МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.С. ДАВЫДОВ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

В 2 частях

Часть I

Гомель 2005

УДК 519. 7+ 519. 8 (075. 8)

ББК 22.183 Я73

Д138

Рецензенты:
кафедра автоматизированных систем обработки информации учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»,
В.Д. Левчук, доцент, кандидат технических наук.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» 30 марта 2005 года, протокол № 7.

Давыдов В. С.

Д138 Системный анализ и исследование операций: Практическое пособие. В 2 частях. Ч.I. / В. С. Давыдов; Министерство образования РБ, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины». - Гомель, ГГУ им Ф. Скорины, 2005. – 63 с.

Практическое пособие «Системный анализ и исследование операций» адресовано студентам специальности 1-53 01 02 “АСОИ” и включает теоретические сведения, задания и требования по выполнению практических работ.

УДК 519. 7+ 519. 8 (075. 8)
ББК 22.183 Я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение практических работ по курсу "Системный анализ и исследование операций" призвано помочь студентам в овладении теоретическими знаниями и их применении при решении практических задач

Выполнение практических работ включает:

1. Изучение студентами необходимого теоретического материала по теме работы.
2. Построение алгоритма решения задачи.
3. Составление программы.
4. Решение контрольного примера .

Номер варианта определяется порядковым номером в списке группы.

Каждая работа оформляется отдельно и подшивается в папку.

В данном пособии рассмотрены экстремумы функций, линейное и нелинейное (квадратичное) программирование.

Практическая работа №1

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов поиска экстремумов гладких функций.

Необходимым условием существования экстремума функции $\boldsymbol{f}(\mathbf{X})$ является наличие точек функции, в которых первая производная обращается в нуль $\partial \boldsymbol{f}/\mathbf{dX=0}$.

Для случая двух переменных вид экстремума можно определить с помощью вспомогательных вычислений:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

если a<0, нет ни max ни min (minmax),

a=0, требуются дополнительные исследования,

a>0 и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ <0, max,

a>0 и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ >0, min.

Если функция задана с дополнительными условиями связи $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})=\mathbf{0}$, то составляется вспомогательная функция , составленная из исходной и штрафа из суммы уравнений связи с неизвестными весовыми коэффициентами (множители Лагранжа) $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})= \boldsymbol{f}(\mathbf{X})+ \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ и для полученной новой функции отыскивается экстремум, такой экстремум называют условным.

Вид экстремума определяется по значению дифференциала второго порядка $\mathbf{d^2}\boldsymbol{f}$ или $\mathbf{d^2}\boldsymbol{\Phi}$ с привлечением дополнительного условия $\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{=0}$, используемого для разрешения дифференциалов первого порядка с целью исключения произведений дифференциалов первых порядков в $\mathbf{d^2}\boldsymbol{\Phi}$.

Если дифференциал второго порядка $\mathbf{d^2(M)>0}$, то **M** - точка минимума, если $\mathbf{d^2(M)<0}$, то **M** - точка максимума, иначе вид экстремума не определён.

Задание. Используя данные из таблиц 1.1-1.4, приведенных ниже, найти экстремальные точки и вид экстремума. Построить графики функций с использованием средств программного обеспечения.

Задачи на безусловный экстремум

Таблица 1.1. $\mathbf{f(x,y)=ax^3+ax^2y+bx+1/3y^3+cy}$

Вариант	**a**	**b**	**c**
1	-5/4	-5/2	-11/2
2	-5/4	5/2	½
3	-5/4	-10	-22
4	-5/4	10	2
5	-5/4	-5	-11
6	-5/4	5	1
7	-5/4	-5/2	-19/3
8	-5/4	5/2	-1/3
9	-5/4	-15/2	-19
10	-5/4	15/2	-1
11	-2	-2	-17/8
12	-2	2	7/8
13	-2	-8	-17/2
14	-2	8	7/2
15	-2	-4	-17/4
16	-2	4	7/4
17	-2	-2	-7/3
18	-2	2	2/3
19	-2	-6	-7
20	-2	6	2

Таблица 1.2. $\mathbf{f(x,y)=x^3y^2(ax+bx+c)}$

Вариант	a	b	c
21	-4	-1	1
22	-3	-1	9
23	-1	1	3
24	-5	-1	4
25	-1	-1	7
26	-2	-1	3
27	-4	1	2
28	-2	-1	8
29	-4	-1	4
30	-2	1	6
31	-5	-1	5
32	3	2	1
33	-3	1	5

Задачи на условный экстремум

Таблица 1.3. $\mathbf{f(x,y)=ax^2+2xy+by^2}$ при условии $\mathbf{4x^2+cy^2=9}$

Вариант	a	b	c
1	1	1	3
2	3	4	5
3	1	1	2
4	1	2	6
5	1	1	1
6	3	2	2
7	5	4	3
8	3	5	6
9	7	9	5
10	5	2	1
11	5	8	6
12	5	3	2
13	9	3	1
14	9	7	3
15	3	6	7
16	7	4	2
17	13	4	1
18	7	11	6

Вариант	**a**	**b**	**c**
19	9	5	2
20	7	13	7

Таблица 1.4 $\mathbf{f(x,y)=ax^3+by^3}$ при $\mathbf{x^2+y^2=c}$

Вариант	a	b	c
21	3	2	2
22	7	3	3
23	1	2	5
24	7	2	1
25	3	4	2
26	3	1	3
27	4	3	4
28	1	4	5
29	5	2	2
30	3	5	1
31	1	8	1
32	2	3	1
33	3	2	1

Практическая работа №2

МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов нахождения экстремума функций численными методами.

Несмотря на большие успехи теории математического программирования, еще многие оптимизационные задачи не решены в общем виде. Примеры таких задач можно найти при исследовании систем, деятельность которых не поддается формальному описанию, при оценке наилучшего поведения человека в определенных ситуациях и т. д. Для задач с учетом неопределенности характерно следующее:

а) целевая функция не имеет аналитического выражения или достаточно сложна;

б) значения функции при тех или иных значениях $\boldsymbol{X}$ могут быть получены посредством проведения некоторой операции, которая в дальнейшем будет называться экспериментом, считая, что экспериментом являются и обращение к таблице или памяти ЭВМ, и наблюдение результата на экране моделирующей установки, и непосредственное проведение каких-либо измерений или вычислений и т. п.;

в) представляющее интерес максимальное или минимальное значение целевой функции и соответствующие точки X^* могут быть получены путем проведения ряда однородных экспериментов, число которых ограничено.

Указанные действия составляют процесс поиска экстремума $z = f(X)$ в рассматриваемых специфических условиях.

Правила, по которым ведется поиск, называются стратегиями. Поскольку в рамках одной и той же задачи можно применять различные стратегии поиска **X***, естественно попытаться найти ту из них, которая является наилучшей в смысле уменьшения объема необходимых вычислений, поэтому наряду с главным требованием — найти точку экстремума, возникает дополнительное (но не менее важное) требование выбора стратегии поиска, обладающей нужными свойствами.

Центральным вопросом формирования алгоритма поиска оптимума является вопрос сходимости. Каждый алгоритм предлагает правило, в соответствии с которым определяется очередная точка X_k, подлежащая исследованию с целью подготовки перехода в X_{k+1}. Процесс поиска X^* характеризуется последовательностью переходов (шагов), причем каждый из них дает некоторую информацию о направлении движения, величине очередного шага и т. п.

Градиентные методы.

В общем случае под градиентными методами понимают пошаговую процедуру, в которой направление движения в пространстве из исходной точки осуществляется по градиенту какой-либо функции.

Решение начинают с произвольной допустимой точки (внутри области) $\mathbf{X_0}$, принадлежащей области допустимых решений.

Для перехода в результате итерации от точки $\mathbf{X_k}$ к точке $\mathbf{X_{k+1}}$ в исходной точке $\mathbf{X_k}$ строят вектор направления движения, в котором функция, изменяется в наибольшей степени.

Новая точка итерационного процесса определяется:

$$\mathbf{X_{k+1}=X_k+a_kS_k}$$

где $\mathbf{S_k}$ - вектор перемещения из начальной точки; градиент целевой функции, рассчитанный в точке из которой движемся;
$\mathbf{a_k}$ - длина шага,
$\mathbf{X_k}$ - начальная точка из которой начинается движение.

Выделяется несколько методов: **наискорейшего спуска, Ньютона**, **циклического покоординатного спуска (метод Гаусса-Зайделя)**, метод **конфигураций**.

Наиболее прост в реализации **метод конфигураций**, где поиск ведется при заранее выбранном шаге $\mathbf{a_k=\Delta}$, а $\mathbf{S_k}$**,** заменяется на единичный вектор координат. Задавая от исходной точки $\mathbf{X_k}$ приращение $\mathbf{\Delta}$ с плюсом и минусом по выбранной координате, получим три точки для просчета значения заданной функции, лучшее значение определяет найденную новую точку на выбранной координате и осуществляется циклический переход к следующей координате. Просчет осуществляется до тех пор, пока возможно движение или не достигнута заданная точность вычислений $|Z_{K+1}-Z_K|>\varepsilon$.

Метод дихотомии (половинного деления) – один из самых простых методов поиска x^*, z^*. Его идея и содержание заключается в следующем.

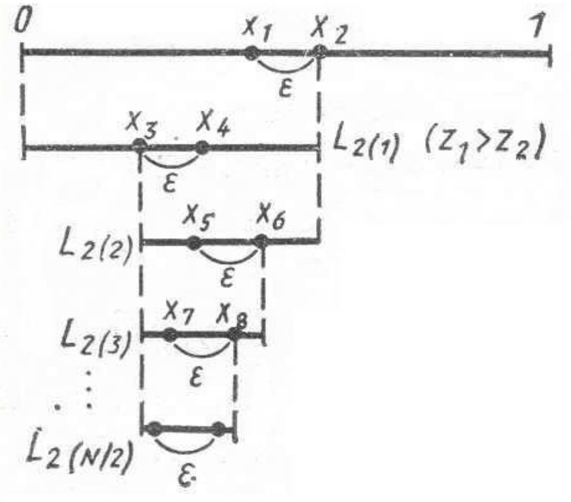

Рис. 2.1

Из N экспериментов, находящихся в распоряжении исследователя, выбираются первые два, и соответствующие x_1, x_2, размещаются на исходном единичном отрезке (Рис.2.1). В результате сравнения полученных z_1 и z_2 обнаруживается интервал неопределенности длиной $L_{(2)1} = (1+\varepsilon)/2$, предназначаемый для дальнейшего исследования. Применительно к нему можно повторить указанные действия используя для этого еще два эксперимента (точки x_3, x_4), и прийти к новому интервалу неопределенности, положение которого связывается с серединой предыдущего интервала, а длина есть $L_{(2)2} = (L_{(2)1}+\varepsilon)/2 = (1+\varepsilon)/4$. Затем выбирается третья пара точек x_5, x_6, размещаемая у середины $L_{(2)2}$ и позволяющая получить $L_{(2)3} = (L_{(2)2}+\varepsilon)/2 = (1+7\varepsilon)/8$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут проведены два последних эксперимента в точках x_{N-1}, x_N. Длина оставшегося интервала неопределенности, характеризующая эффективность метода, есть $L_N = \left[1+\left(2^{N/2}-1\right)\varepsilon\right]/2^{N/2}$**.**

Особенностью рассматриваемой схемы является то, что эффект от очередных двух экспериментов уменьшается по сравнению с эффектом от двух предыдущих экспериментов. Действительно, если к некоторому моменту будут размещены **2N** точек, то величина интервала, содержащего x^*, составит $L_{2(H)} = \left[1+\left(2^H-1\right)\varepsilon\right]/2^H$. Если сделать еще один шаг, т.е. выбрать две новые точки, то окажется $L_{2(H+1)} = \left[1+\left(2^{H+1}-1\right)\varepsilon\right]/2^{H+1}$. Тем самым интервал $L_{2(H)}$ сократится на величину $\Delta = L_{2(H)} - L_{2(H+1)} = (1-\varepsilon)/2^{H+1}$. Не трудно видеть, что Δ тем меньше , чем больше N (номер шага). В пределе (при N→∞) величина Δ стремится к нулю, хотя теоретически возможность размещения очередных точек сохраняется всегда. Преимущество метода дихотомии – предельная простота, однако существуют более совершенные активные стратегии.

Описание алгоритма метода дихотомии.

Начальный этап.

Задать отрезок поиска (X_1,X_2), минимально допустимое расстояние между исследуемыми точками ε.

