальный ассортиментный план производства, котором расход ресурсов не превысит имеющегося количества, а суммарная прибыль будет максимальной. Дать экономическую интерпретацию полученного результата.

33 Решить задачу 32 для исходных данных, представленных в таблице 40.

Таблица 40 – Исходные данные

	Расход ресурсов сырья на производство единицы продукции (усл.ед.)				Объем ресурсов (усл. ед.) b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	3	0	3	1	1000
B_2	1	4	1	2	2100
B_3	2	1	1	3	3500
Прибыль (ден. ед.)	3	1	2	4	

4 Решить задачу 32 для исходных данных, представленных в таблице 41.

Таблица 41 – Исходные данные

	Расход ресурсов сырья на производство единицы продукции (усл.ед.)				Объем ресурсов (усл. ед.) b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	1	0	3	2	500
B_2	3	0	4	1	3000
B_3	2	3	1	4	2200
Прибыль (ден. ед.)	3	1	2	1	

35 Решить задачу 33 для исходных данных, представленных в таблице 42.

Таблица 42 – Исходные данные

B _i	A _j	Расход ресурсов сырья на производство единицы продукции (усл.ед.)				Объем ресурсов (усл.ед.) b _i
		A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
B ₁		1	1	3	0	300
B ₂		2	0	1	1	1000
B ₃		3	2	1	2	800
Прибыль (ден. ед.)		2	3	1	1	

3 Модели исследования операций

Тема 1 Игровые методы и модели их использования

- 1 Основные понятия теории игр
- 2 Решение матричных игр методами линейного программирования
- 3 Игры с природой. Критерии выбора решений в условиях неопределенности

Пример выполнения задания

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали; 3) дальнейшая эксплуатация возможна только после капитального ремонта. В зависимости от сложившейся си-

туации руководство предприятия может принять следующие решения: 1) провести ремонт своими силами, что потребует затрат в 2,4 или 6 денежных единицах в зависимости от состояния оборудования (в затраты включаются стоимость ремонта и заменяемых деталей, убытки, связанные с ухудшением качества выпускаемой продукции или с простоем неисправного оборудования); 2) провести ремонт с помощью специалистов-ремонтников, что вызовет затраты, равные соответственно 8, 2 или 6 денежным единицам; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 10, 8 или 6 денежных единиц.

Используя игровой подход, выработать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Решение. В рассматриваемой ситуации в качестве игрока А выступает руководство предприятия, обладающее тремя возможными стратегиями: A₁ - проведение ремонта своими силами, A₂ - проведение ремонта приглашаемыми специалистами, A₃ - проведение замены оборудования. Неопределенность ситуации здесь связана с комплексом внешних условий, в которых функционирует оборудование на протяжении нескольких лет и которые можно определить как возможные состояния «природы» - P₁, P₂ и P₃. «Выигрышами» игрока А являются затраты, связанные с реализацией решений (стратегий) A₁, A₂ и A₃ и составляющие платежную матрицу, показанную в таблице 43.

Таблица 43 - Матрица

P _j	A _i	P ₁	P ₂	P ₃	α _i
A ₁		-2	-4	-6	-6
A ₂		-8	-2	-6	-8
A ₃		-10	-8	-6	-10
β _j		-2	-2	-6	

По критерию Вальда, оптимальной стратегией будет A_1 , т.к. в этом случае достигается максимум:

$$\alpha = \max_j \min_i \alpha_{ij} = \max_i \alpha_i = \max(-10; -8; -6) = -6 = \alpha_1$$

Чтобы воспользоваться критерием Сэвиджа, составляем по таблице 43 матрицу рисков с элементами

$$r_{ij} = \max_k \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij} \text{ (таблица 44). Так,}$$

$$r_{12} = \max_k \alpha_{k2} - \alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_{12} = -2(-4) = 2$$

Таблица 44 – Матрица рисков

Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	r_i
A_1	0	2	0	2
A_2	6	0	0	6
A_3	8	6	0	8

$$r_{12} = \max_k \alpha_{k2} - \alpha_{12} = \beta_2 - \alpha_{12} = -2(-4) = 2 \text{ и т.д.}$$

Оптимальной по Сэвиджу будет стратегия A_1 , так как при ней выполняется условие

$$\min_j \max_i r_{ij} = \min_j r_j = \min(2; 6; 8) = 2 = r_1$$

Для применения критерия Гурвица выберем $\lambda = 0,6$, тогда

$$\max_j [0,6 \min_i \alpha_{ij} + 0,4 \max_i \alpha_{ij}] = \max_j h_j$$

Все промежуточные результаты запишем в таблицу 45. Из последнего столбца этой таблицы видно, что максимальное значение h_i равно -4,4 и соответствует стратегии A_1 , она и будет оптимальной. Таким образом, все три критерия говорят в пользу стратегии A_1 , т.е. руководство предприятия должно принять решение о проведении ремонта оборудования своими силами.

Таблица 45 – Решение

Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	$\min_i \alpha_{ij}$	$0,6 \min_i \alpha_{ij}$	$\max_i \alpha_{ij}$	$0,4 \max_i \alpha_{ij}$	h_i
A_1	-2	-4	-6	-6	-3,6	-2	-0,8	-4,4
A_2	-8	-2	-6	-8	-4,8	-2	-0,8	-5,6
A_3	-10	-8	-6	-10	-6	-6	-2,4	-8,4

Задания:

1. Магазин может закупить для реализации a , в или с единиц скоропортящегося товара по цене d у.д.е. за единицу товара. В зависимости от состояния спроса на данный товар (пониженный, умеренный или повышенный) может быть продано в день реализации соответственно a , в или с единиц товара по цене p у.д.е. за 1 товара. Остаток товара реализуется полностью на следующий день по сниженной цене t у.д.е. за 1 товара. Дополнительная закупка товара осуществляется по цене s у.д.е. Какую стратегию закупок использовать магазину, чтобы максимизировать доход, при $a=30$, $v=40$, $c=50$, $d=4$, $p=6$, $t=2$, $s=5$ и $\lambda=0,5$.

2. На технологическую линию может поступать сырье с малым, средним и большим содержанием примесей. Условия производства позволяют эксплуатировать технологическую линию в 4 режимах.

Прибыль от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья с малым содержанием примесей при различных режимах работы технологической линии, в среднем составляет соответственно 6,3, 10,1, 8,2, и 5,1 у.д.е.; из сырья со средним содержанием примесей – 4,2, 9,8, 3,1, и 6,2 у.д.е.; из сырья с большим содержанием примесей – 3,1, 2,2, 3,9, 2,5 у.д.е. Выбрать режимы работы технологической линии, при которой прибыль предприятия будет наибольшей. ($\lambda=0,5$).

3 Турбаза «Припять» обслуживает туристические группы. Расход хлебопродуктов прямо пропорционален числу таких групп. Точное их число каждый день неизвестно: оно колеблется в пределах от 14 до 20 в день включительно. На каждую партию туристов требуется в день 5 кг хлебопродуктов. Потери в случае экстренного заказа составляют 20 денежных единиц за 1 кг. Оставшиеся хлебопродукты реализуются по 10 денежных единиц за 1 кг. Рассматривая приведенную ситуацию как игру с «природой» составить матрицу игры и определить оптимальное количество заказываемых хлебопродуктов ($\lambda = 0,5$).

