

К УЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ ФОТООТСЧЕТОВ

В. Г. Астафуров и Г. Н. Глазов

Пространственно-временная задача расчета распределения вероятностей числа фотоотсчетов в интервале времени при приеме поляризованного гауссовского излучения решена в частном случае факторизованной экспоненциальной корреляционной функции и прямоугольной приемной апертуры. На этом примере апробирован предлагаемый способ приближенной редукции к эквивалентной временной задаче статистики фотоотсчетов. Дан критерий точности такого перехода.

К настоящему времени достаточно подробное исследование статистик фотоотсчетов при детектировании частично-когерентного оптического излучения проведено в приближении «точечного» детектора [1, 2]. В атмосферной оптике, оптической локации, оптической связи, лазерном зондировании атмосферы и других приложениях условие малости площади S приемной антенны в сравнении с площадью S_k когерентности принимаемого излучения часто не выполняется.

Если обратное соотношение $S \gg S_k$ также не выполняется, то расчет распределения вероятностей $P(n)$ числа отсчетов на интервале $\hat{T} : (t, t+T)$ требует решения задачи на собственные значения некоторого пространственно-временного интегрального уравнения, ядром которого является корреляционная функция поля

$$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) = \overline{E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2)},$$

где $E(\mathbf{r}, t)$ — напряженность поля в точке \mathbf{r} в момент времени t .

В данной работе эта задача решена для частного вида корреляционной функции поля и формы антенны и на этом примере апробирован предлагаемый способ приближенной редукции пространственно-временной задачи к существенно более простой эквивалентной задаче статистики фотоотсчетов.

Распределение фотоотсчетов можно найти как [3]

$$P(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n Q(z)}{\partial z^n} \right|_{z=1}, \quad (1)$$

где $Q(z)$ — производящая функция распределения $P(n)$. Будем считать поле гауссовским, стационарным и статистически однородным в плоскости апертуры. Разлагая поле в этой плоскости по Карунену—Лозву и учитывая, что коэффициенты разложения не изменятся при линейном преобразовании излучения от апертуры до детектора [4], найдем

$$Q(z) = \prod_m (1 + z\bar{n}\mu_m)^{-1}, \quad (2)$$

$$\bar{n} = \eta ITS, \quad (3)$$

среднее число фотоотсчетов на интервале \hat{T} , I — средняя интенсивность поля на антенной апертуре, η — квантовая эффективность детектора, $\{\mu_m\}$ — собственные числа интегрального уравнения

$$\left. \int_{\hat{T}} \int_{\hat{S}} B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) \varphi_m(\mathbf{r}_2, t_2) d\mathbf{r}_2 dt_2 = \frac{\bar{n}}{\eta} \mu_m \varphi_m(\mathbf{r}_1, t_1), \right\} \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_1 \in \hat{S}, \quad t_1 \in \hat{T},$$

$\varphi_m(\mathbf{r}, t)$ — собственные функции, \hat{S} — множество точек апертуры.

При условии спектрально-угловой чистоты [5] корреляционная функция факторизована

$$B(\mathbf{r}, t) = I \rho_1(\mathbf{r}) \rho_2(t) \exp \left\{ i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{s}_0 \mathbf{r} + i \omega_0 t \right\}, \quad (5)$$

$\mathbf{s}_0 = (s_{0x}, s_{0y})$ — единичный вектор характерного направления углового спектра волн, ω_0 — характерная частота спектра.

Рассмотрим частный вид корреляционной функции с пространственной частью

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \exp \left\{ -\frac{\omega_0}{c} (\beta_1 |x| + \beta_2 |y|) \right\}, \quad (6)$$

соответствующей нормированному угловому спектру

$$F_1(s) = \left[1 + \left(\frac{s_x - s_{0x}}{\beta_1} \right)^2 \right]^{-1} \left[1 + \left(\frac{s_y - s_{0y}}{\beta_2} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (7)$$

где $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$ — единичный вектор направления, β_1, β_2 — полуширины углового спектра в координатных плоскостях, и временной частью

$$\rho_2(t) = \exp(-\alpha |t|), \quad (8)$$

соответствующей лоренцевскому спектру

$$F_2(\omega) = \left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2 \right]^{-1}$$

с полушириной α . Если, кроме того, апертура антенны — прямоугольник со сторонами L_1, L_2 , то, записывая собственные функции $\varphi_m(\mathbf{r}, t)$ в факторизованном виде,

$$\varphi_m(\mathbf{r}, t) = \varphi_{1i}(x) \varphi_{2j}(y) \varphi_{3k}(t) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathbf{s}_0 \mathbf{r} - i \omega_0 t \right\}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