Основной этап.

Ш а г 1. Вычисляют значения функции в следующих точках: $x_k + \varepsilon/2,\ x_k - \varepsilon/2$, где $x_k = \frac{X_2 - X_1}{2}$, и осуществляют оптимальный выбор:

f(x_{k+1})=выбор{f($x_k + \varepsilon/2$), f($x_k - \varepsilon/2$)}.

Ш а г 2. В зависимости от выбора значения функции изменяют интервал поиска:

X_1=выбор{X_1, $x_k + \varepsilon/2$};

X_2=выбор{$x_k - \varepsilon/2$,X2};

Ш а г 3. Если $X_2 - X_1 <= \varepsilon$, то конец, иначе переход к шагу 1.

К о н е ц.

Метод чисел Фибоначчи

Реализация этого метода связана с использованием последовательности целых чисел, открытой итальянским математиком Леонардом Пизанским (Фибоначчи) в начале XIII века. Математическая последовательность ряда чисел Фибоначчи представляет собой последовательность чисел, где каждый по-следующий член ряда, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

Чтобы лучше представить себе основные идеи, связанные с организацией поиска, рассмотрим пример простейшей задачи поиска.

Предположим, что $X=(x_1)$ и целевая функция обладает такими особенностями: имеет только один максимум (относительный, он же и абсолютный) на интервале определения, может не удовлетворять требованиям непрерывности существования производной во всех точках и т. п.

Чтобы проследить за ходом развития схемы поиска **x*** предположим, что в нашем распоряжении имеется, **N** экспериментов. Оценим ситуацию, которая возникает после того, как в соответствии с некоторой стратегией проведен **N-1** эксперимент и остается выбрать последнее значение $\mathbf{X=X_N}$. К этому моменту гарантированная длина интервала неопределенности становится равной $\mathbf{L_{N-1}}$ (рис. 2.2), а сам интервал содержит точку $\mathbf{X_{N-1}}$, причем среди всех величин, полученных в предшествующих экспериментах, наибольшей является именно $\mathbf{Z_{N-1}}$. Положение $\mathbf{X_{N-1}}$ на отрезке $\mathbf{L_{N-1}}$ зависит от того, какая стратегия была реализована на предыдущих шагах.

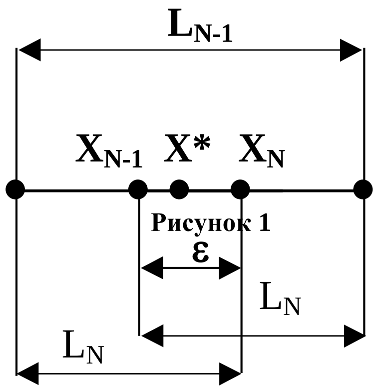

Рис 2.2.

Длина конечного интервала неопределенности будет определяться не только выбираемым $\mathbf{X_N}$, но и уже имеющимся $\mathbf{X_{N-1}}$. Очевидно, результат поиска окажется наилучшим только тогда, когда $\mathbf{X_{N-1}}$ расположится на расстоянии **ε/2** от середины $\mathbf{L_{N-1}}$, в этом случае достаточно разместить точку $\mathbf{X_N}$ симметрично $\mathbf{X_{N-1}}$ и найти $\mathbf{L_N=(L_{N-1}+\varepsilon)/2}$ независимо от того, в. каком отношении находятся $\mathbf{X_N}$ и $\mathbf{X_{N-1}}$. Таким образом, первым требованием к исследуемой схеме является следующее, после проведения **N-1** экспериментов точка $\mathbf{X_{N-1}}$ должна занять на $\mathbf{L_{N-1}}$ положение, указанное на рис.2.2.

Пусть теперь стоит задача выбора двух последних значений $\mathbf{X_{N-1}}$ и $\mathbf{X_N}$ в условиях, когда **N–2** эксперимента проведены и найден интервал $\mathbf{L_{N-2}}$, содержащий точку $\mathbf{X_{N-2}}$, в которой получено значение $\mathbf{Z_{N-2}}$, наилучшее в

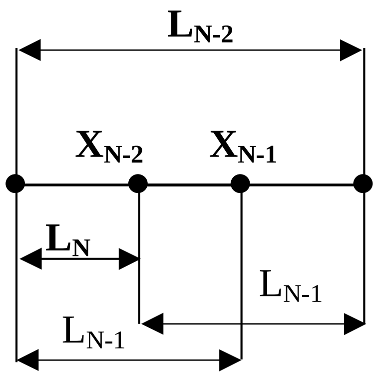

Рис.2.3.

рассматриваемой серии опытов. Начнем выбирать $\mathbf{X_{N-1}}$.(внутри $\mathbf{L_{N-1}}$), как только $\mathbf{X_{N-1}}$ и соответствующее $\mathbf{Z_{N-1}}$ станут известны, можно будет указать новый интервал неопределенности, меньший $\mathbf{L_{N-1}}$. Поскольку заранее нельзя предсказать, будет ли $\mathbf{Z_{N-1}>Z_{N-2}}$, лучше всего расположить точку $\mathbf{X_{N-1}}$ симметрично $\mathbf{X_{N-2}}$ относительно середины интервала $\mathbf{L_{N-2}}$. Предложенный выбор $\mathbf{X_{N-1}}$ дает гарантию того, что длина нового интервала неопределенности не превысит величины $\mathbf{L_{N-1}}$. Зная теперь $\mathbf{X_{N-1}}$ и помня о требовании, отраженном в предыдущем рисунке, приходим к выводу: чтобы получить результат $\mathbf{L_N}$, необходимо два последних эксперимента провести так, как показано на рис.2.3, выполнив тем самым условие

$$\mathbf{L_{N-2}=L_{N-1}+L_N}.$$

Если сделать очередной шаг и поставить задачу: найти $\mathbf{X_{N-2}}$, $\mathbf{X_{N-1}}$, $\mathbf{X_N}$ при известных $\mathbf{L_{N-3}}$, $\mathbf{X_{N-3}}$, $\mathbf{Z_{N-3}}$, то окажется, что рассуждения, приведенные выше, могут быть целиком перенесены и на этот случай.

Основное соотношение, характеризующее изучаемый метод, имеет вид $\mathbf{L_{q-1}=L_q+L_{q+1}}$. Его анализ удобно начать с конкретизации выражений $\mathbf{L_q(q=N,N-1,N-2,\dots)}$, сведя их в таблицу. 2.1.

Таблица 2.1

Q	**Lq**
N	$\mathbf{L_N=L_N}$
N-1	$\mathbf{L_{N-1}= 2L_N-\varepsilon}$
N-2	$\mathbf{L_{N-1}= 3L_N-\varepsilon}$
N-3	$\mathbf{L_{N-1}= 5L_N-2\varepsilon}$
N-4	$\mathbf{L_{N-1}= 8L_N-3\varepsilon}$
N-5	$\mathbf{L_{N-1}= 13L_N-5\varepsilon}$
…	**…**
	$\mathbf{L_q = F_{N-q+1}L_N - F_{N-q-1}\varepsilon}$

Нетрудно заметить, что коэффициенты при $\mathbf{L_N}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ в формулах таблицы составляют последовательность чисел Фибоначчи, задаваемую равенствами $\mathbf{F_0=F_1=1, F_k=F_{k+1}+F_{k+2}}$, где **k** - номер числа, принимающий значения **2, 3, 4,...**.

$$N_Д = 2\log_2\left[(1-\varepsilon)F_N/(1-\varepsilon(F_N - F_{N-2}))\right].$$

Большая эффективность метода чисел Фибоначчи связана с тем, что сокращение длины очередного интервала L_q требует проведения одного нового эксперимента, тогда как в схеме дихотомии их требовалось два.

В заключение рассмотрим вопрос о выборе точки x_1 и связанной с этим возможностью реализации метода. Из предыдущего анализа следует

$\mathbf{x_1 = 1 - L_2}$ но $L_2 = F_{N-1}L_N - \varepsilon F_{N-3}$, $\mathbf{L_N=(1+ \varepsilon F_{N-2})/ F_N}$, и $L_2 = F_N\left[F_{N-1} + \varepsilon(F_{N-1}F_{N-2} - F_N F_{N-3})\right]$.После вычисления $\mathbf{x_1}$ нужно выполнить **N-1** разбиение до точки $\mathbf{x_N}$.

Отсюда следует, что сделать первый шаг можно лишь тогда, когда назначено число **N** , т. е. $\mathbf{x_1 = x_1(N)}$. Это является недостатком, затрудняющим в ряде случаев решение задачи из-за невозможности изменить N после начала экспериментов. Всегда желательно располагать стратегией, не требующей предварительного задания **N** , но приближающейся по своей эффективности к исследованному методу чисел Фибоначчи.

Метод золотого сечения

Выше было показано, что использование рекуррентного соотношения:

$$L_{q-1} = L_q + L_{q+1} (q = \overline{2,N-1})$$

в качестве основы для построения схемы поиска x*, z* оказывается весьма эффективным. Можно ожидать, что ориентация на разные начальные условия позволит найти в рамках этого соотношения разные схемы поиска, каждой из которых присущи свои особенности, но всем им — достаточно высокая эффективность.

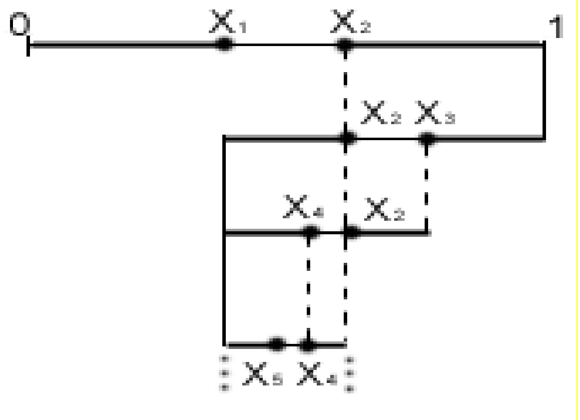

Рис.2.4.

Рассмотрим величину $\tau = L_{q-1} / L_q$ и потребуем ее постоянства при разных q одновременно с выполнением условия $L_{q-1}=L_q+L_{q+1}$. Разделим обе части на $L_{q+1}>0$, получим уравнение $\tau^2=\tau+1$, которому должно удовлетворять τ (здесь $\tau^2 = L_{q-1}/L_{q+1}$). Положительный корень этого уравнения есть

$\tau=(1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$.

Зная τ, можно построить последовательность экспериментов, начиная с $x_1=1-1/\tau=0{,}382$.

$$L_N = 1/\tau^{N-1}.$$

Проводить эксперименты можно до тех пор, пока выполняются условие $L_N \geq 2\varepsilon$, откуда следует $N \leq 1+\lg(1/2\varepsilon)\,(\lg\tau)^{-1}$.

С точки зрения эффективности метод золотого сечения занимает промежуточное положение между методами дихотомии и чисел Фибоначчи.

Задание.

Для функций из работы 1 найти экстремальные точки, приняв **ε=Δ=0.05**. Для метода конфигураций принять начальную точку вблизи найденной экстремальной точки, для других методов окружить экстремальную точку единичным интервалом и с помощью замены переменных сдвинуть его в начало координат, чтобы функция лежала на интервале (0,1), тогда не нужно будет учитывать начальное смещение при каждом вычислении.

Практическая работа №3

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЯ МЕТОДОМ ДЖОНСОНА

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов построения расписания методом Джонсона.

Возникновение теории расписаний связано с так называемой задачей о двух станках, выполняющих **N** работ по установленной очереди. Для таких условий С. Джонсон предложил теорему:

При возможном произвольном выборе имеющихся **N** работ порядок их выполнения, доставляющий **min T**, должен удовлетворять требованиям:

$\mathbf{min(\tau_{\upsilon,1},\ \tau_{\upsilon+1,2})<min(\tau_{\upsilon+1,1},\ \tau_{\upsilon,2}),\ \upsilon=1,N\text{-}1}$.

Здесь первый индекс определяет порядковый номер работы, а второй номер станка.

Обычно задача решается с помощью комбинаторных алгоритмов, однако можно предложить и более простой способ.

Введя замену $\mathbf{min1=min(\tau_{\upsilon,1},\ \tau_{\upsilon+1,2})}$ и $\mathbf{min2= min(\tau_{\upsilon+1,1},\ \tau_{\upsilon,2})}$, условие теоремы можно переписать в виде **min1<=min2**. Тогда условие распространяется на пару соседних столбцов таблицы работ, **min1** определяется по значениям ячеек север-запад юг-восток, а **min2** по значениям ячеек север-восток юг-запад и задача сводится к попарной сортировке столбцов по условию **min1<=min2**.