4 Для отопления помещений приобретается топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды зимой. Перед отопительным сезоном уголь может быть приобретен по минимальной цене (10 ден. ед. за 1 т), а излишек его можно реализовать по цене 5 ден. ед. за 1 т. Можно избрать одну из трех стратегий закупки угля $A_1 - 5$ т, $A_2 - 10$ т, $A_3 - 18$ т. Рассматривая условие как игру с «природой» определить оптимальную стратегию в образовании запасов. Исходные данные для составления платежной матрицы игры приводятся в таблице 46.

Таблица 46 – Исходные данные

Погода	Мягкая	Нормальная	Суровая
Расход, т	5	10	18
Цена, руб. т	10	16	20

5 Руководство универмага заказывает товар вида А. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 5 до 8 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завести недостающее количество. Если же спрос будет меньше имеющегося в наличии количества товара, то перереализованный

товар хранится на складе универмага. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,5$)) такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным заказом были бы минимальными, и расходы на хранение единицы товара составляют 1 ден.ед., а срочному заказу и заводу 2 ден.ед.

6 Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,3$).

Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (плотных), A_2 (приплотинных), A_3 (бесплотных), A_4 (плотозонных). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и др. Выделено четыре различных состояния (P_1, P_2, P_3 и P_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 47.

Таблица 47 – Исходные данные

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	3	1	7	2
A_2	1	2	6	9
A_3	7	4	2	11
A_4	1	6	3	5

7 Кафе «Шоколадница» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Известно, что спрос на пирожные может составлять 150, 170, 200 и 210 штук. Затраты на производство одного пирожного составляют 8 ден.ед., а цена его реализации - 10 ден.ед. Если пирожные не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафе несет убытки. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,6$)) какое коли-

чество пирожных следует вынестать.

8 Магазин может закупить для реализации a , b или c единиц скоропортящегося товара по цене d у.д.е. за единицу товара. В зависимости от состояния спроса на данный товар (пониженный, умеренный или повышенный) может быть продано в день реализации соответственно a , b или c единиц товара по цене p у.д.е. за 1 товар. Остаток товара реализуется полностью на следующий день по сниженной цене t у.д.е. за 1 товар. Дополнительная закупка товара осуществляется по цене s у.д.е. Какую стратегию закупок использовать магазину, чтобы максимизировать доход, при $a=10$, $b=20$, $c=30$, $d=2$, $p=8$, $t=3$, $s=5$ и $\lambda=0,5$.

9 Руководство магазина заказывает некоторый товар. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 8 до 11 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Если же спрос будет меньше имеющегося в наличии количества товара, то нереализованный товар хранится на складе универсама. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,2$)) такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом были бы минимальными, если расходы на хранение единицы товара составляют 3 д.е., а по срочному заказу и завозу — 6 д.е.

10 Сельскохозяйственное предприятие на площади в 1 га может посеять одну из трех культур: пшеницу, рожь и кукурузу. Определить, какую из культур сеять, если урожай этих культур зависит главным образом от погоды, а план сева должен обеспечить максимальный доход от реализации произведенной сельскохозяйственной продукции. Урожайность культур в зависимости от погоды и цена 1 ц. каждой культуры известны и приводятся в таблице 48. При использовании критерия Гурвица принять $\lambda=0,5$.

Таблица 48 – Исходные данные

Погода	Урожайность культур, ц. / га		
	пшеница	рожь	кукуруза
Мягкая	16	5	10
Обычная	5	20	15
Холодная	20	10	5
Цена 1 ц., д.ед.	4	2	6

Для отопления помещений приобретается топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды зимой. О зимних ценах на уголь и о количестве угля, необходимого для отопления помещения в зимний период приведены в таблице 49. Перед отопительным сезоном уголь может быть куплен по минимальной цене (3 ден. ед. за 1 т). Недостающее количество угля можно приобрести зимой, так как имеется место для его хранения. Излишек угля можно реализовать после окончания зимы по цене 2 ден. ед. за 1 т. Рассмотреть задачу как игру с «природой» определить оптимальную стратегию в образовании запасов угля. При использовании критерия Гурвица принять $\lambda=0,5$.

Таблица 49 – Исходные данные

Погода	Мягкая	Обычная	Холодная
Уголь, т	5	8	10
Цена, руб. т	4	5	6

Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,3$).
Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (ветровых), A_2 (приливных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых).

вых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и др. Выделено четыре различных состояния (P_1, P_2, P_3 и P_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 50.

Таблица 50 – Исходные данные

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	3	1	7	2
A_2	1	2	6	9
A_3	7	4	2	11
A_4	1	6	3	5

13 Турбаза «Волна» обслуживает туристические группы. Расход хлебобулочных изделий прямо пропорционален числу таких групп. Точное их число каждый день неизвестно: оно колеблется в пределах от 15 до 20 в день включительно. На каждую партию туристов требуется в день 5 кг хлебобулочных изделий. Потери в случае экстренного заказа составляют 30 денежных единиц за 1 кг. Оставшиеся хлебобулочные изделия реализуются по 10 денежных единиц за 1 кг. Рассматривая приведенную ситуацию как игру с «природой», составить матрицу игры и определить оптимальное количество заказываемых хлебобулочных изделий.

14 Руководство магазина заказывает некоторый товар. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 9 до 12 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Если же спрос будет меньше имеющегося в наличии количества товара, то нерезализованный товар хранится на складе универмага. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0.5$)) такой объем

товар, при котором дополнительные затраты, связанные с увеличением и срочным заказом были бы минимальными, а расходы на хранение единицы товара составляют 2 д.е., а срочному заказу и заводу – 3 д.е.

На технологическую линию может поступать сырье с малым и большим содержанием примесей. Условия производства позволяют эксплуатировать технологическую линию в двух режимах. Прибыль от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья с малым содержанием примесей при различных режимах работы технологической линии, в среднем составляет соответственно 5,9, 9,1, 8,3 и 5,2 у.е.; из сырья со средним содержанием примесей – 4,3, 7,8, 8,5 и 3,4 у.е.; из сырья с большим содержанием примесей – 2,9, 1,4, 4,9, 1,2 у.е. Выбрать режим работы технологической линии, при котором прибыль предприятия будет наибольшей. ($\lambda = 0,5$).

Сельскохозяйственное предприятие на площади в 1 га возделывает одну из трех культур: пшеницу, рожь и кукурузу. Решить, какую из культур сеять, если урожай этих культур зависит главным образом от погоды, а план сева должен обеспечить максимальный доход от реализации произведенной сельхозпродукции. Урожайность культур в зависимости от погоды и для каждой культуры известны и приводятся в таблице 51. При использовании критерия Гурвица принять $\lambda = 0,5$.