найдем, что

$$\mu_m = \mu_{ijk} = \mu_i \mu_j \mu_k. \quad (10)$$

Сомножители в (9) и (10) — собственные функции и числа уравнений

$$\int_{-1/2}^{1/2} \exp \{ -k_n |z_1 - z_2| \} \varphi_{ns}(z_2) dz_2 = \mu_{ns} \varphi_{ns}(z_1), \quad (11)$$

$$n = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Выражения для собственных чисел уравнения (11) имеют вид [6]

$$\mu_{ns} = \frac{2k_n}{k_n^2 + b_{ns}^2},$$

где b_{ns} — положительные корни уравнений

$$\operatorname{tg} \frac{b_{ns}}{2} = (-1)^{s-1} \left(\frac{k_{ns}}{b_{ns}} \right)^{(-1)^{s-1}},$$

$$k_{1,2} = \frac{\omega_0}{c} \beta_{1,2} L_{1,2}$$

отношения размеров $L_{1,2}$ апертуры к радиусам поперечной когерентности поля,

$$k_3 = aT$$

отношение времени T отбора к радиусу временной когерентности поля. Подставляя (2) в (1) и используя (10), можно получить удобное рекуррентное соотношение

$$P(0) = \prod_{ijk} (1 + \bar{n}^{\nu_{ijk}})^{-1}, \quad (12)$$

$$P(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P(n-m) \left\{ \sum_{ijk} \frac{\bar{n}^{\nu_{ijk}}}{1 + \bar{n}^{\nu_{ijk}}} \right\}^m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12')$$

Поскольку

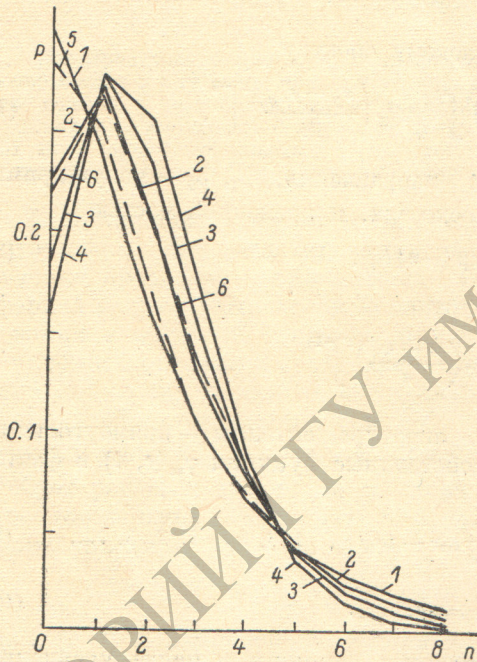
$$\sum_{s=1}^{\infty} \nu_{ns} = 1,$$

то для проведения практических расчетов $P(n)$ по (12) и (12') необходимо усечь последовательность собственных чисел. Положим $s \leq N_n$, где N_n можно определить как наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{s=1}^{N_n} \nu_{ns} \geq 1 - \xi,$$

тогда ξ^3 — относительная ошибка в среднем \bar{n} рассчитанного распределения $P(n)$.

На рисунке приведены распределения $P(n)$ для нескольких наборов $k_1 = k_2, k_3$. Для сравнения даны распределения в приближении «точечного» детектора.



Распределение фотоотчетов $P(n)$ при $\bar{n}=2$ и $\xi=0.99$.

Штриховыми линиями показаны распределения в приближении «точечного» детектора. 1 — $k_1=0.1, k_3=0.1$; 2 — $k_1=0.5, k_3=0.5$; 3 — $k_1=1, k_3=1$; 4 — $k_1=2, k_3=2$; 5 — $k_3=0.5$; 6 — $k_3=2$.

В случае факторизации корреляционной функции дисперсия числа фотоотчетов

где

$$D(n) = \bar{n} + \bar{n}^2 \psi_s \psi_t, \quad (13)$$

$$\psi_s = S^{-2} \iint_{\hat{S}\hat{S}} |\rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 < 1, \quad (14)$$

$$\psi_t = T^{-2} \iint_{\hat{T}\hat{T}} |\rho_2(t_1 - t_2)|^2 dt_1 dt_2 < 1. \quad (15)$$

Очевидны асимптотики

$$\begin{aligned} \psi_s &\rightarrow S_k/S \quad \text{при} \quad S/S_k \rightarrow \infty, \\ \psi_t &\rightarrow \tau_k/T \quad \text{при} \quad T/\tau_k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $S_k = \int |\rho_1(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ (интеграл по всей плоскости апертуры), $\tau_k = 2 \int_0^{\infty} |\rho_2(\tau)|^2 d\tau$ — время когерентности.

В частности, для (8)

$$\psi_t = k_3^{-1} \left[1 + \frac{1}{2k_3} (e^{-2k_3} - 1) \right]. \quad (16)$$

Для углового спектра (7) и прямоугольной апертуры

$$\psi_s = \psi_{s1} \psi_{s2},$$

где

$$\psi_{sn} = k_n^{-1} \left[1 + \frac{1}{2k_n} (e^{-2k_n} - 1) \right], \quad n = 1, 2. \quad (17)$$

Взяв в качестве критерия ошибки при изменении формы апертуры относительное изменение x_D дисперсии, из (13) имеем

$$x_D = q x_\psi,$$

где x_ψ — относительное изменение величины ψ_s ,

$$q = \frac{\bar{n} \psi_s \psi_t}{1 + \bar{n} \psi_s \psi_t} < \frac{\bar{n} \psi_s}{1 + \bar{n} \psi_s} < \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} < 1,$$

фактор уменьшения ошибки.