По результирующей таблице можно подсчитать общее время выполнения задания, используя рекуррентные соотношения

$$\mathbf{T_{\upsilon,1}=T_{\upsilon-1,1}+\tau_{\upsilon,1}}$$
$$\mathbf{T_{\upsilon,2}=max(T_{\upsilon,1}+\tau_{\upsilon+1,1},T_{\upsilon-1,2}+\tau_{\upsilon,2})}$$
$$\mathbf{T=T_{\upsilon,2}}$$

Ниже приведен пример решения задачи расписаний указанным методом.

Исходная таблица

Работы	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{\tau_{\upsilon,1}}$	6	0	5	8	2
$\boldsymbol{\tau_{\upsilon,2}}$	3	2	4	6	1
min1	2	-	-	-	-
min2	0-	-	-	-	

Поскольку условия теоремы не выполнены, требуется переставить 1-й и 2-й столбцы и так далее, пока не будет перестановок.

Общее время выполнения задания **T**=23 условные единицы.

В работе требуется построить расписание прохождения задач с заданной длительностью выполнения на каждом процессоре, минимизирующее общее время выполнение потока задач на двухпроцессорной системе. Используя карту Гантта определить время выполнения задания и сравнить с расчетным.

Результирующая таблица

Работы	2	4	3	1	5
$\boldsymbol{\tau_{\upsilon,1}}$	0	8	5	6	2
$\boldsymbol{\tau_{\upsilon,2}}$	2	6	4	3	1
min1	0	4	3	1	–
min2	2	5	4	2	–
$\mathbf{T_{\upsilon,1}}$	0	8	13	19	21
$\mathbf{T_{\upsilon,2}}$	8	14	19	22	23

Варианты задач даны ниже в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Распределение длительностей работ.

Вариант	Номера работ / Длительность	1	2	3	4	5	6	7	8
1	τ_1	1	8	2	3	4	7	5	1
	τ_2	5	3	4	4	2	9	15	4
2	τ_1	2	6	3	4	8	4	1	5
	τ_2	6	9	7	3	4	1	6	1
3	τ_1	2	4	5	1	6	2	3	9
	τ_2	4	7	3	4	2	5	2	4
4	τ_1	2	4	1	3	5	6	5	4
	τ_2	3	7	9	5	1	2	2	7
5	τ_1	4	5	5	7	8	7	5	4
	τ_2	9	6	4	5	3	2	9	3
6	τ_1	1	3	3	4	5	2	7	5
	τ_2	6	4	8	2	7	1	5	7
7	τ_1	2	4	5	1	6	2	3	9
	τ_2	4	7	3	4	2	5	2	4
8	τ_1	1	2	6	4	4	3	1	3
	τ_2	2	3	5	7	5	1	2	3
9	τ_1	2	4	3	2	6	3	1	2
	τ_2	3	6	5	5	4	1	5	7
10	τ_1	10	5	7	4	4	7	4	9

Вариант	Номера работ / Длительность	1	2	3	4	5	6	7	8
	τ_2	10	2	6	14	8	7	3	5
11	τ_1	3	2	4	1	5	2	3	1
	τ_2	5	4	3	2	4	4	2	3
12	τ_1	8	4	9	7	5	5	3	6
	τ_2	9	4	6	7	5	3	2	4
13	τ_1	2	3	6	8	2	8	1	3
	τ_2	6	7	4	4	1	4	8	8
14	τ_1	1	2	9	7	8	3	4	1
	τ_2	5	5	5	6	4	8	3	4
15	τ_1	1	2	9	7	3	40	15	5
	τ_2	6	4	8	3	24	3	3	1
16	τ_1	2	3	9	7	3	4	6	1
	τ_2	5	1	2	2	4	5	8	1
17	τ_1	3	7	1	5	4	7	5	8
	τ_2	6	4	8	3	2	3	1	7
18	τ_1	4	5	6	8	10	13	10	3
	τ_2	2	3	15	9	4	10	5	1
19	τ_1	1	3	3	8	8	6	2	6
	τ_2	7	7	3	8	5	2	4	5
20	τ_1	2	5	3	4	4	5	6	1
	τ_2	2	5	3	5	3	4	3	8
21	τ_1	1	7	2	5	4	3	8	4
	τ_2	1	3	6	3	5	3	5	2
22	τ_1	2	7	3	6	3	9	4	5
	τ_2	7	7	5	7	6	2	5	10
23	τ_1	1	9	7	2	3	1	5	5
	τ_2	6	8	3	4	2	3	1	3
24	τ_1	1	3	3	8	8	6	2	6
	τ_2	4	7	7	3	5	2	4	5
25	τ_1	1	5	2	2	1	6	3	6
	τ_2	2	4	3	3	8	4	5	6
26	τ_1	3	5	6	12	4	4	2	10
	τ_2	7	6	9	5	12	10	4	3
27	τ_1	1	3	5	8	5	8	9	2

Вариант	Номера работ / Длительность	1	2	3	4	5	6	7	8
	τ_2	10	7	4	7	12	9	6	5
28	τ_1	4	2	9	5	3	3	5	7
	τ_2	5	6	5	7	3	6	2	8
29	τ_1	4	9	7	16	3	8	3	15
	τ_2	15	8	10	14	2	7	5	4
30	τ_1	7	6	1	4	5	3	6	2
	τ_2	2	7	5	4	2	6	5	4
31	τ_1	9	4	1	8	4	5	8	1
	τ_2	4	3	3	9	9	5	2	5
32	τ_1		8	7	6	3	5	3	6
	τ_2	4	3	4	5	7	2	6	3
33	τ_1	5	2	7	2	4	4	5	5
	τ_2	10	3	4	6	9	2	3	7
34	τ_1	6	5	10	3	2	6	10	6
	τ_2	4	4	7	10	7	6	4	7
35	τ_1	6	5	6	9	4	2	3	4
	τ_2	3	4	5	4	8	7	2	2
36	τ_1	5	5	4	6	2	4	6	6
	τ_2	5	5	1	5	7	7	2	7
37	τ_1	4	8	9	6	3	3	10	8
	τ_2	5	7	5	4	6	3	4	3
38	τ_1	4	10	5	6	5	5	4	8
	τ_2	8	7	4	8	4	5	4	6
39	τ_1	4	11	9	10	5	9	8	4
	τ_2	6	8	15	12	7	15	6	7
40	τ_1	4	6	3	8	3	6	7	8
	τ_2	4	15	10	12	7	8	6	3
41	τ_1	4	5	6	7	4	3	8	6
	τ_2	1	4	6	7	4	6	3	8
42	τ_1	4	10	4	8	5	10	6	6
	τ_2	6	10	5	6	3	6	7	8

Практическая работа №4

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов решения задач линейного программирования

Задачи оптимизации в которых целевая функция линейная функция независимых переменных (т.е. имеет вид $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - константы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - переменные, n-произвольное натуральное число) и условия, которые определяют допустимые значения этих переменных, имеющие вид линейных уравнений и неравенств, относят к задачам *линейного программирования.*

Графический метод решения

Наиболее наглядна интерпретация графического метода решения задачи линейного программирования для случая $n = 2$, т.е. для случая двух переменных x_1 и x_2. Оптимальный план, как правило, соответствует какой-то вершине многоугольника, изображающего допустимую область. Положение прямой, задающей целевую функцию, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи.

Первый шаг при использовании графического метода заключается в геометрическом представлении допустимых решений, т.е. построении области (допустимых) решений, в которой *одновременно* удовлетворяются все ограничения модели.

Пусть задана следующая модель:

найти max $z=3x_1+2x_2$

при ограничениях:

$$x_1+2x_2 \le 6 \quad (1),$$
$$2x_1+x_2 \le 8 \quad (2),$$
$$-x_1+x_2 \le 1 \quad (3),$$
$$x_2 \le 6 \quad (4),$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ ограничивают область их допустимых значений первым квадрантом (представляющим собой по определению часть плоскости, расположенную над осью x_1 и правее оси x_2). Другие границы пространства решений изображены на плоскости x_1, x_2 прямыми линиями, построенными по уравнениям, которые получаются при замене знака $\leq$ на знак $=$. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных. Полученное пространство решений – многоугольник *ABCDEF* - показан на рис. 4.1.

В каждой точке, принадлежащей внутренней области или границам многоугольника решений *ABCDEF*, все ограничения выполняются, поэтому решения, соответствующие этим точкам, являются допустимыми.

Пространство решений содержит бесконечное допустимых решений, оптимальное решение можно найти, если выяснить, в каком направлении возрастает целевая функция модели $z=3\ x_1 + 2\ x_2$. Для этого наносят ряд параллельных линий, соответствующих уравнению целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях z, что позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит ее увеличение.

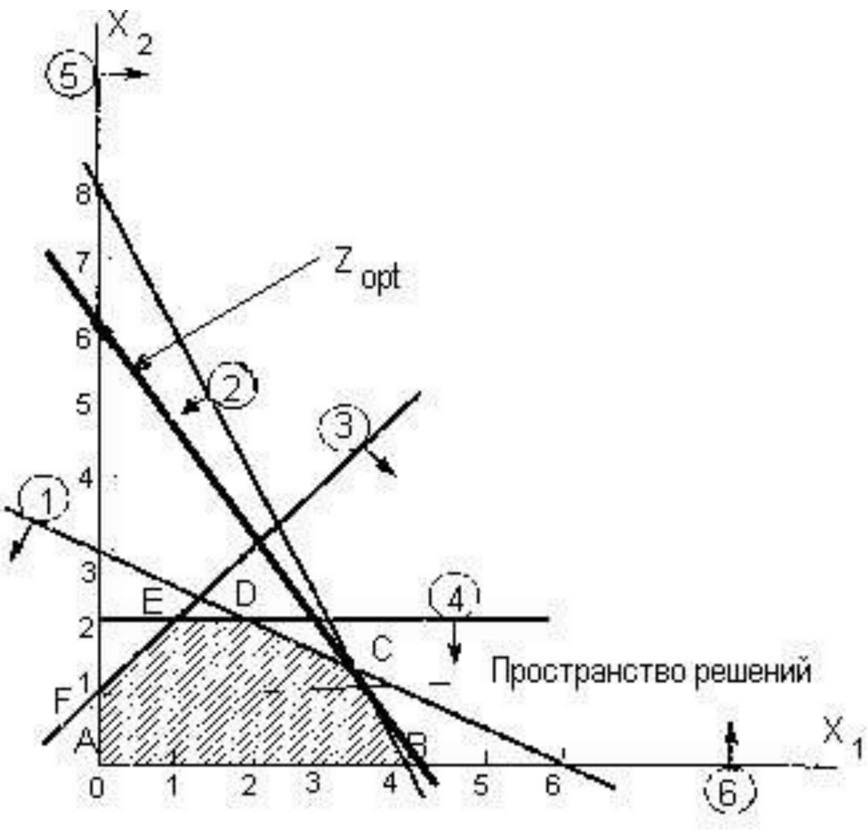

Рисунок 4.1. Многоугольник решений.

Чтобы найти оптимальное решение следует перемещать прямую, характеризующую доход, в направлении возрастания целевой функции, до тех пор пока она не сместится в область недопустимых решений. На рисунке видно, что оптимальному решению соответствует точка C. Так как точка *C* является точкой пересечения прямых (1) и (2), значения x_1 и x_2 в этой точке определяются решением следующей системы двух уравнений:

$$x_1 + 2x_2 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 = 8.$$

Решение указанной системы уравнений дает следующий результат: $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$.. Доход, получаемый в этом случае, составит $z = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3$.

Анализ на чувствительность

Первая задача. Анализ на **чувствительность к правой части ограничений** позволяет ответить на вопрос о допустимом изменении ресурсов без изменения точки оптимума, которая задаётся пересечением прямых (на рисунке 4.1 прямые (1) и (2)). Ограничения, задающие точку пересечения называют связывающими (активными), остальные ограничения не связывающими (неактивными). Для связывающего ограничения соответствующий ресурс называют дефицитным (он использован полностью), остальные – недефицитные. При анализе на чувствительность дефицитные ресурсы повышаются, что приводит к улучшению целевой функции, недефицитные уменьшаются. Изменения ресурсов не должны изменить найденное решение.