Таблица 51 – Исходные данные

Погода	Урожайность культуры, ц / га		
	пшеница	рожь	кукуруза
холодная	10	15	20
умеренная	15	20	30
жаркая	5	10	15
на 1 ц, 1 ед.	10	8	4

17 Туристическая фирма берет на реализацию туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 7 до 10 штук. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то можно заказать недостающее количество, что потребует дополнительных расходов в 6 ден. ед. за каждую новую путевку. Если же количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованные путевки составят 3 ден. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 ден. ед. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,2$)), какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

18 Руководство универсама заказывает некоторый товар. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 10 до 13 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и завести недостающее количество. Если же спрос будет меньше имеющегося в наличии количества товара, то нереализованный товар хранится на складе универсама. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,3$)) такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом были бы минимальными, если расходы на хранение единицы товара составляют 1 ден.ед., а по срочному заказу и завозу – 3 ден.ед.

19 Магазин может закупить для реализации a , в или с единиц скоропортящегося товара по цене d у.д.е. за единицу товара. В зависимости от состояния спроса на данный товар (пониженный, умеренный или повышенный) может быть продано в день реализации соответственно a , в или с единиц товара по цене r у.д.е. за 1 товара. Остаток товара реализуется полностью на следующий день по сниженной цене t у.д.е. за 1 товара. Дополнительная закупка товара осуществляется по цене s у.д.е. Какую стратегию закупок использовать магазину, чтобы максимизировать доход, при $a=20$, $v=30$, $c=40$, $d=3$, $p=5$, $t=1$, $s=4$ и $\lambda=0,5$.

20 Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,3$). Возможно строительство трех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима работы, стоимости топлива и его перевозки и др. Выделено четыре различных состояния (Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 52.

Таблица 52 – Исходные данные

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	3	1	7	2
A_2	1	2	6	9
A_3	7	4	2	11
A_4	1	6	3	5

21 Кафетерий «Лакомка» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Известно, что спрос на пирожные может составлять 200, 220, 240 и 260 штук. Затраты на производство одного пирожного составляют 7 ден.ед., а цена его реализации – 10 ден.ед. Если пирожные не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафетерий несет убытки. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,6$)), какое количество пирожных следует выпекать.

22 Туристическая фирма берет на реализацию туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 5 до 10 штук. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то можно заказать недостающее количество, что потребует дополнительных расходов в 5 д. е. за каждую новую путевку. Если же количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованные путевки

составят 3 ден.ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 20 ден.ед. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,2$)), какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

23 Сельскохозяйственное предприятие на площади в 1 га может посеять одну из трех культур: пшеницу, рожь и кукурузу. Определить, какую из культур сеять, если урожай этих культур зависит главным образом от погоды, а план сева должен обеспечить максимальный доход от реализации произведенной сельхозпродукции. Урожайность культур в зависимости от погоды и цена 1 ц. Каждой культуры известны и приводятся в таблице 52. При использовании критерия Гурвица принять $\lambda=0,5$.

Таблица 52 – Исходные данные

Погода	Урожайность культуры, ц / га		
	пшеница	рожь	кукуруза
Сухая	10	6	4
Нормальная	5	8	12
Дождливая	15	10	5
Цена 1 ц, ден.ед.	5	10	15

24 Туристическая фирма «Топ тур» берет на реализацию туристические путевки у фирмы «Тревел». Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 10 до 15 штук. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то можно заказать недостающее количество, что потребует дополнительных расходов в 6 ден.ед. за каждую новую путевку. Если же количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованные путевки составят 3 ден.ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 30 д.е. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,6$)) какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

25 Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии

Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,3$).

26 Можно строительство четырех типов электростанций: A_1 (гидроэлектростанций), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рск, стоимости топлива и его перевозки и др. Можно выделить четыре различных состояния (P_1, P_2, P_3 и P_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций зависит в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 53.

Таблица 53 – Исходные данные

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	6	3	1	4
A_2	3	5	4	8
A_3	7	4	9	1
A_4	2	1	7	10

26 Руководство универмага заказывает некоторый товар. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 10 до 20 ед. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения спроса, то руководство может срочно заказать и продать недостающее количество. Если же спрос будет меньше, чем заказано, то излишки товара будут храниться на складе универмага. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,5$)) такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным заказом были бы минимальными. Расходы на хранение единицы товара составляют 2 ден. ед., а на срочному заказу и заводу – 3 ден. ед.

27 На технологическую линию может поступать сырье с малым, средним и большим содержанием примесей. Условия производства позволяют эксплуатировать технологическую линию в

4-х режимах.

Прибыль от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья с малым содержанием при различных режимах работы технологической линии, в среднем составляет соответственно 5,7; 9,8; 7,5; и 4,9 у.д.е.; из сырья со средним содержанием примесей – 4,6; 8,5; 3,9; и 7,8 у.д.е.; из сырья с большим содержанием примесей – 2,4; 1,2; 4,5; 2,1 у.д.е. Выбрать режимы работы технологической линии, при которой прибыль предприятия будет наибольшей. ($\lambda=0,5$).

28 Сельскохозяйственное предприятие на площади в 1 га может посеять одну из трех культур: пшеницу, рожь, кукурузу. Определить, какую из культур сеять, если урожай этих культур зависит главным образом от погоды, а план сева должен обеспечить максимальный доход от реализации произведенной сельхозпродукции. Урожайность культур в зависимости от погоды и цена 1 ц. каждой культуры известны и приводятся в таблице 54. При использовании критерия Гурвица принять $\lambda=0,5$.

Таблица 54 – Исходные данные

Погода	Урожайность культуры, ц. / га		
	пшеница	рожь	кукуруза
Сухая	20	7,5	0
Нормальная	5	12,5	7,5
Дождливая	15	5	10
Цена 1 ц., ден.ед.	2	4	8

29 Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda=0,3$).

Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесплужовых), A_4 (плужовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных

факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и др. Известно четыре различных состояния (P_1, P_2, P_3 и P_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций зависит в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 55.

Таблица 55 – Исходные данные

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	4	1	6	3
A_2	1	5	8	10
A_3	9	3	7	4
A_4	3	1	10	5

30 Магазин может закупить для реализации a , в или с единицы портящегося товара по цене d у.д.е. за единицу товара. В зависимости от состояния спроса на данный товар (пониженный, средний или повышенный) может быть продано в день реализации соответственно a , в или с единиц товара по цене r у.д.е. за единицу. Остаток товара реализуется полностью на следующий день по сниженной цене t у.д.е. за 1 товара. Дополнительная закупка товара осуществляется по цене s у.д.е. Какую стратегию закупки использовать магазину, чтобы максимизировать доход. $a=40, v=50, c=60, d=1, p=4, t=3, s=3$ и $\lambda=0,5$.

31 На технологическую линию может поступать сырье с малым, средним и большим содержанием примесей. Условия производства позволяют эксплуатировать технологическую линию в различных режимах.

Прибыль от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья с малым содержанием при различных режимах работы технологической линии, в среднем составляет соответственно 5,9; 9,1; 7,2 и 5,3 у.д.е.; из сырья со средним содержанием примесей – 4,5; 8,8; 5,1 и 6,2 у.д.е.; из сырья с большим со-

держанием примесей – 3,2, 1,2, 3,5, 2,3 у.д.е. Выбрать режимы работы технологической линии, при которой прибыль предприятия будет наибольшей. ($\lambda = 0,5$).

32 Кафетерий «Сладкоежка» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Известно, что спрос на пирожные может составлять 200, 240, 280 и 300 штук. Затраты на производство одного пирожного составляют 5 ден.ед., а цена его реализации – 8 ден.ед. Если пирожные не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафетерий несет убытки. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,4$)) какое количество пирожных следует выпекать.

33 Для отопления помещений приобретается топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды зимой. Перед отопительным сезоном уголь может быть приобретен по минимальной цене (6 ден. ед. за 1 тонну). Предполагается, что продать оставшийся после зимы уголь не представляется возможным. В случае необходимости недостающее количество угля можно приобрести зимой (помещение для хранения угля вмещает до 6 тонн). Сколько угля следует запастись на зиму, чтобы затраты были минимальными. Исходные данные о зимних ценах на уголь и о количестве угля для отопления дома в зимний период приводятся в таблице 56. ($\lambda = 0,5$).

Таблица 56 – Исходные данные

Погода	Мягкая	Нормальная	Суровая
Расход, т	4	5	6
Цена, руб. т	7	10	20

34 Кафетерий «Мечта» реализует кондитерские изделия собственного изготовления. Известно, что спрос на пирожные

может составлять 100, 120, 140 и 160 штук. Затраты на производство одного пирожного составляют 6 ден.ед., а цена его реализации – 10 ден.ед. Если пирожные не продаются в течение 36 часов, они портятся и кафетерий несет убытки. Требуется определить (по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,5$)) какое количество пирожных следует выпекать.

35 Выбрать наилучшую стратегию, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,3$). Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и др. Задано четыре различных состояния (P_1, P_2, P_3 и P_4), каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций оценивается в зависимости от состояний «природы» и приводится в таблице 57.

Таблица 57 – Исходные данные

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	3	1	7	2
A_2	1	2	6	9
A_3	7	4	2	11
A_4	1	6	3	5

Тема 2 Сетевые модели

- 1 Порядок и правила построения сетевого графика.
- 2 Расчет временных параметров сетевого графика.
- 3 Анализ сетевого графика. Коэффициент напряженности работ.
- 4 Определение потребности в трудовых ресурсах.

Сетевой график комплекса работ, порядок и правила его построения

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется **сетевым графиком**. Главными элементами сетевой модели являются **события и работы**.

В сетевом планировании и управлении (СПУ) под «работой» понимается:

- а) действительная работа – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов;
- б) ожидание – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда;
- в) зависимость или фиктивная работа – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. (Она указывает, что возможность выполнения одной работы непосредственно зависит от результатов другой; продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю).

Событие – это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения комплекса взаимосвязанных работ (проекта). Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий. События на сетевом графике изображаются кружками, а работы – стрелками, показывающими связь между работами.

Порядок построения сетевых графиков следующий.

Вначале планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, продумываются их логические связи и последовательность выполнения, работы закрепляются за исполнителями. С их помощью оценивается длительность каждой работы. Затем составляется сетевой график. После упорядочения сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и критический путь. Наконец, проводится анализ и оптимизация сетевого графика.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила.

1 В сетевой модели не должно быть событий, из которых выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.

2 В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.

3 В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

4 Любые два события должны быть непосредственно связаны не более, чем одной работой.

При изображении параллельно выполняемых разных по содержанию и затрачиваемым ресурсам работ рекомендуется ввести фиктивное событие и фиктивную работу; при этом одна из параллельных работ замыкается на это фиктивное событие. Фиктивные работы изображаются на графике пунктирными линиями.

Отметим, что фиктивные работы и события необходимо вводить и в ряде других случаев. Например, для отражения зависимостей событий, не связанных реальными работами. Если работы А и В, могут выполняться независимо друг от друга, но требуют одного и того же оборудования, так что работа В не может начаться, пока не освободится оборудование с окончанием работы А, то это обстоятельство требует введения фиктивной работы.

При неполной зависимости работ, например, когда для выполнения одной из работ необходимо предварительно выполнить несколько иных, а для другой, выходящей из общего для них события, предварительным условием является выполнение только одной из предыдущих. В этом случае следует ввести фиктивное событие и фиктивную работу.

5 Сетевой график должен быть полностью упорядоченным. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предше-

существующее сй событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.

Расчет временных параметров сетевого графика

В таблице 58 приведены основные временные параметры сетевых графиков. Рассмотрим содержание и расчет этих параметров.

Начнем с параметров событий.

Ранний (или ожидаемый) срок $t_p(i)$ свершения i -го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{pi}}(L_{pi}), \quad (1)$$

где L_{pi} — любой путь, предшествующий i -у событию, т. е. путь от исходного до i -го события сети.

Если событие j имеет несколько предшествующих путей, а следовательно, несколько предшествующих событий i , то ранний срок свершения события j удобно находить по формуле:

$$t_p(j) = \max_{i,j} [t_p(i) + t(i,j)] \quad (2)$$

Поздний (или предельный) срок $t_n(i)$ свершения i -го события равен:

$$t_n(i) = t_{np} - \max_{L_{ci}}(L_{ci}), \quad (3)$$

где L_{ci} — любой путь, следующий за i -м событием, т. е. путь от i -го до завершающего события сети.

Таблица 58 — Основные временные параметры сетевых графиков

Элемент сети, характеризующий параметром	Наименование параметра	Условное обозначение параметра
Событие i	Ранний срок свершения события	$t_p(i)$
	Поздний срок свершения события	$t_n(i)$
	Резерв времени события	$R(i)$
Работа (i,j)	Продолжительность работы	$t(i,j)$
	Ранний срок начала работы	$t_{pn}(i,j)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{po}(i,j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{pn}(i,j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{po}(i,j)$
	Полный резерв времени работы	$R_n(i,j)$
	Частный резерв времени работы первого вида	$R_1(i,j)$
	Частный резерв времени работы второго вида или свободный резерв времени работы	$R_2(i,j)$
Путь	Независимый резерв времени работы	$R_n(i,j)$
	Продолжительность пути	$L(L)$
	Продолжительность критического пути	$t_{кр}$
	Резерв времени пути	$R(L)$

Если событие i имеет несколько последующих путей, а следовательно, несколько последующих событий j , то поздний срок свершения события i удобно находить по формуле:

$$t_p(i) = \min_{i,j} [t_p(j) - t(i,j)] \quad (4)$$

Резерв времени $R(i)$ i -го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_p(i) - t_p(i) \quad (5)$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ.

Критические события не имеют резервов времени, т.к. любая задержка в свершении события, лежащего на критическом пути, вызовет такую же задержку в свершении завершающего события.

Определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути, а выявив события с нулевыми резервами времени, определяем его топологию.

Определим, например, временные параметры событий и критический путь для сетевого графика, изображенного на рис. 4. Результаты расчета временных параметров можно фиксировать прямо на графике. В этом случае параметры событий записываются в кружках, разделенных на четыре части, а параметры работ — над соответствующими стрелками (рисунок 3). В этом случае отпадает необходимость составления таблиц.