Для нашего примера увеличение дефицитного ресурса ограничения (1) приводит к её параллельному сдвигу и возможно до точки пересечения прямых (2) и (4). Координаты точки определяются решением системы уравнений (2)и (4), их решение $x_1=3$, $x_2=2$ и подстановка в (1) даёт $x_1+2x_2=7$. Аналогичные рассуждения для ограничения (2) дают нам точку пересечения прямых (1) и (6), откуда следует $x_1=6$, $x_2=0$ и подстановка в (2) даёт $2x_1+x_2=12$.

Для несвязывающего ограничения (4) прямую можно опустить до точки (С), координаты которой задают прямые (1) и (2), следовательно, уравнение (4) примет вид $x_2=4/3$. Прямую (3) также можно опустить до точки оптимума (С) и ограничение примет вид: $-x_1+x_2=-2$.

Вторая задача анализа на чувствительность отвечает на вопрос: увеличение объёма какого из ресурсов наиболее выгодно?

Для этого рассчитывается **ценность ресурса** как относительное приращение значения целевой функции $y_i=\Delta z_i/\Delta_i$ ресурса. Результаты анализа сводятся в таблицу 4.1.

Таблица 4.1. Изменение ресурсов и их ценность

Ресурс	Тип	Max изменение Δ_i ресурса	Изменение дохода Δz_i	Ценность $y_i=\Delta z_i/\Delta_i$
1	Дефицит	7-6= 1	13-38/3=1/3	1/3
2	Дефицит	12-8= 4	18-38/3=16/3	4/3
3	Недефицит	-2-1= -3	0	0
4	Недефицит	4/3-2= -2/3	0	0

Из таблицы 4.1 видно, что выгоднее вначале увеличивать ресурс (2).

Третья задача анализа на чувствительность отвечает на вопрос допустимого **изменения коэффициентов целевой функции**. Вариация коэффициентов может привести к другому решению, поэтому обычно решается вопрос: каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции не меняющий решения. Изменение одного из коэффициентов целевой функции меняет угол наклона прямой, не изменяя при этом точку оптимума, что приводит к вращению прямой вокруг точки оптимума в секторе прямых, определяющих решение. Так, для нашего примера, сектор задаётся прямыми (1) и (2), в котором проходит прямая Z_{opt}. Записав целевую функцию $z=3x_1+2x_2$ в виде $z=C_1x_1+C_2x_2$, фиксируя один из коэффициентов и приравнивая поочередно к прямым (1) и (2), находим допустимый диапазон.

Таблица 4.2. Изменение коэффициентов целевой функции

Коэффициент	Min	Max
C_1	1	4
C_2	3/2	6

Практическая работа №5

СИМПЛЕКС – АЛГОРИТМ

Стандартная модель

Для построения общего метода решения задач ЛП соответствующие модели должны быть представлены в *стандартной форме*:

1) все ограничения записываются в виде равенств с *неотрицательной правой частью;*

2) значения всех переменных модели неотрицательны;

3) целевая функция подлежит максимизации или минимизации.

Любую линейную модель можно привести к стандартной по следующим правилам:

1. Исходное ограничение, записанное в виде неравенства типа $\le$ ($\ge$), можно представить в виде равенства, прибавляя остаточную переменную к левой части ограничения (вычитая избыточную переменную из левой части).

2. Правую часть равенства всегда можно сделать неотрицательной, умножая обе части, на -1.

3. Любую переменную y_i, не имеющую ограничения в знаке, можно представить как разность двух *неотрицательных* переменных:

$$y_i=y'_i-y''_i, \text{ где } y'_I,y''_i\ge 0.$$

Такую подстановку следует использовать во всех ограничениях, которые содержат исходную переменную y_i, а также в выражении для целевой функции. Обычно находят решение задачи, в котором фигурируют переменные y'_i и y''_i, а затем с помощью обратной подстановки определяют величину y_i. Важная особенность переменных y'_i и y''_i состоит в том, что при любом допустимом решении только одна из этих переменных может принимать положительное значение, т. е. если $y'_i>0$ то $y''_i=0$, и наоборот. Это позволяет рассматривать y'_i как *остаточную* переменную, а y''_i — как *избыточную* переменную, причем лишь одна из этих переменных может принимать положительное значение.

Стандартная модель может быть записана в форме уравнений, в матричной форме или в виде таблицы.

Решение симплекс-методом

При анализе графического метода решения задач линейного программирования было отмечено, что оптимальному решению всегда соответствует одна из *угловых* (или *экстремальных)* точек пространства решений. Именно этот результат и положен в основу построения симплекс-метода.

Симплекс-метод не обладает той наглядностью, которая характерна для геометрического представления пространства решений. В его вычислительной схеме реализуется упорядоченный процесс, при котором, начиная с некоторой исходной *допустимой* угловой точки (обычно начала координат), осуществляются последовательные переходы от одной *допустимой* экстремальной точки к другой до тех пор, пока не будет найдена точка, соответствующая оптимальному решению.

Идею симплекс-метода можно проиллюстрировать на примере модели, рассмотренной выше при графическом решении. Исходной точкой алгоритма является начало координат (точка *А* на рисунке). Решение, соответствующее этой точке, обычно называют *начальным решением.* От исходной точки осуществляется переход к некоторой смежной угловой точке. В рассматриваемом случае это может быть либо точка B, либо точка *F*. Выбор точки зависит от коэффициентов целевой функции. Так как коэффициент целевой функции при x_1 больше коэффициента при x_2, а целевая функция подлежит *максимизации,* требуемое направление перехода соответствует увеличению x_1, что приводит к экстремальной точке B. После этого указанный процесс повторяется, чтобы выяснить, существует ли другая экстремальная точка, соответствующая лучшему допустимому решению (в данном случае большему значению целевой функции). Используя, как и ранее, информацию о целевой функции, можно определить, имеется ли на данном шаге алгоритма такая точка. В результате такой итеративный процесс позволяет найти оптимальную угловую точку С.

Выбор каждой последующей экстремальной точки при использовании симплекс-метода определяется следующими двумя правилами:

1. Каждая *последующая* угловая точка должна быть *смежной* с предыдущей. Например, в пространстве решений, изображенном на рисунке 4.1, невозможен прямой переход от точки А к точке С. Этот переход осуществляется по *границам* (ребрам) пространства решений: от точки А к точке В и лишь затем от точки В к точке С.
2. Обратный переход к предшествующей экстремальной точке не может производиться. Так, при движении в пространстве решений, представленном на рисунке 4.1, не должно быть обратного перехода от точки В к точке А.

Подводя итог изложению идей симплекс-метода, еще раз обратим внимание на то, что отыскание оптимального решения начинается с некоторой *допустимой* угловой точки, и все переходы осуществляются только к *смежным* точкам, причем перед новым переходом каждая из полученных точек проверяется на оптимальность. Таким образом, в данном случае для нахождения оптимального решения требуются три итерации (получаемые решения изображаются точками А, В и С).

Свойство однозначности экстремальных точек позволяет определить их *алгебраическим* методом. Будем считать, что линейная модель стандартной формы содержит m уравнений и n неизвестных ($m \leq n$), а правые части ограничений - неотрицательные. Тогда все допустимые экстремальные точки определяются как все однозначные неотрицательные решения системы m уравнений, в которых n - m переменных равны нулю.

Однозначные решения такой системы уравнений, получаемые путем приравнивания к нулю (n - m) переменных, называются *базисными решениями.* Если базисное решение удовлетворяет требованию неотрицательности правых частей, оно называется *допустимым базисным решением.* Переменные, имеющие нулевое значение, называются *небазисными переменными,* остальные — *базисными переменными.*

Из вышеизложенного следует, что при реализации симплекс-метода алгебраическое определение базисных решений соответствует идентификации экстремальных точек, осуществляемой при геометрическом представлении пространства решений. Таким образом, максимальное число итераций при использовании симплекс-метода равно максимальному числу базисных решений задачи линейного программирования, представленной в стандартной форме. Это означает, что количество итерационных процедур симплекс-метода не превышает $C_m^n = n!/[(n-m)!m!]$.

Вторая из ранее отмеченных закономерностей оказывается весьма полезной для построения вычислительных процедур симплекс-метода, при реализации которого осуществляется последовательный переход от одной экстремальной точки к другой, смежной с ней. Так как смежные экстремальные точки отличаются только *одной* переменной, можно определить каждую последующую (смежную) экстремальную точку путем замены одной из текущих небазисных (нулевых) переменных текущей базисной переменной. Любую последующую экстремальную точку всегда можно определить путем взаимной замены по одной переменной в составе базисных и небазисных переменных (предыдущей смежной точки). Этот фактор существенно упрощает реализацию вычислительных процедур симплекс-метода.

Рассмотренный процесс взаимной замены переменных приводит к необходимости введения двух новых терминов. Включаемой переменной называется небазисная в данный момент переменная, которая будет включена в множество базисных переменных на следующей итерации (при переходе к смежной экстремальной точке). *Исключаемая переменная* — это та базисная переменная, которая на следующей итерации подлежит исключению из множества базисных переменных.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Используя линейную модель стандартной формы, определяют *начальное допустимое базисное решение* путем приравнивания к нулю *n-m* (небазисных) переменных.

Шаг 1. Из числа текущих небазисных (равных нулю) переменных выбирается *включаемая в новый базис переменная,* увеличение которой обеспечивает улучшение значения целевой функции. Если такой переменной нет, вычисления прекращаются, так как текущее базисное решение оптимально. В противном случае осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. Из числа переменных текущего базиса выбирается *исключаемая переменная,* которая должна принять нулевое значение (стать небазисной) при введении в состав базисных новой переменной.

Шаг 3. Находится новое базисное решение, соответствующее новым составам небазисных и базисных переменных. Осуществляется переход к шагу 1.

Поясним процедуры симплекс-метода на примере рассмотренной выше модели.

Сначала необходимо представить целевую функцию и ограничения модели в стандартной форме:

$$
\left.
\begin{array}{llllll}
z-3x_1-2x_2 & & & & =0 & \text{(целевая функция)} \\
 & & & & & \\
x_1+2x_2+s_1 & & & & =6 & \\
2x_1+x_2 & +s_2 & & & =8 & \\
-x_1+x_1 & & +s_3 & & =1 & \text{(ограничения).} \\
\quad x_2 & & & +s_4 & =2 &
\end{array}
\right.
$$

Как отмечалось ранее, в качестве начального пробного решения используется решение системы уравнений, в которой две (6—4) переменные принимаются равными нулю. Это обеспечивает *единственность* и *допустимость* получаемого решения. В рассматриваемом случае очевидно, что подстановка $x_1=x_2=0$ сразу же приводит к следующему результату: $s_1=6$, $s_2=8$, $s_3=1$, $s_4=2$ (т. е. решению, соответствующему точке А на рисунке 4.1). Поэтому точку А можно использовать как начальное допустимое решение. Величина z в этой точке равна нулю.

Преобразовав уравнение целевой функции так, чтобы его правая часть стала равной нулю, можно убедиться в том, что правые части уравнений целевой функции и ограничений полностью характеризуют начальное решение. Это имеет место во всех случаях, когда начальный базис состоит из *остаточных* переменных.

Полученные результаты удобно представить в виде таблицы 5.1. Таблица 5.1 интерпретируется следующим образом. Столбец «Базисные переменные» содержит переменные пробного базиса s_1, s_2, s_3, s_4, значения которых приведены в столбце «Решение». При этом подразумевается, что небазисные переменные x_1 и x_2 (не представленные в первом столбце) равны нулю.

Значение целевой функции $z=3\times0+2\times0+0\times6+0\times8+0\times1+0\times2$ равно нулю, что и показано в последнем столбце таблицы.

Таблица 5.1. Исходная симплекс-таблица

Базисные переменные	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**
Z	1	-3	-2	0	0	0		0
S_1	0	1	2	01	0	0		6
S_2	0	2	1	0	1	0	0	8
S_3	0	-1	1	0	0	1		1
S_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Так как столбец z в анализе не участвует, то его из таблицы можно исключить.

Как определить, является ли полученное пробное решение наилучшим (оптимальным)? Анализируя z-уравнение, нетрудно заметить, что обе небазисные переменные x_1 и x_2, равные нулю, имеют *отрицательные* коэффициенты. Это эквивалентно наличию *положительных* коэффициентов при этих переменных в исходной целевой функции. Так как мы имеем дело с задачей *максимизации,* значение z может быть улучшено при увеличении как x_1, так и x_2 . Однако всегда выбирается переменная с большим абсолютным значением отрицательного коэффициента (в z-уравнении), так как в этом случае оптимум достигается быстрее.