При определении ранних сроков свершения событий $t_p(i)$ двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы (1) и (2). Для $i=1$ (первого события), очевидно $t_p(i) = 0$.

$$t(i,j) [R_p(i,j), R_i(i,j), R_r(i,j), R_n(i,j)]$$



Рисунок 3 — Расположение временных параметров относительно на сетевом графике.

Для $i = 2$ $t_p(2) = t_p(1) + t(0,2) = 0 + 5 = 5$ (суток), т.к. для события 2 существует только один предшествующий путь $1 \rightarrow 2$.

Для $i = 3$ $t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 8 = 8$ (суток), т.к. для события 3 существует только один предшествующий путь $1 \rightarrow 3$.

Для $i = 4$ $t_p(4) = t_p(2) + t(2,4) = 5 + 9 = 14$ (суток), т.к. для события 4 существует один предшествующий путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. Для $i = 5$ $t_p(5) = \max \{t_p(1) + t(1,5); t_p(2) + t(2,5); t_p(3) + t(3,5)\} = \max \{0 + 8; 5 + 3; 8 + 4\} = \max \{8; 8; 12\} = 12$ (суток), т.к. для события 5 существует три предшествующих пути $L_{n5}: 1 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ и $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ и три предшествующих события. Аналогично рассчитаем ранние сроки свершения остальных событий и запишем их в левой части каждого кружка сетевого графика (рисунок 4).

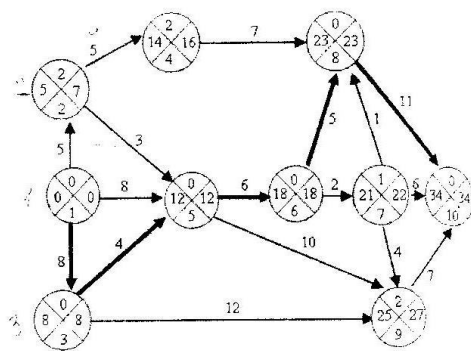


Рисунок 4 – Сетевой график с временными параметрами

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 10: $t_p = t_p(10) = 34$ (суткам).

При определении поздних сроков свершения событий $t_p(i)$ двигаемся по сети в обратном направлении, т.е. справа налево и используем формулы (3) и (4).

Для $i=10$ (завершающего события) поздний срок свершения события должен быть равен его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути): $t_p(10) = t_p(10) = 34$ (суток).

Для $i=9$ $t_p(9) = t_p(10) - t(9,10) = 34 - 7 = 27$ (суток), так как для события 9 существует только один последующий путь $L_{c9}: 9 \rightarrow 10$.

Для $i=8$ $t_p(8) = t_p(10) - t(8,10) = 34 - 11 = 23$ (суток), так как

события 8 существует только один последующий путь $L_{c8}: 8 \rightarrow 10$.

Для $i=7$

$$t_p(7) = \min\{t_p(8) - t(7,8); t_p(19) - t(7,9); t_p(10) - t(7,10)\} =$$

$\min\{22, 23, 28\} = 22$ (суток), т.к. для события 7 существует три последующих пути $L_{c7}: 7 \rightarrow 8 \rightarrow 10, 7 \rightarrow 10, 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ и три

предыдущих события 8, 9 и 10. Аналогично рассчитаем поздние сроки свершения остальных событий и поместим эти значения в нижней части каждого кружка (рисунок 4).

По формуле (5) определим резервы времени i -го события:

$$R(1) = 0; R(2) = 7 - 5 = 2; R(3) = 8 - 8 = 0 \text{ и т.д.}$$

Резерв времени события 2 - $R(2) = 2$ - означает, что время свершения события 2 может быть задержано на двое суток без изменения общего срока выполнения проекта. Анализируя сетью с временными параметрами (рис.4) видим, что не имеют резервов времени события 1, 3, 5, 6, 8, 10. Эти события и образуют критический путь (на рисунке 4 он выделен жирным шрифтом).

Перейдем к параметрам работ.

Отдельная работа может начаться (и закончиться) в ранние, средние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации графика возможно любое размещение работы в данном интервале.

Очевидно, что ранний срок $t_{pn}(i, j)$ начала работы (i, j) совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события i , т.е.

$$t_{pn}(i, j) = t_p(i) \quad (6)$$

Тогда ранний срок t_{po} окончания работы (i, j) определяется по формуле:

$$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t(i, j) \quad (7)$$

Ни одна работа не может закончиться позже допустимого позднего срока своего конечного события j . Поэтому поздний срок $t_{pn}(i, j)$ окончания работы (i, j) определяется соотношением:

$$t_{no}(i, j) = t_n(j), \quad (8)$$

а поздний срок $t_{no}(i, j)$ начала этой работы – соотношением

$$t_{no}(i, j) = t_n(j) - t(i, j) \quad (9)$$

Среди резервов времени работ выделяют четыре их разновидности.

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i, j) показывает, насколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв $R_n(i, j)$ определяется по формуле:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j) \quad (10)$$

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и возможно допустить свершение ее конечного события в его самый поздний срок.

Остальные резервы времени работы являются частями полного ее резерва. Частный резерв времени первого вида $R_1(i, j)$ работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые поздние сроки. $R_1(i, j)$ находится по формуле:

$$R_1(i, j) = t_n(j) - t_n(i) - t(i, j), \quad (11)$$

или

$$R_1(i, j) = R_n(i, j) - R(i) \quad (12)$$

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени $R_2(i, j)$ работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются

в свои самые ранние сроки. $R_2(i, j)$ находится по формуле:

$$R_2(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j), \quad (13)$$

или

$$R_2(i, j) = R_n(i, j) - R(i) \quad (14)$$

Независимый резерв времени R_n работы (i, j) есть часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки:

$$R_n(i, j) = t_p(j) - t_n(i) - t(i, j) \quad (15)$$

или

$$R_n(i, j) = R_n(i, j) - R(i) - R(j) \quad (16)$$

Примечание – Резервы времени работы (i, j) могут состоять из двух временных отрезков, если интервал продолжительности работ $t(i, j)$ занимает промежуточную позицию между двумя его крайними положениями.

Независимые резервы стремятся использовать тогда, когда окончание предыдущей работы хотят выполнить в ранние сроки. Если величина независимого резерва, определяемая формулой (15) или (16), равна нулю или положительна, то такая возможность есть. Отрицательное значение $R_n(i, j)$ не имеет реального смысла, т.к. в этом случае предыдущая работа еще не оканчивается, а последующая уже должна начаться. Фактически независимый резерв имеют лишь те работы, которые не лежат на максимальных путях, проходящих через их начальные и конечные события.

Таким образом, если частный резерв времени первого вида может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих и последующих работ, свободный резерв времени – на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.

Работы, лежащие на критическом пути, также как и критические события, резервов времени не имеют.

Резерв времени пути определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути.

$$R(L) = t_{cp} - t(L) \quad (17)$$

Он показывает, на сколько в сумме могут быть увеличены продолжительности всех работ, принадлежащих этому пути. Если затянуть выполнение работ, лежащих на этом пути, на время, большее, чем $R(L)$, то критический путь переместится на путь L . Отсюда можно сделать вывод, что любая из работ пути L на его участке, несовпадающем с критическим путем (замкнутым между двумя событиями критического пути), обладает резервом времени.

Вычислим в качестве примера временные параметры работ для рассматриваемого сетевого графика (рисунок 4). Результаты расчетов сведем в таблицу 59.

Вычисление временных параметров работы (i, j) покажем на примере работы $(2, 4)$: ранний срок начала работы (по формуле (6)) $t_{pn}(2, 4) = t_p(2) = 5$ (суток); ранний срок окончания работы (по формуле (7)): $t_{po}(2, 4) = t_p(2) + t(2, 4) = 5 + 9 = 14$ (суток); поздний срок начала работы по формуле (9): $t_{pn}(2, 4) = t_n(4) - t(2, 4) = 16 - 9 = 7$ (суток); поздний срок окончания работы (по формуле (8)): $t_{no}(2, 4) = t_n(4) = 16$ (суток).

Таким образом, работа $(2, 4)$ должна начинаться в интервале [5; 7] (суток) от начала выполнения проекта. Полный резерв работы $(2, 4)$ (по формуле (10)):

$$R_n(2, 4) = t_n(4) - t_p(2) - t(2, 4) = 16 - 5 - 9 = 2$$

(суток), т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на двое суток, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится. Частный резерв времени работы $(2, 4)$ первого вида определим по формуле (11) (или по формуле (12)):

$$R_1(2, 4) = t_n(4) - t_p(2) - t(2, 4) = 16 - 7 - 9 = 0$$

суток) (или $R_1(2, 4) = R_n(2, 4) - R_n(2) = 2 - 2 = 0$ (суток)), т.е.

сохранении общего срока выполнения проекта не может быть задержано выполнение работы $(2, 4)$ и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих ей работ (в данном случае без затрат резерва времени одной предшествующей работы $(1, 2)$).

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени, работы $(2, 4)$ найдем по формуле (13) или (14):

$R_c(2, 4) = t_p(4) - t_p(2) - t(2, 4) = 14 - 5 - 9 = 0$ (суток); (или $R_c(2, 4) = R_n(2, 4) - R(2) = 2 - 2 = 0$ (суток)), т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта не может быть задержано выполнение работы $(2, 4)$ (в данном случае работы $(1, 2)$) без назначения резерва времени последующих работ. Независимый резерв времени работы $(2, 4)$ определим по формуле (15) или (16):

$$R_n(2, 4) = t_p(4) - t_n(2) - t(2, 4) = 14 - 7 - 9 = -2.$$

Это означает, что работа $(2, 4)$ продолжительностью 9 (суток) должно закончиться на 14-е сутки после начала комплекса работ, а начаться на 7-е сутки, что естественно невозможно. Поэтому в таблице 59 обозначим прочерком независимые резервы времени, имеющие отрицательное значение. Подчеркнем, что резервы критических работ $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 8)$, $(8, 10)$, также как и резервы критических событий, равны нулю.

Таблица 59 – Временные параметры работ для сетевого графика (рисунок 4), сутки

Работа (i, j)	Продолжительность работы t(i, j)	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работы			
		t_{pi} (i, j)	t_{po} (i, j)	t_{pi} (i, j)	t_{po} (i, j)	$R_{(i,j)}$	$R_{(i,j)}$	$R_{(i,j)}$	$R_{(i,j)}$
(1,2)	5	0	5	2	7	2	2	0	0
(1,3)	8	0	8	0	8	0	0	0	0
(1,5)	8	0	8	4	12	4	4	4	4
(2,4)	9	5	14	7	16	2	0	0	0
(2,5)	3	5	8	9	12	4	2	4	2
(3,5)	4	8	12	8	12	0	0	0	0
(3,9)	12	8	20	15	27	7	7	5	5
(4,8)	7	14	21	16	23	2	0	2	0
(5,6)	6	12	18	12	18	0	0	0	0
(5,9)	10	12	22	17	27	5	5	3	3
(6,7)	3	18	21	19	22	1	1	0	0
(6,8)	5	18	23	18	23	0	0	0	0
(7,8)	1	21	22	22	23	1	0	1	0
(7,9)	4	21	25	23	27	2	1	0	0
(7,10)	6	21	27	28	34	7	6	7	6
(8,10)	11	23	34	23	34	0	0	0	0
(9,10)	7	25	32	2	34	2	0	2	0

Задания

1 Построить сетевую модель, включающую работы А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М, которая отображает следующие отношения упорядочения.

1 А, Б и В – исходные работы комплекса, которые можно начинать одновременно.

2 А и Б предшествует Г.

3 Б предшествует Д, Е и З.

4 Е и В предшествует Ж.

5 Д и З предшествует И и К.

6 В, Г, Е и К предшествует Л.

7 Л предшествует М.

8 И, Ж и М завершающие работы комплекса.

Рассчитать временные параметры построенного сетевого графика при следующих значениях продолжительности работ (таблица 60).

Таблица 60 – Исходные данные

Работы	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
Продолжительность (дни)	3	2	7	5	3	4	6	1	8	3	2	2

2 Построить сетевую модель, включающую работы А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М, которая отображает следующие отношения упорядочения.

1 А, Б и В – исходные работы комплекса, которые можно начинать одновременно.

2 А и Б предшествует Г.

3 Б предшествует Д, Е и З.

4 Е и В предшествует Ж.

5 Д и З предшествует И и К.

6 В, Г, Е и К предшествует Л.

7 Л предшествует М.

8 И, Ж и М завершающие работы комплекса.

Рассчитать временные параметры построенного сетевого графика, при следующих значениях продолжительности работ (таблица 61).

Таблица 61 - Исходные данные

Работы	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
Продолжительность (дни)	2	1	6	4	2	5	7	2	9	4	3	2

3 Построить сетевую модель, включающую работы А, Б, В, ..., М, которая отображает следующие отношения упорядочения.

1 А, Б и В – исходные работы комплекса, которые можно начинать одновременно.

2 А и Б предшествует Г.

3 Б предшествует Д, Е и З.

4 Е и В предшествует Ж.

5 Д и З предшествует И и К.

6 В, Г, Е и К предшествует Л.

7 Л предшествует М.

8 И, Ж и М завершающие работы комплекса.

Рассчитать временные параметры построенного сетевого графика, при следующих значениях продолжительности работ (таблица 62).

Таблица 62 - Исходные данные

Работы	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
Продолжительность (дни)	4	3	9	6	5	3	4	1	7	2	1	2

4 Для подготовки финансового плана на следующий год фирме необходимо получить данные от отделов сбыта, производства, финансов и бухгалтерии. В таблице 63 указаны соот-

ветствующие операции и их продолжительность. Построить сетевую модель и провести расчет ее параметров.