Это правило составляет основу используемого в вычислительной схеме симплекс-метода условия оптимальности, которое состоит в том, что, если в задаче максимизации *все* небазисные переменные в z-уравнении имеют *неотрицательные* коэффициенты, полученное решение является оптимальным. В противном случае в качестве новой базисной переменной следует выбрать ту, которая имеет наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Применяя условие оптимальности к таблице 5.1, выберем в качестве переменной, включаемой в базис, переменную x_1. Исключаемая переменная должна быть выбрана из совокупности базисных переменных s_1, s_2, s_3, s_4. Процедура выбора исключаемой переменной предполагает проверку *условия допустимости,* требующего, чтобы в качестве исключаемой переменной выбиралась та из переменных текущего базиса, которая первой обращается в нуль при увеличении включаемой переменной x_1 вплоть до значения, соответствующего смежной экстремальной точке. Это должно, конечно, выполняться без использования графического метода решения, однако геометрическая интерпретация поможет сформулировать *условие допустимости* в алгебраическом представлении.

В рамках алгебраического представления каждая из таких точек пересечения определяется отношением постоянной правой части ограничения к соответствующему *положительному* коэффициенту при включаемой переменной x_1 . Если коэффициент при x_1 имеет отрицательное или нулевое значение, прямая, представляющая соответствующее ограничение, не пересекается с осью x_1 в области положительных значений. Переменная x_1 достигает максимально допустимого значения, равного 4, в точке B; при этом исключаемой из базиса переменной становится s_2.

Интересующее нас отношение (фиксирующее искомую точку пересечения и идентифицирующее исключаемую переменную) можно определить непосредственно из симплекс-таблицы 5.1. Для этого в столбце, соответствующем вводимой переменной x_1, вычеркиваются отрицательные и нулевые элементы ограничений. Затем вычисляются отношения постоянных, фигурирующих в правых частях этих ограничений, к оставшимся элементам столбца, соответствующего вводимой переменной x_1. Исключаемой переменной будет та переменная текущего базиса, для которой указанное выше отношение минимально.

Симплекс-таблица 5.2, получаемая после проверки *условия допустимости* (т. е. после вычисления соответствующих отношений и определения исключаемой переменной) приведена ниже. Для удобства описания вычислительных процедур, осуществляемых на следующей итерации, введем ряд необходимых определений. Столбец симплекс-таблицы 5.2, ассоциированный с вводимой переменной, будем называть *ведущим столбцом.* Строку, соответствующую исключаемой переменной, назовем *ведущей строкой* (уравнением), а элемент таблицы, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, будем называть *ведущим элементом.*

Ведущий столбец

Таблица 5.2. Определение ведущего элемента

Базисные переменные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение b	Отношения
z	-3	-2	0	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	0	6	6/1
S_2	2	1	2	1	0	0	8	8/2
S_3	-1	1	0	0	1	0	1	
S_4	0	1	0	0	0	1	2	

Ведущая строка

Ведущий элемент

После того как определены включаемая и исключаемая переменные (с использованием условий *оптимальности* и *допустимости),* следующая итерация (поиск нового базисного решения) осуществляется методом исключения переменных, или *методом Гаусса — Жордана.*

Процесс *изменения базиса* включает вычислительные процедуры двух типов.

Тип 1 (формирование ведущего уравнения).

Новая ведущая строка = Предыдущая ведущая строка/ Ведущий элемент

Тип 2 (формирование всех остальных уравнений, включая z-уравнение).

Новое уравнение = Предыдущее уравнение—

— (*Коэффициент ведущего столбца предыдущего уравнения*) *(Новая ведущая строка).*

Выполнение процедуры типа 1 приводит к тому, что в новом ведущем уравнении ведущий элемент становится равным единице. В результате осуществления процедуры типа 2 все остальные коэффициенты, фигурирующие в *ведущем столбце,* становятся равными нулю. Это эквивалентно получению базисного решения путем *исключения* вводимой переменной из всех уравнений, кроме ведущего.

Применяя к исходной таблице процедуру 1, мы делим s_2-уравнение на ведущий элемент, равный 2. Так как в столбце базисных переменных x_1 занимает место переменной s_2, указанная процедура приводит к следующим изменениям исходной симплекс-таблицы (таблица 5.3). Заметим, что в столбце «Решение» теперь фигурирует новое значение переменной x_1(=4), которое равно минимальной величине отношений, анализируемых при проверке условия допустимости.

Таблица 5.3. Новая разрешающая строка

Базисные перемен-ные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Решение **b**
Z							
S_1							
X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	8/2=4
S_3							
S_4							

Чтобы составить новую симплекс-таблицу, выполним необходимые вычислительные процедуры типа 2.

1. z-уравнение.

Предыдущее z-уравнение: (-3 -2 0 0 0 0 0)

-(-3) × Новая ведущая строка: (3 3/2 0 3/2 0 0 12)

=Новое z-уравнение: (1 0 -1/2 0 3/2 0 0 12)

2. s_1-уравнение

Предыдущее s_1-уравнение: (1 2 1 0 0 0 6)

-(1) × Новая ведущая строка: (-1 -1/2 0 -1/2 0 0 -4)

= Новое s_1-уравнение: (0 3/2 1 -1/2 0 0 2)

3. s_3-уравнение.

Предыдущее s_3-уравнение: (-1 1 0 0 1 0 1)

-(-1) × Новая ведущая строка: (1 1/2 0 1/2 0 0 4)

= Новое s_3-уравнение: (0 3/2 0 1/2 1 0 5)

4. s_4-уравнение. Новое s_4-уравнение будет таким же, как и предыдущее, поскольку соответствующий коэффициент ведущего столбца равен нулю.

Результат вычислений с помощью рассмотренных операций представлен в таблице 5.4.

В новом решении x_1=4 и x_2=0 (точка B на рисунке 4.1). Значение z возросло с 0 до 12. Это увеличение обусловлено тем, что прирост x_1 на единицу

Таблица 5.4. Промежуточное решение

Базисные перемен-ные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Ре-ше-ние **b**	Отно-шения
Z	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
S_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	2/(3/2)
X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	4/(1/2)
S_3	0	3/2	0	1/2	0	0	5	5/(3/2)
S_4	0	1	0	0	0	1	2	2/1

обеспечивает увеличение z на 3 единицы; таким образом, прирост целевой функции z составляет: 3×4=12.

Заметим, что симплекс-таблица 5.4 обладает такими же характеристиками, как и предыдущая: только небазисные переменные x_2 и s_2 равны нулю, а значения базисных переменных, как и раньше, представлены в столбце «Решение». Это в точности соответствует результатам, получаемым при использовании метода Гаусса—Жордана.

Из таблицы 5.4 следует, что на очередной итерации в соответствии с условием оптимальности в качестве вводимой переменной следует выбрать x_2, так как коэффициент при этой переменной в z-уравнении равен -1/2. Исходя из условия допустимости, определяем, что исключаемой переменной будет s_1. Отношения, фигурирующие в правой части таблицы 5.4, показывают, что в новом базисном решении значение включаемой переменной x_2 будет равно 4/3 (= минимальному отношению).

Это приводит к увеличению целевой функции на (4/3)×(1/2)=2/3. Оптимальное решение представлено в симплекс-таблице 5.5.

Таблица 5.5. Оптимальное решение

Базисные перемен-ные	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Реше-ние **b**
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	$12^2/_3$
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

1) Новое ведущее (s_1)-уравнение=Предыдущее s_1-уравнение / (3/2).

2) Новое z-уравнение = Предыдущее z-уравнение—(-1/2) × Новое ведущее уравнение.

3) Новое x_1-уравнение = Предыдущее x_1-уравнение—(1/2) × Новое ведущее уравнение.

4) Новое s_3-уравнение = Предыдущее s_3-уравнение — (3/2) × Новое ведущее уравнение.

5) Новое s_4-уравнение == Предыдущее s_4-уравнение— (1) × Новое ведущее уравнение.

В новом базисном решении $x_1=3^1/з$ и $x_2=^1/з$ (точка С на рисунке 4.1) значение z увеличилось с 12 (симплекс-таблица 5.4) до $12^2/_3$ (симплекс-таблица 5.5). Этот результирующий прирост целевой функции $(12^2/3\text{-}12)=2/3$ обусловлен увеличением x_2 от 0 до 4/3, так как из z-строки симплекс-таблицы 5.4 следует, что возрастанию данной переменной на единицу соответствует увеличение целевой функции на $^1/_2$.

Симплекс-таблица 5.5 соответствует оптимальному решению задачи, так как в z-уравнении ни одна из небазисных переменных не фигурирует с отрицательным коэффициентом. Получением этой результирующей таблицы и завершаются вычислительные процедуры симплекс-метода.

В рассмотренном выше примере алгоритм симплекс-метода использован при решении задачи, в которой целевая функция подлежала максимизации. В случае минимизации целевой функции в этом алгоритме необходимо изменить только условие оптимальности: в качестве новой базисной переменной следует выбирать ту переменную, которая в z-уравнении имеет наибольший положительный коэффициент. Условия допустимости в обоих случаях (максимизации и минимизации) одинаковы. Представляется целесообразность дать теперь окончательные формулировки обоим условиям, используемым в симплекс-методе.

Условие оптимальности. Вводимой переменной в задаче максимизации и (минимизации) является *небазисная* переменная, имеющая в z-уравнении наибольший отрицательный (положительный) коэффициент. В случае равенства таких коэффициентов для нескольких небазисных переменных выбор делается произвольно. Если все коэффициенты при небазисных переменных в z-уравнении неотрицательны (неположительны), полученное решение является оптимальным.

Условие допустимости. В задачах максимизации и минимизации в качестве исключаемой переменной выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к (положительному) коэффициенту ведущего столбца минимально. В случае равенства этого отношения для нескольких базисных переменных выбор делается произвольно.

Анализ на чувствительность

Результирующая таблица позволяет непосредственно, либо с помощью несложных дополнительных вычислений получить требуемую информацию для задач анализа.

Ответ на вопрос второй задачи о ценности ресурсов и их статусе содержится непосредственно в таблице. **Статус ресурсов** устанавливается по значению остаточных переменных, если их значение равно нулю (свободные переменные), то соответствующий им ресурс дефицитный, иначе – недефицитный. Из результирующей таблицы следует, что дефицитные ресурсы связаны с переменными S_1 и S_2 и **значения коэффициентов в строке Z** при этих переменных непосредственно **указывают** их **ценность**.

Чтобы определить **интервал изменения ресурса** нужно выполнить дополнительные вычисления. Если на Δ_i меняется величина S_i, то в столбец-решение **b** нужно ввести поправки $+\Delta_i*S_i$, так что новый столбец-решение будет равен $\mathbf{b}+\Delta_i*\mathbf{S_i}$, где $\mathbf{S_i}$ вектор столбец таблицы, соответствующий дефицитному ресурсу S_i. Но базис можно менять только до нулевого значения, отсюда и находится диапазон Δ_i.

Из приведенного выше примера следует
$\mathbf{b}$=($12^2/_3$,4/3,10/3,3,2/3), $\mathbf{S_1}$=(1/3,2/3,-1/3,-1,-2/3),
$\mathbf{b}+\Delta_1*\mathbf{S_1}$=($12^2/_3+1/3\Delta_1, 4/3+2/3\Delta_1, 10/3-1/3\Delta_1, 3-1\Delta_1, 2/3-2/3\Delta_1$),
откуда – ($-2\leq\Delta_1\leq1$),так что $4\leq S_1\leq7$.
Аналогично для $\mathbf{S_2}$=(4/3,-1/3,2/3,1,1/3) имеем
$\mathbf{b}+\Delta_2*\mathbf{S_2}$=($12^2/_3+4/3\Delta_2, 4/3-1/3\Delta_2, 10/3+2/3\Delta_2, 3+1\Delta_2, 2/3+1/3\Delta_2$),
откуда –($-2\leq\Delta_2\leq4$),так что $6\leq S_2\leq12$.

Максимальное изменение коэфффициентов целевой функции (третья задача анализа на чувствительность) определяется следующим образом. Вектор-строка для базисной переменной x_i умножается коэффициент δ_i и прибавляется к строке **z** , так как переменная x_i должна остаться в базисе, то элемент единичной матрицы в строке $\mathbf{x_i}$ не учитывается, считается равным нулю, обозначим её через $\mathbf{x_{i\sim}}$. Для случая max решение остаётся оптимальным, пока не появится отрицательный коэффициент в строке $\mathbf{z}+\delta_i*\mathbf{x_{i\sim}}$ (для min наоборот). Если в таблице присутствует столбец **z**, то его следует исключить из рассмотрения, так как он просто обозначает базисную переменную и обычно в таблицах не используется.