Таблица 63 - Исходные данные

Операция	Описание	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность (в днях)
А	Разработка прогноза сбыта	-	10
В	Изучение конъюнктуры рынка	-	7
С	Подготовка рабочих чертежей изделия и технологии производства	А	5
Д	Разработка календарных планов производства	С	3
Е	Оценка себестоимости производства	Д	2
Г	Определение цены изделия	В, Е	1
Г	Разработка финансового плана	Е, Г	14

5 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 0, завершающим событием 6, и с указанными в таблице 64 продолжительностями работ показана на рисунке 5. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

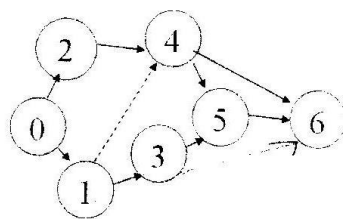


Рисунок 5 – Сетевая модель

Таблица 64 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(0,1)	2
(0,2)	3
(1,3)	2
(1,4)	0
(2,4)	2
(3,5)	3
(3,6)	2
(4,5)	7
(4,6)	5
(5,6)	6

6 Для подготовки финансового плана на следующий год фирме необходимо получить данные от отделов сбыта, производства, финансов и бухгалтерии. В таблице 65 указаны соответствующие операции и их продолжительность. Постройте сетевую модель и проведите расчет ее параметров.

Таблица 65 – Исходные данные

Операция	Описание	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность (в днях)
A	Разработка прогноза сбыта	-	5
B	Изучение конъюнктуры рынка	-	6
C	Подготовка рабочих чертежей изделия и технологии производства	A	7
D	Разработка календарных планов производства	C	4
E	Оценка себестоимости производства	D	8
F	Определение цены изделия	B, E	3
G	Разработка финансового плана	E, F	2

7 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 0, завершающим событием 6, и с указанными в таблице 66 продолжительностями работ показана на рисунке 5. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

Таблица 66 Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(0,1)	3
(0,2)	2
(1,3)	1
(2,3)	1
(2,4)	2
(3,4)	0
(3,5)	4
(3,6)	3
(4,5)	2
(4,6)	1
(5,6)	3

8 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 0, завершающим событием 6, и с указанными в таблице 67 продолжительностями работ показана на рисунке 6. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

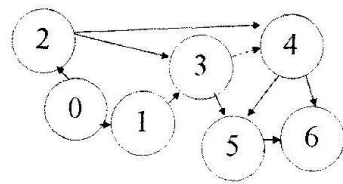


Рисунок 6 – Сетевая модель

Таблица 67 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(0,1)	4
(0,2)	1
(1,3)	5
(2,3)	3
(2,4)	1
(3,4)	0
(3,5)	3
(3,6)	2
(4,5)	4
(4,6)	5
(5,6)	3

9 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 1, завершающим событием 7, и с указанными в таблице 68 продолжительностями работ показана на рисунке 7. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

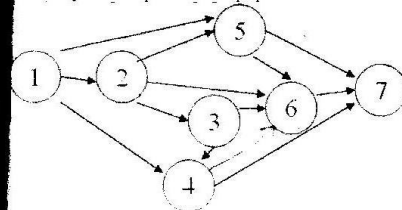


Рисунок 7 – Сетевая модель

Таблица 68 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(1,2)	10
(1,4)	1
(1,5)	5
(2,3)	9
(2,5)	8
(2,6)	10
(3,4)	3
(3,6)	4
(4,6)	5
(4,7)	4
(5,6)	7
(5,7)	3
(6,7)	8

10 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 1, завершающим событием 7, и с указанными в таблице 69 продолжительностями работ показана на рисунке 8. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы

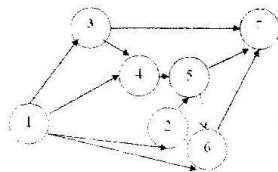


Рисунок 8 – Сетевая модель

Таблица 69 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(1,2)	3
(1,3)	2
(1,4)	1
(1,6)	1
(2,5)	2
(3,4)	3
(3,7)	4
(4,5)	3
(4,7)	2
(5,6)	1
(5,7)	3
(6,7)	1

11 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 1, завершающим событием 5, и с указанными в таблице 70 продолжительностями работ показана на рисунке 9. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

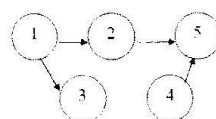


Рисунок 9 – Сетевая модель

Таблица 70 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(1,2)	3
(1,3)	2
(2,5)	2
(3,4)	3
(4,5)	3

12 Сетевая модель комплекса работ с исходным событием 1, завершающим событием 9, и с указанными в таблице 71 продолжительностями работ показана на рисунке 10. Рассчитать величину критического пути и определить параметры событий и работ. Результаты представить графически и в виде таблицы.

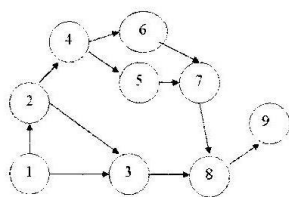


Рисунок 10. Сетевая модель

Таблица 71 – Исходные данные

Исходная работа	Продолжительность, дни
(1,2)	3
(1,3)	2
(2,3)	1
(2,4)	1
(3,8)	2
(4,5)	3
(4,6)	4
(5,7)	1
(6,7)	2
(7,8)	1
(8,9)	3

13 Построить укрупненный сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 72 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 72 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	1
a3	-	3
a4	a1	4
a5	a1, a2	6
a6	a1, a2	2
a7	a3, a6	3

14 Построить укрупненный сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 73 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 73 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	2
a3	-	8
a4	a1	3
a5	a1, a2	4
a6	a1, a2	1
a7	a3, a6	4

15 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 74 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 74 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	2
a3	-	3
a4	a1	1
a5	a1, a2	4
a6	a1, a2	5
a7	a3, a6	2

16 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 75 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 75 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	3
a3	-	4
a4	a1	3
a5	a1, a2	2
a6	a1, a2	1
a7	a3, a6	4

17 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции склада по данным таблицы 76 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 76 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	-	2
a3	-	1
a4	a1	1
a5	a1, a2	2
a6	a1, a2	5
a7	a3, a6	4

18 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции цеха по данным таблицы 77 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 77 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	1
a3	-	3
a4	a1	4
a5	a1, a2	6
a6	a1, a2	2
a7	a3, a6	3
a8	a3, a6	4
a9	a3, a6	1
a10	a4, a5, a7	3
a11	a9	1

19 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции цеха по данным таблицы 78 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 78 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	2
a3	-	3
a4	a1	3
a5	a1, a2	4
a6	a1, a2	1
a7	a3, a6	4
a8	a3, a6	3
a9	a3, a6	2
a10	a4, a5, a7	1
a11	a9	2

20 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции цеха по данным таблицы 79 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 79 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	2
a3	-	3
a4	a1	1
a5	a1, a2	4
a6	a1, a2	5
a7	a3, a6	2
a8	a3, a6	3
a9	a3, a6	1
a10	a4, a5, a7	2
a11	a9	3

21 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции цеха по данным таблицы 80 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 80 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	3
a3	-	2
a4	a1	3
a5	a1, a2	2
a6	a1, a2	1
a7	a3, a6	4
a8	a3, a6	2
a9	a3, a6	2
a10	a4, a5, a7	1
a11	a9	2