Покажем эти действия на нашем примере.

Исходная целевая функция $z=3x_1+2x_2=c_1 x_1+c_2 x_2$, получен вектор $\mathbf{Z}$=(0, 0, 1/3, 4/3, 0, 0, $12^2/_3$)
После преобразования ветора $\mathbf{X_1}$=(1, 0, -1/3, 2/3, 0, 0, 10/3) имеем $\mathbf{X_1}$=(0, 0, -1/3, 2/3, 0, 0, 10/3) и
$\mathbf{Z}+\boldsymbol{\delta_1}*\mathbf{X_1}$=(0, 0, $1/3-1/3\,\delta_1$, $4/3+2/3\,\delta_1$, 0, 0, $12^2/_3+10/3\,\delta_1$).
Решение: ($-2\leq\delta_1\leq1$), $C_1=c_1+\delta_1$, $1\leq C_1\leq4$.
Аналогично $\mathbf{X_2}$=(0, 1, 2/3, -1/3, 0, 0, 4/3) преобразуется в
$\mathbf{X_{2\sim}}$=(0, 0, 2/3, -1/3, 0, 0, 4/3) и результирующая
$\mathbf{Z}+\boldsymbol{\delta_2}*\mathbf{X_2}$=(0, 0, $1/3+2/3\,\delta_2$, $4/3-1/3\,\delta_2$, 0, 0, $12^2/_3+4/3\,\delta_2$).

Решение: $(-1/2 \le \delta_2 \le 4)$, $C_2 = c_2 + \delta_2$, $3/2 \le C_2 \le 6$.

Результаты анализа совпадают с полученными ранее при геометрическом решении.

Варианты заданий приведены в таблице П.1. Все переменные больше или равны нулю. В случае отсутствия решения поменять знаки неравенств так, чтобы получить допустимую область решений.

Практическая работа №6

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов поиска экстремумов в задачах целочисленного программирования.

На практике часто встречаются задачи, совпадающие по постановке задачи с задачами линейного программирования, но отличающиеся той особенностью, что искомые значения переменных непременно должны быть целыми (например, количество станков, неделимых единиц продукции и т.д.). Такие задачи называют задачами целочисленного программирования; дополнительное условие целочисленности переменных существенно затрудняет их решение.

Метод отсекающих плоскостей

Метод разработан Р.Гомори для задач целочисленного программирования и наиболее прост в реализации для полностью целочисленных задач.

Временно отбросив условия целочисленности, отыскивается оптимальный план задачи линейного программирования. Если окажется, что он не удовлетворяет условию целочисленности, то формируется дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением, которому заведомо удовлетворяет любое целочисленное и не удовлетворяет найденное решение и для новой задачи вновь отыскивается оптимальное решение и так далее циклически до получения решения. Алгоритм решения полностью целочисленных задач иногда называют дробным из-за того, что коэффициенты дополнительного отсечения меньше единицы. Так как все переменные целочисленны, то подбором соответствующих множителей целевую функцию Z также можно считать целочисленной и поэтому строку Z можно считать обычным условием, однако в этом случае может нарушиться условие оптимальности.

Пусть получено оптимальное решение задачи без учета целочисленности, приведенное к виду:

Таблица 6.1. Решение задачи без учета целочисленности

Базис	Решение	x_1	…	x_m	w_1	…	w_j	…	w_r
Z	β_0	0	…	0	c_1		c_j		c_r
x_1	β_1	1	…		α_{11}		α_{1j}		α_{1r}
…	…	0	…						
x_m	β_m	0	…	1	α_{m1}		α_{mj}		α_{mr}

Для любой строки $x_i= \beta_i-\Sigma\ \alpha_{ij}\ w_j=$, $j=1,m$. Любая из строк с нецелым x_i может быть выбрана в качестве производящей для построения отсечения.

Выделяя из β_i и α_{ij} нижнюю целую часть и остатки f_i и f_{ij} соответственно, $0<f_i<1,0\le f_{ij}<1$, можно записать условие отсечение в виде

$S_i= -f_i+\Sigma\ f_{ij}\ w_j$ и добавить его к полученной ранее таблице, как показано ниже

Таблица 6.2. Добавление отсечения

Базис	Решение	x_1	…	x_m	w_1	...	w_j	…	w_r	s_i
Z	β_0	0	…	0	c_1		c_j		c_r	0
x_1	β_1	1	…		α_{11}		α_{1j}		α_{1r}	0
…	…	0	…							0
x_m	β_m	0	…	1	α_{m1}		α_{mj}		α_{mr}	0
s_i	$-f_i$	0	0	0	$-f_{i1}$		$-f_{ij}$		$-f_{ir}$	1

Выбор столбца k производится по min отношению коэффициентов целевой функции к отрицательным коэффициентам f_{ij} , взятых по абсолютному значению. Такой метод решения носит название двойственного, так как используется свойство двойственной задачи: целевая функция переходит в столбец-решение.

Для ускорения решения выбор производящей строки i производится по эмпирическому правилу:

1) i определяется $\max_i\{f_i\}$,

2) если f_i одинаковы, то выбор i определяется по выполнению условия для строк i и k: остатки $f_{ij} \le f_{kj}$, (правило Парето).

3) Паретовское правило может быть заменено эмпирическим:

$\max_i\{f_i/\Sigma f_{ij}\}$, где сумма берется по j-м элементам i-ой строки.

Рассмотрим выше приведенное решение, дополнив его условием целочисленности.

Оптимальное решение без ограничений на целочисленность дано ниже в таблице 6.3, где добавочные переменные переобозначены через X_i.

Матрица остатков приведена в таблице 6.4. Строка X_6 (и Z) по первому правилу даёт S_1=-2/3+1/3X_3+1/3X_4 и добавление в таблицу 6.3 даёт новую таблицу 6.5.

Используя свойство двойственного метода находим переменную X_3, которую следует перевести в базис. Преобразования дают оптимальное решение, представленное в таблице 6.7.

Таблица 6.3. Решение без учета целочисленности

Базисные переменные	Решение **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1

Таблица 6.4. Матрица остатков

Базисные переменные	Остатки $\mathbf{f_i}$	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	f_{i4}	f_{i5}	f_{i6}
Z	2/3	0	0	1/3	1/3	0	0
X_2	1/3	0	0	2/3	2/3	0	0
X_1	1/3	0	0	2/3	2/3	0	0
X_6	2/3	0	0	1/3	1/3	0	0

Таблица 6.5. Включение отсечения

Базисные переменные	Решение b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	0
S_1	-2/3			-1/3	-1/3			1

Таблица 6.7. Оптимальное целочисленное решение

Базисные переменные	Решение **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	0	2/3	0	0	1
X_2	0	0	1	0	-1	0	0	2
X_1	4	1	0	0	1	0	0	1
X_5	1	0	0	0	2	1	0	-3
X_6	2	0	0	0	1	0	1	-2/3
X_3	2			1	1			-3

Полученное решение оптимально и целочисленно.

Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ — один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, каждое из которых этим же способом снова разбивается на подмножества. Процесс продолжается до тех пор, пока не получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи.

Для задач линейного программирования решение ищется следующим образом.

Первоначально находим оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Пусть им является план $\mathbf{X}_0$. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи и $F_{max} = F(\mathbf{X}_o)$.

Если же среди компонент плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи. Покажем, как это можно сделать, предварительно отметив, что $F(\mathbf{X}_0) \geq F(\mathbf{X})$ для всякого последующего плана $\mathbf{X}$.

Предполагая, что найденный оптимальный план $\mathbf{X}_0$ не удовлетворяет условию целочисленности переменных, тем самым считаем, что среди его компонент есть дробные числа. Пусть, например, переменная x_{i_0} приняла в плане X_0 дробное значение. Тогда в оптимальном целочисленном плане ее значение будет по крайней мере либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_{i_0}, либо больше или равно ближайшему большему целому числу K_{i_0} + 1. Определяя эти числа, находим решение двух задач линейного программирования:

$$(I)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, \left(t=\overline{1,m}\right) \\ x_{t0} \le K_t \\ x_j \ge 0, \left(j=\overline{1,n}\right) \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, \left(t=\overline{1,m}\right) \\ x_{t0} \ge K_t + 1 \\ x_j \ge 0, \left(j=\overline{1,n}\right) \end{cases}$$

Возможен один из следующих четырех случаев решения задач линейного программирования (I) и (II):

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нем и дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).
3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и он вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение. Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные (I) и (II).
4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции яв-

ляется наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и строим две задачи, аналогичные (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи, а каждая соединенная с ней ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. При этом на каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение функции является наибольшим. Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные компоненты, и значение функции на нем окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нем является максимальным.

Итак, процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ включает следующие основные этапы:

1. Находят решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляют дополнительные ограничения для одной из переменных, значение которой в оптимальном плане задачи является дробным числом.
3. Находят решение задач (I) и (II), которые получаются из предыдущей задачи в результате присоединения дополнительных ограничений.
4. В случае необходимости составляют дополнительные ограничения для переменной, значение которой является дробным, формулируют задачи, аналогичные задачам (I) и (II), и находят их решение. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая целочисленному плану задачи и такая, что значение функции в этой вершине больше или равно значению функции в других возможных для ветвления вершинах.

Рассмотрим решение на предыдущем примере. Оптимальное решение без учета целочисленности представлено в таблице 6.8.

Шаг1. Пусть разбиение на два подмножества задаёт переменная X_1.Тогда нужно ввести два ограничения: $X_1 \leq 3$ и $X_1 \geq 4$.

Таблица 6.8. Оптимальное решение без учета целочисленности

Базисные перемен-ные	Реше-ние **b**	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1

Рассмотрим левую ветвь. Добавляя переменную S_1 в левую часть получим ограничение-равенство в виде $S_1=3-X_1$ и заменяя X_1 строкой из таблицы (X_1 базисная), получим таблицу 6.9.

Таблица 6.9. Введено отсечение $S_1=3-X_1$

Базисные перемен-ные	Реше-ние b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	$12^2/_3$	0	0	1/3	4/3	0	0	0
X_2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	0
X_1	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	0
X_5	3	0	0	-1	1	1	0	0
X_6	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	0
S_1	-1/3	0	0	1/3	-2/3	0	0	1

Заметим, что ограничение в стиле метода отсекающих плоскостей имеет вид: $S_1=-1/3-(1/3\ X_3-2/3\ X_4)$ или $1/3\ X_3-2/3\ X_4) \leq -1/3$. Решая обычным образом, получим оптимальное решение (табл.6.10).

Таблица 6.10.Оптимальное решение с $S_1 = 3 - X_1$

Базисные перемен-ные	Реше-ние b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	1	0	0	0	2
X_2	3/2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2
X_1	3	1	0	0	0	0	0	1
X_5	5/2	0	0	-1/2	0	1	0	3/2
X_6	1/2	0	0	-1/2	0	0	1	1/2
X_4	1/2	0	0	-1/2	1	0	0	-3/2

Шаг2. Рассмотрим следующее разбиение по $X_2 \leq 1$ и $X_2 \geq 2$ и вновь пойдём по левой ветви. Получим: $X_2+S_2=1$, $S_2 =-1/2-(-1/2\ X_3+1/2\ S_1)$ и после преобразований результат представлен в таблице 6.11.

Таблица 6.11. Введено отсечение $S_1 = 3 - X_1$ и $S_2 = 1 - X_2$

Базисные перемен-ные	Реше-ние b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2
Z	11	0	0	0	0	0	0	3	2
X_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1
X_1	3	1	0	0	0	0	0	1	
X_5	2	0	0	0	0	1	0	-1.2	-2
X_6	1	0	0	0	0	0	1	1/2	
X_4	1	0	0	0	1	0	0	-2	-1
X_3	1	0	0	1	0	0	0	-1	-2

Шаг 3. Возвращаясь к шагу 2, выберем правую ветвь $X_2 \geq 2$, соответствующее отсечение $S_2=-1/2-(1/2\ X_3-1/2\ S_1)$ и после преобразований получим таблицу 6.12. Полученное в табл.6.12 решение хуже, чем в шаге 2.

Шаг 4. Возвращаемся к шагу 1 и выберем правую ветвь $X_1 \geq 4$, что соответствует сечению $S_1= -2/3-(-1/3\ X_3+2/3\ X_4)$.

Результат представлен в таблице 6.13. Все переменные целочисленные, решение наилучшее, что определяет конец поиска.

Таблица 6.12. Введено отсечение $S_1 = 3 - X_1$ и $S_2 = X_2 - 2$

Базисные перемен-ные	Реше-ниеb	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2
Z	10	0	0	3	0	0	0	2	4
X_2	2	0	1	0	0	0	0	-1/2	-1
X_1	2	1	0	1	0	0	0	1	2
X_5	1	0	0	1	0	1	0	3/2	3
X_6	0	0	0	0	0	0	1	1/2	1
X_4	2	0	0	-2	1	0	0	-3/2	-3
S_1	1	0	0	-1	0	0	0	1	-2

Таблица 6.13. Введено отсечение $S_1 = X_1 – 4$

Базисные перемен-ные	Реше-ние b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1
Z	12	0	0	0	2/3	0	0	1
X_2	0	0	1	0	-5/3	0	0	2
X_1	4	1	0	0	4/3	0	0	-1
X_5	1	0	0	0	3	1	0	-3
X_6	2	0	0	0	5/3	0	1	-2
X_3	2	0	0	1	2	0	0	-3

Сравнивая решение методом Гомори и найденное, заметим, что строка Z и столбец-решение совпадают.

Варианты заданий приведены в таблице П.1. Все переменные больше или равны нулю и целые. В случае отсутствия решения поменять знаки неравенств так, чтобы получить допустимую область решений.

Практическая работа №7

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы: Изучение теоретических и практических приёмов поиска экстремумов в задачах квадратичного программирования.

Нелинейное программированое

Рассмотрим следующую задачу:

Максимизировать $\mathbf{z=f(X)}$

при ограничениях $\mathbf{g(X)\le 0}$.

Ограничения-неравенства можно преобразовать к виду равенств путем введения соответствующих *неотрицательных* дополнительных переменных. Таким образом, автоматически учитывая требование неотрицательности, определим $\mathbf{S^2_j\ge 0}$ как дополнительную переменную, которую следует прибавить к левой части *i-го* ограничения $\mathbf{g_i(X)\le 0}$.

Пусть $\mathbf{S=(S_1, S_2,\ldots, S_m)^T}$ и $\mathbf{S^2 =(S^2{}_1,S^2{}_2,\ldots,S^2{}_m)^T}$,

где m — общее количество ограничений-неравенств.

При этом функция Лагранжа записывается в следующем виде:

$$\mathbf{L(X, S, \lambda)=f(X)-\lambda[g(X)+S^2],}$$

при заданных ограничениях $\mathbf{g(X)\le 0}$.

Необходимым условием оптимальности является неотрицательность (неположительность) $\boldsymbol{\lambda}$ в задаче максимизации (минимизации). Если же ограничения заданы в виде равенств $\mathbf{g(X)=0}$, то на знак $\boldsymbol{\lambda}$ никаких условий не накладывается.

Необходимые условия Куна -Таккера, которым должны удовлетворять X и λ, определяющие стационарную точку в задаче максимизации:

$\boldsymbol{\lambda\ge 0},$

$\mathbf{\nabla f(X)-\lambda\nabla g(X)=0},$

$\mathbf{\lambda_i g_i(X)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,m},$

$g(X)\leq 0$.

Эти условия применимы также к задаче минимизации, если вместо условия неотрицательности λ ввести требование неположительности. Если же ограничения заданы в виде равенств, то на знак соответствующих множителей Лагранжа никаких условий не накладывается как в случае максимизации, так и в случае минимизации.

Условия Куна – Таккера представляют наиболее общий результат, имеющий отношение к задачам нелинейного программирования.

Квадратичное программирование

Модель квадратичного программирования определяется следующим образом:

максимизировать (или минимизировать) $\mathbf{z=CX+X^{T}DX}$

при ограничениях

$\mathbf{AX\leq B,\ X\geq 0}$,

где

$\mathbf{X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T}$,

$\mathbf{C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)}$,

$\mathbf{B=(b_1,b_2,\ldots,b_m)^T}$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & . & . & . & d_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ d_{n1} & . & . & . & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Функция $\mathbf{X^TDX}$, где $\mathbf{D}$–симметрическая матрица, является квадратичной формой.

Решение сформулированной задачи можно найти путем непосредственного использования необходимых условии Куна – Таккера.

В общей постановке задача записывается следующим образом:

максимизировать **z=CX+X ^T^DX**

при ограничениях

$$G(X)=\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} X-\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \le 0.$$

Введем множители Лагранжа

$\boldsymbol{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)^T}$, и $\boldsymbol{\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)^T}$

соответствующие ограничениям **AX-B≤0** и **–X≤0** соответственно. Воспользуемся условиями Куна – Таккера:

$\boldsymbol{\lambda\ge 0,\ \mu \ge 0,}$

$\boldsymbol{\nabla z-(\lambda^T,\ \mu^T)\nabla G(X)=0,}$

$$\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j)=0, i=1,2,...,m,$$

$\boldsymbol{\mu_j x_j=0,\ j=1,2,\ldots,n,}$

AX≤B, -X≤0.

Далее получаем

$\boldsymbol{\nabla z=C+2X^TD,}$

$$\nabla G(X)=\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}.$$

Обозначим через **S=B-AX≥0** вектор дополнительных переменных. Записанные выше условия принимают следующий вид:

$\boldsymbol{-2X^TD+\lambda^TA-\mu^T=C,}$

AX+S=B,

$\boldsymbol{\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i}$, для всех **i** и **j**,

$\boldsymbol{\lambda,\ \mu,\ X,\ S\ge 0}$.

Так как $\mathbf{D^T=D}$, в результате перехода к транспонированным матрицам в первой группе уравнений получим

$\boldsymbol{-2XD+\lambda A^T-\mu=C^T}$.

В окончательной форме запись необходимых условий выглядит так:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} -2D & A^T & -I & 0 \\ \hline A & 0 & 0 & I \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ \mu \\ S \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^T \\ B \end{pmatrix},$$

$\mu_j x_j = 0, \quad \lambda_i S_i = 0, \quad \lambda, \mu, X, \quad S \geq 0$, для всех **i** и **j**.

Все полученные уравнения, за исключением $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$, содержат линейные функции переменных **X**, **λ**, **μ** и **S**. Таким образом, исходная задача эквивалентна задаче нахождения решения системы линейных уравнений, удовлетворяющего дополнительным условиям $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$. Допустимое решение, которое удовлетворяет всем этим условиям, оказывается единственным и оптимальным.

Выполнение условия $\mu_i x_j = 0 = \lambda_i S_i$ означает, что переменную S_i нельзя сделать базисной, если λ_i в базисном решении принимает положительное значение. Аналогично μ_j и x_j не могут принимать положительные значения одновременно.

Для решения полученной системы уравнений удобно применить метод искусственных переменных. Введём вспомогательную функцию

$\omega = \sum r_i, \ r_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n$, и найдём её min.

Так как min =0 достигается при нулевых значениях r_i, то полученное опорное решение будет базисным, единственным и оптимальном, а задача в матричной форме примет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -2D_{n\times n} & A^T{}_{n\times m} & -I_n & 0 & I_n \\ \hline A_{m\times n} & 0 & 0 & I_m & 0 \\ \hline \multicolumn{5}{c}{\omega} \end{array}\right)\begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ \mu \\ S \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T{}_n \\ B_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как ω записана как –1 в матрице справа, то разрешая её переменные r_i через свободные переменные получаем обычную задачу линейного программирования с необходимостью отслеживания дополнительных условий Куна – Таккера $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$.

Остаётся открытым вопрос нахождения матричной формы в случае задания z полиномом. Квадратичная функция может быть представлена через её частные производные так:

$$z = \left[\frac{\partial z}{\partial x_i} \right] \times X + X^T \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{\partial z}{\partial x_i \partial x_j} \right] \times X$$

или в операторных обозначениях $\mathbf{z=\nabla zX+X^T 1/2\nabla^2 zX}$, откуда следует, что

$$\mathbf{C=\nabla z,}$$

$$\mathbf{D=1/2\nabla^2 z}.$$

Проверку допустимости полученного решения нетрудно осуществить путем его подстановки в систему неравенств $\mathbf{AX \le B,\ X \ge 0}$.

Ниже приведён пример решения задачи:

Найти $\max z=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$

при ограничениях $x_1+2x_2 \le 2$, $x_1,x_2 \ge 0$.

Итак $C=(4,6)$, $A=(1,2)$, $B=(2)$, $S=(s_1)$, $\mu=(\mu_1, \mu_2)$ и подстановка в основное уравнение даёт

В матричной форме задача запишется так:

$$\left(\left| \begin{array}{cc|c|cc|c} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \right) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline \lambda_1 \\ \hline \mu_1 \\ \mu_2 \\ \hline s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ \hline 2 \end{pmatrix}$$

Представим матричное уравнение в виде симплекс-таблицы. Введём искусственные переменные r_1 и r_2 в первые два уравнения, чтобы получить базис. Вспомогательную функцию $\omega= r_1+r_2$ можно непосредственно записать в строку табли-

$$\max z = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{при} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le 2, \quad X \ge 0$$

цы, представив её в стандартной форме $\omega-(r_1+r_2)=0$. Заменяя базисные переменные r_1 и r_2 через их значения получим функцию

ω, выраженную через свободные переменные. Таблица 7.1 готова для анализа и оптимизации.

Таблица 7.1. Исходная таблица

Базисные перемен-ные	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	r_1	r_2	Решение b
r_1	4	2	1	-1	0	0	1	0	4
r_2	2	4	2	0	-1	0	0	1	6
s_1	1	2	0	0	0	1	0	0	2
ω	6	6	3	-1	-1	0	0	0	10

Шаг1. Строка ω указывает на выбор первого столбца, а минимальное отношение элементов столбца b к элементам столбца x_1 определяет выбор разрешающей строки r_1.Переменные x_1 и r_1 меняются местами, поскольку μ_1 свободная переменная, то выбор не нарушает дополнительных условий Куна-Таккера и допустим.

Нормируя строку r_1 и проделав равносильные преобразования с целью получения столбца единичной матрицы, получим таблицу 7.2.

Таблица 7.2. Шаг 1 задачи квадратичного программирования

Базисные перемен-ные	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	r_1	r_2	Решение b
x_1	1	1/2	1/4	-1/4	0	0	1/4	0	1
r_2	0	3	3/2	1/2	-1	0	-1/2	1	4
s_1	0	3/2	-1/4	1/4	0	1	-1/4	0	1
ω	0	3	3/2	1/2	-1	0	-3/2	0	4

Шаг 2. Функция указывает на выбор второго столбца, а отношение b/ x_2 определяет строку s_1.Переменная x_2 переходит в базис, а μ_2 остаётся в числе свободных, что не нарушает дополнительных условий. Результат представлен в таблице 7.3.

Таблица 7.3. Шаг 2 задачи квадратичного программирования

Базисные перемен-ные	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	s_1	r_1	r_2	Решение b
x_1	1	0	1/3	-1/3	0	-1/3	1/3	0	2/3
r_2	0	0	2	0	-1	-2	0	1	2
x_2	0	1	-1/6	1/6	0	2/3	-1/6	0	2/3
ω	0	0	2	0	-1	-2	-1	0	2

Шаг 3. Функция ω указывает на выбор столбца λ_1 , а минимальное отношение у строки r_2 и следовательно в базис переходит λ_1, а соответствующая ей переменная s_1 остаётся в числе свободных. Операция допустима и после преобразований имеем таблицу 7.4.

Решение закончено. Вспомогательные столбцы r_1 и r_2 и строку ω можно удалить. Результат представлен в таблице 7.5.

Таблица 7.4. Шаг 3 задачи квадратичного программирования

Базисные перемен-ные	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	S_1	r_1	r_2	Решение b
x_1	1	0	0	-1/3	1/6	0	1/3	-1/6	1/3
λ_1	0	0	1	0	-1/2	-1	0	1/2	1
x_2	0	1	0	1/6	-1/12	1/2	-1/6	1/12	5/6
ω	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Таблица 7.5. Оптимальное решение

Базисные переменные	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	S_1	Решение b
x_1	1	0	-0	-1/3	1/6	0	1/3
λ_1	0	0	1	0	-1/2	-1	1
x_2	0	1	0	1/6	-1/12	1/2	5/6

Оптимум достигнут. Дополнительные условия условий Куна – Таккера $\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i$.выполнены и решение есть $x_1=1/3$, $x_2=5/6$, $z=4\ ^3/_{18}$.