22 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 81 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 81 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	-	2
a3	-	1
a4	a1	1
a5	a1, a2	2
a6	a1, a2	3
a7	a3, a6	4
a8	a3, a6	3
a9	a3, a6	2
a10	a4, a5, a7	1
a11	a9	3

23 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 82 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 82 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	-	2
a3	a1	1
a4	a1	1
a5	a2, a3	2
a6	a2, a3	8
a7	a4, a5	4
a8	a6	3

24 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 83 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 83 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	5
a3	a1	3
a4	a1	2
a5	a2, a3	6
a6	a2, a3	5
a7	a4, a5	5
a8	a6	3

25 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 84 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 84 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	a1	2
a3	a1	1
a4	a2	1
a5	a2	2
a6	a4	3
a7	a3	4
a8	a7	3
a9	a5, a6, a8	2

26 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 85 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 85 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	5
a2	a1	10
a3	a1	5
a4	a2	3
a5	a2	5
a6	a4	3
a7	a3	4
a8	a7	5
a9	a5, a6, a8	9

27 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 86 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 86 – Исходные данные

Исходные данные	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	-	2
a3	-	1
a4	a1	1
a5	a1	2
a6	a3	3
a7	a3	4
a8	a2, a5, a6	3
a9	a2, a5, a6	2

Продолжение таблицы 86

a10	a4, a8	1
a11	a7	3

28 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 87 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 87 – Исходные данные

Исходные данные	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	6
a2	-	8
a3	-	2
a4	a1	3
a5	a1	4
a6	a3	6
a7	a3	3
a8	a2, a5, a6	4
a9	a2, a5, a6	4
a10	a4, a8	2
a11	a7	3

29 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 88 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 88 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	3
a3	a1	4
a4	a1	1
a5	a2, a3	2
a6	a2, a3	3
a7	a4, a5	4

30 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 89 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 89 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	4
a2	-	6
a3	a1	2
a4	a1	6
a5	a2, a3	3
a6	a2, a3	3
a7	a4, a5	5

31 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 90 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 90 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	1
a2	-	2
a3	a1	3
a4	a1	2
a5	a2	4
a6	a4, a5	1
a7	a4, a5	5
a8	a3, a6	6

32 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 91 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 91 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	5
a2	-	3
a3	a1	7
a4	a1	6
a5	a2	7
a6	a4, a5	3
a7	a4, a5	10
a8	a3, a6	8

33 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 92 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 92 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	6
a2	a1	8
a3	a1	12
a4	a3	4
a5	a3	12
a6	a4, a5	15
a7	a2, a3	12
a8	a6, a7	8

34 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 93 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица – 93 Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	3
a2	-	6
a3	a1	2
a4	a2, a3	5
a5	a4	4
a6	a5	3
a7	a2, a3	9
a8	a6, a7	3

35 Построить сетевой график выполнения комплекса работ по данным таблицы 94 и рассчитать временные параметры событий и работ сетевого графика.

Таблица 94 – Исходные данные

Исходная работа	Предшествующие работы	Продолжительность, дни
a1	-	2
a2	-	3
a3	a1	1
a4	a2, a3	5
a5	a4	2
a6	a5	3
a7	a2, a3	6
a8	a6, a7	3

Литература

- 1 Балашевич, В. А. Основы математического программирования / В. А. Балашевич – Мн.: Высшая школа, 1985. – 173 с.
- 2 Балашевич, В. А. Математические методы в управлении производством / В. А. Балашевич – Мн.: Высшая школа, 1976. – 336 с.
- 3 Вентцем, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцем – М.: Наука, 1980. – 208 с.
- 4 Гринберг, А. С. Экономико-математические методы и модели / А. С. Гринберг, Т. Н. Гурин. – Мн.: Высшая школа, 1993. – 30 с.
- 5 Пугачева, О. В. Деловые игры в курсе «Системный анализ»: методическая разработка для студентов специальности «Экономическая информатика и АСУ» / О. В. Пугачева – Гомель: ГГУ, 1991. – 48 с.
- 6 Калихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман – Мн.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
- 7 Костевич, Л. С. Теория игр. Исследование операций: учеб. пособие для экон. спец. ВУЗов / Л. С. Костевич, А. А. Лапко – Мн.: Высшая школа, 1982. – 231 с.
- 8 Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич – Мн.: Высшая школа, 1978. – 256 с.
- 9 Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко – Мн.: Высшая школа, 1980. – 300 с.
- 10 Кузнецов, А. В. Сборник задач математическому программированию / А. В. Кузнецов – Мн.: Высшая школа, 1985. – 143 с.
- 11 Пугачева, О. В. Методические указания к решению задач по курсу «Системный анализ» для студентов специальности «Экономическая информатика и АСУ»: в 2 частях.
Часть I. Решение оптимизационных задач. – Гомель: ГГУ, 1991. – 36 с.
Часть II. Основы сетевого планирования и управления. – Гомель: ГГУ, 1991. – 42 с.
- 12 Пугачева, О. В. Методические указания к решению задач по

курсу «Исследование операций и методы оптимизации». – Гомель: ГГУ, 1988. – 34 с.

13 Нарышев, Г. А. Основы исследования операций: методическое пособие по курсу "Основы исследования операций" / Г. А. Нарышев – Гомель: ГГУ, 1979. – 49 с.

14 Перегулов, Ф. М. Введение в системный анализ / Ф. М. Перегулов, Ф. П. Тарасенко – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.

15 Пугачева О.В. Экономико-математические методы и модели в экономике: учебно-методическое пособие для студентов спец. Э.01.03.00 «Экономика и управление на предприятии» / О. В. Пугачева, Г. А. Нарышев – Гомель: ГГУ, 1999. – 63 с.

16 Пугачева О.В. Решение оптимизационных задач средствами Excel. Лабораторный практикум по курсу «Экономико-математические методы» для студентов специальностей Э.01.04.00 «Финансы и кредит» и Э.02.01.00 «Коммерческая деятельность» / О. В. Пугачева – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2000. – 26 с.

17 Сакович, В.А. Исследование операций (детерминированные методы и модели). Справочное пособие / В. А. Сакович – Мн.: Высшая школа, 1984. – 256 с.

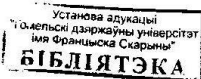
18 Нарышев, Г. А. Сборник задач по курсу "Основы исследования операций" / Г. А. Нарышев, Н. В. Овчинников, В. И. Громов – Гомель: ГГУ, 1981. – 43 с.

19 Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х книгах / Х. Таха – Кн.1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 479 с.

Кн.2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 496 с.

20 Экономико-математические методы и модели: уч. пособие / Н.И. Холод, А.В. [и др.]; под общ. ред. А.В.Кузнецова. – Мн.: БГУ, 1999. – 364 с.

21 Юферова О.Д. Экономико-математические методы и модели: сб. задач / О. Д. Юферова. – Мн.: БГУ, 2002. – 103с.



Учебное издание

Пугачева Ольга Владимировна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов 3 курса экономического факультета

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.

Подписано в печать 22.11.06 Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс». Усл. п. л. 6,7.

Уч.-изд. л.7,0. Тираж 100 экз. Заказ № 42.

1400 - 50

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования

«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