Варианты заданий задач квадратичного программирования приведены в таблице П.2. Все переменные больше или равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1988.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М., Наука, 1980.
4. Вентцель Е. С. «Исследование операций»-М.: Наука, 1980
5. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.-2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1987.
6. Давыдов Э. Г. Исследование операций : Учебное пособие для студентов вузов. - М. : Высш. шк., 1990.
7. Дегтярев Ю. И. Методы оптимизации. М. Сов. Радио, 1980.
8. Дегтярев Ю. И. Исследование операций : Учебник для вузов по спец. АСУ.- М. : Высш. шк., 1986.- 320 с.: ил.
9. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сб. задач 2-е изд., перераб. и доп. - К.: Высш. шк.,1990.
10. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев, Вища школа, 1988.
11. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с фр. и предисловие А.И. Штерна. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит.,1990.
12. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.2. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.
13. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.

N	Функция	Ограничения
1	$\max F=3x_1-2x_2$	$2x_1+x_2\le 11$, $3x_1+2x_2\le 10$, $3x_1+4x_2\ge 20$
2	$\max F=7x_1+6x_2$	$2x_1+5x_2\ge 10$, $5x_1+2x_2\ge 10$, $x_1\le 6$, $x_2\le 5$
3	$\min F=5x_1-3x_2$	$3x_1+2x_2\ge 6$, $2x_1-3x_2\ge -6$, $x_1-x_2\le 4$, $4x_1+7x_2\le 28$
4	$\max F=x_1+2x_2$	$2x_1+x_2\le 14$, $-3x_1+2x_2\le 9$, $3x_1+4x_2\ge 27$
5	$\max F=7x_1-2x_2$	$5x_1-2x_2\le 3$, $x_1+x_2\ge 1$, $-3x_1+x_2\le 3$, $2x_1+x_2\le 4$
6	$\max F=2x_1+x_2$	$x_1-2x_2\ge 4$, $5x_1+2x_2\ge 10$, $4x_1-3x_2\le 12$, $7x_1+4x_2\le 28$
7	$\max F=2x_1+2x_2$	$3x_1-2x_2\ge -6$, $x_1+x_2\ge 3$, $x_1\le 3$, $x_2\le 5$
8	$\max F=2x_1-4x_2$	$8x_1-5x_2\le 16$, $x_1+3x_2\le 2$, $2x_1+7x_2\ge 9$
9	$\max F=x_1+2x_2$	$5x_1-2x_2\le 4$, $x_1-2x_2\ge -4$, $x_1+x_2\ge 4$

N	Функция	Ограничения
10	$maxF=3x_1+3x_2$	$x_1-4x_2\le 4$, $3x_1+2x_2\le 6$, $-x_1+x_2\le 1$, $x_1+2x_2\ge 2$
11	$maxF=2x_1-x_2$	$x_1-x_2\ge -3$, $6x_1+7x_2\le 42$, $2x_1-3x_2\le 6$, $x_1+x_2\ge 4$
12	$maxF=x_1-x_2$	$-x_1+x_2\ge 8$, $8x_1+5x_2\le 80$, $x_1-2x_2\le 2$, $x_1+4x_2\ge 4$
13	$maxF=7x_1+x_2$	$x_1+x_2\le 14$, $3x_1-5x_2\le 15$, $5x_1+3x_2\ge 21$
14	$minF=7x_1-x_2$	$x_1+x_2\ge 3,5x_1+x_2\ge 5$, $x_1+5x_2\ge 5$, $x_1\le 4$, $x_2\le 4$
15	$minF=x_1+x_2$	$3x_1+2x_2\ge 8$, $x_1+2x_2\ge 6$, $x_1-x_2\le 3$
16	$maxF=x_1+3x_2$	$-x_1+x_2\le 3$, $4x_1+3x_2\le 20$
17	$maxF=2x_1+x_2$	$x_1-x_2\ge 4$, $x_1+x_2\ge 10$, $4x_1-x_2\le 12$, $7x_1+x_2\le 7$
18	$maxF=2x_1+2x_2$	$3x_1-2x_2\ge -6$, $x_1+x_2\ge 3$, $x_1\le 3$, $x_2\le 5$

N	Функция	Ограничения
19	$maxF=2x_1-4x_2$	$8x_1-5x_2\le16$, $x_1+3x_2\ge2$, $2x_1+7x_2\le9$
20	$minF=-3x_1+6x_2$	$5x_1-2x_2\le4$, $x_1-2x_2\ge-4$, $x_1+x_2\ge4$
21	$maxF=3x_1+3x_2$	$x_1+x_2\le8$, $3x_1+7x_2\ge21$, $x_1+2x_2\ge6$, $x_1\le1$, $x_2\le1$
22	$maxF=x_1+x_2$	$x_1+x_2\ge1$, $-5x_1+x_2\le0$, $-x_1+5x_2\ge0$, $x_1+x_2\le6$
23	$maxF=x_1+x_2$	$5x_1-2x_2\le7$, $-x_1+x_2\le5$, $x_1+x_2\le6$
24	$maxF=-2x_1+x_2$	$2x_1+x_2\le8$, $x_1+3x_2\ge6$, $3x_1+x_2\ge3$
25	$minF=-2x_1+x_2$	$2x_1+x_2\le8$, $x_1+x_2\le6$, $-3x_1+2x_2\ge3$
26	$minF=-3x_1+2x_2$	$x_1+2x_2\ge10$, $3x_1+x\ge15$
27	$maxF=2x_1+2x_2$	$3x_1-2x_2\ge-6$, $x_1+x_2\ge3$, $x_1\le3$, $x_2\le5$
28	$maxF=3x_1+3x_2$	$x_1+x_2\le4$, $3x_1+x_2\ge4$, $x_1+5x_2\ge4$, $x_1\le3$, $x_2\le5$
29	$maxF=x_1+2x_2$	$5x_1-2x_2\le4$, $x_1-2x_2\ge-4$, $x_1+x_2\ge4$
30	$maxF=2x_1-x_2$	$x_1-x_2\ge-3$, $6x_1+7x_2\le42$, $2x_1-3x_2\le6$
31	$minF=2x_1-4x_2$	$8x_1-5x_2\le16$, $x_1+3x_2\ge2$, $2x_1+7x_2\le9$
32	$maxF=5x_1-2x_2$	$5x_1+2x_2\ge10$, $2x_1+5x_2\ge10$, $-2x_1+x_2\le4$, $x_1\le6$, $x_2\le6$
33	$maxF=7x_1+5x_2$	$7x_1+5x_2\ge7$, $7x_1-5x_2\ge35$, $x_1-x_2\le0$
34	$minF=3x_1-2x_2$	$2x_1+x_2\le14$, $-3x_1+2x_2\le9$, $3x_1+4x_2\le27$
35	$maxF=2x_1-3x_2$	$5x_1+3x_2\ge10$, $x_1+3x_2\le12$
36	$maxF=x_1+x_2$	$2x_1+11x_2\le38$, $x_1+x_2\le7$, $4x_1-5x_2\le5$
37	$maxF=2x_1-3x_2$	$x_1+x_2\le6$, $-3x_1+2x_2\ge3$
38	$minF=6x_1+4x_2$	$2x_1+x_2\ge3$, $x_1-x_2\le1$
39	$maxF=3x_1+x_2$	$x_1+2x_2\ge5$, $2x_1+4x_2\le16$, $3x_1+x_2\ge6$, $x_1+3x_2\le9$

Таблица П.2. Задачи квадратичного программирования

N	Функция	Ограничения
1	$minZ=-x_1-2x_2+x^2$	$3x_1+2x_2\le6$, $x_1+2x_2\le4$
2	$minZ=x_1^2+x_2^2-8x_1-10x_2$	$3x_1+2x_2\le6$
3	$maxZ=-x_1^2-3x_2^2+2x_1-3x_2$	$3x_1+x_2\le16$, $-x_1+3x_2\ge4$
4	$maxZ=-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2$	$2x_1-x_2\le6$, $x_1+2x_2\le10$
5	$maxZ=x_1-x_2^2+2x_1x_2$	$x_1+x_2=8$, $x_2\le4$
6	$minZ=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+5x_1-6x_2$	$2x_1+x_2\le8$, $x_1+3x_2\le15$

N	Функция	Ограничения
7	$\min Z=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+5x_1-6x_2$	$x_1+3x_2\le 12,\ x_1+x_2\ge 6$
8	$\min Z=2x_1^2+2x_2^2-3x_1x_2+5x_1-6x_2$	$x_1-x_2\ge 6,\ 2x_1+x_2\ge 15$
9	$\min Z=x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2+5x_1$	$2x_1+3x_2\le 15,\ x_1+2x_2\le 10$
10	$\max Z=-x_1^2-x_2^2+3x_1+4x_2$	$x_1+2x_2\le 20,\ x_1+x_2\ge 8$
11	$\max Z=-x_1^2-x_2^2+2x_2+x_1$	$x_1+2x_2\le 16,\ x_1+x_2=8$
12	$\max Z=-4x_1^2-3x_2^2+32x_1+120x_2$	$2x_1+5x_2\le 20,\ 2x_1-x_2=8$
13	$\max Z=-x_1^2-x_2^2+5x_1+2x_2+x_1x_2$	$2x_1+3x_2\le 15,\ x_1+2x_2=8$
14	$\min Z=x_1^2+2x_2^2-2x_1-4x_2$	$x_1+2x_2\le 20,\ x_1+x_2\ge 8$
15	$\max Z=-2x_1^2-3x_2^2+x_1+3x_2$	$x_1+3x_2\le 12,\ x_1+x_2\ge 6$
16	$\max Z=-x_1^2-2x_2^2+3x_1+8x_2$	$2x_1+3x_2\le 20,\ 2x_1+x_2\ge 8$
17	$\max Z=-x_1^2+8x_1+x_2$	$2x_1+x_2\le 16,\ x_1+5x_2=20$
18	$\max Z=-2x_1^2-5x_2^2+3x_1+10x_2$	$4x_1-x_2\le 8,\ x_1+x_2\le 12$
19	$\max Z=-x_1^2-3x_2^2+15x_1+8x_2+x_1x_2$	$3x_1+x_2\le 15,\ x_1+2x_2\le 10$
20	$\min Z=x_1^2+2x_2^2+3x_1+4x_2-2x_1x_2$	$x_1+x_2\ge 6,\ 2x_1+3x_2\le 18$
21	$\max Z=-x_1^2-2x_2^2+3x_1+8x_2$	$2x_1+x_2\ge 8,\ 2x_1+3x_2\le 20$
22	$\min Z=x_1^2+x_2^2-6x_1-4x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
23	$\max Z=-x_1^2-x_2^2+20x_1+16x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
24	$\max Z=-3x_1^2-5x_2^2+18x_1+16x_2-x_1x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
25	$\max Z=x_1x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
26	$\min Z=2x_1^2+3x_2^2-40x_1-48x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
27	$\min Z=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$	$8x_1+3x_2\le 64,\ -2x_1+5x_2\le 30$
28	$\min Z=(x_1+x_2+x_3)^2$	$x_1\le 2,\ x_2\le 4,\ x_3\le 6$
29	$\max Z=-x_1^2+2x_2+x_1-x_3^2$	$x_1+2x_2-x_3=6$
30	$\max Z=-x_1^2-2x_3^2+8x_1+2x_2+4x_3$	$2x_1+x_2\le 16,\ 3x_2+4x_3\le 20$
31	$\min Z=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$	$2x_1+x_2+x_3=10,\ 3x_1-2x_2-x_3\ge 6$
32	$\min Z=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-5x_1+6x_2$	$x_1+x_2+x_3\le 20,\ x_1+x_2\le 15,\ x_2+x_3\le 10$
33	$\min Z=2x_1^2+2x_2^2+5x_1+6x_2-3x_1x_2$	$x_1-x_2\le 6,\ 2x_1+x_2\le 15$

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ДАВЫДОВ ВЛАДИМИР СЕМЁНОВИЧ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Практическое пособие

В 2 частях

Часть I

В авторской редакции

Подписано в печать 01.04.2005 г.(40) Формат 60x84 1/16. Бумага писчая №1. Печать на ризографе. Усл. печ. л. 3,6. Уч-изд. л. 2,4. Тираж 35 экз.

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104