Для корреляционной функции (5), (6) и (8) в табл. 1 приведены значения Ψ'_s для круглой апертуры, x_ψ и верхней грани $x_{Dm} = \bar{n} \Psi'_s x_\psi / (1 + \bar{n} \Psi'_s)$ для $\bar{n} = 2$ при сравнении круглой апертуры с относительным диаметром $p = \omega_0 \beta D / c$ (D — диаметр) и квадратной апертуры той же площади. Очевидны асимптотики $x_\psi \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$.

Таблица 1

p	x_ψ	x_{Dm}	Ψ'_s
0.2	0.057	0.0349	0.843
0.4	0.064	0.0359	0.681
0.8	0.063	0.0291	0.460
1.6	0.058	0.0178	0.238
4	0.054	0.0057	0.0625

Как видно из табл. 1, при пространственной части (6) дисперсия D (n) и, следовательно, распределение P (n) слабо зависят от формы апертуры при неизменной ее площади. Можно ожидать, что этот вывод справедлив при любой пространственной части корреляционной функции, если асимметрия апертуры невелика и ее граница — выпуклая кривая.

Обратимся к вопросу о приближенной редукции пространственно-временной задачи статистики фотоотсчетов к эквивалентной временной задаче. Сопоставим пространственно-временной задаче с факторизованной корреляционной функцией вида (5), средним числом отсчетов (3) и дисперсией (13) временную задачу с корреляционной функцией эффективного детектируемого «напряжения»

$$B_s(t) = I S \rho_s(t) \exp(i\omega_0 t).$$

Нетрудно видеть, что среднее число отсчетов на интервале \hat{T} совпадает с (3). Если, кроме того, задать

$$\rho_s(t) = \rho_2(gt),$$

и, следовательно, $\tau_{k3} = \tau_k/g$, где $g = T_*/T > 1$, T_* — единственный корень уравнения

$$T_*^{-2} \int_0^{T_*} \int_0^{T_*} |\rho_2(t_1 - t_2)|^2 dt_1 dt_2 = \psi_s \psi_t, \quad (18)$$

то дисперсия числа отсчетов совпадает с (13). Учитывая, что форма частотного спектра, среднее число \bar{n} и дисперсия $D(n)$ не изменились, можно ожидать, что соответствующее временной задаче распределение $P_s(n)$ мало отличается от $P(n)$. Заметим, что при $S/S_k \gg 1$, $T/\tau_k \gg 1$ предлагаемый способ перехода к временной задаче эквивалентен известному [7] заданию числа фазовых ячеек $ST/S_k\tau_k$ в отрицательно-биномиальном распределении.

Возьмем в качестве критерия отклонения $P_s(n)$ от $P(n)$ разность K коэффициентов асимметрии,

$$K = \frac{\mu_3 - \mu_3^3}{D^{3/2}(n)}, \quad (19)$$

где μ_3 , μ_3^3 — третьи центральные моменты сравниваемых распределений. Используя известную связь [1] между кумулянтами энергии детектируемого излучения и моментами отсчетов, можно получить

$$K = \frac{\nu_s \nu_t - \nu_3}{\left(\frac{1}{\bar{n}} + \psi_s \psi_t\right)^{3/2}}, \quad (19')$$

где

$$\nu_s = S^{-3} \iiint_{\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{S}} \rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rho_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \rho_1(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3, \quad (20)$$

$$\nu_t = 2T^{-3} \iiint_{\hat{T}\hat{T}\hat{T}} \rho_2(t_1 - t_2) \rho_2(t_2 - t_3) \rho_2(t_3 - t_1) dt_1 dt_2 dt_3, \quad (21)$$

$$\nu_3 = 2T^{-3} \iiint_{\hat{T}\hat{T}\hat{T}} \rho_3(t_1 - t_2) \rho_3(t_2 - t_3) \rho_3(t_3 - t_1) dt_1 dt_2 dt_3. \quad (22)$$

Путем численного расчета интегралов (14), (15), (20)–(22) можно с помощью критерия (19') оценить точность редукции при произвольных факторизованной корреляционной функции поля и форме апертуры.

Рассмотрим частный случай: задаче с корреляционной функцией (5), (6), (8) сопоставляем временную задачу с корреляционной функцией

$$B_s(t) = IS \exp\left\{-\frac{k_3}{k_3} \alpha |t| + i\omega_0 t\right\},$$

где для k_3 из (18) следует уравнение

$$k_3^{-1} \left[1 + \frac{1}{2k_3} (e^{-2k_3} - 1)\right] = \prod_{n=1}^3 k_n^{-1} \left[1 + \frac{1}{2k_n} (e^{-2k_n} - 1)\right]. \quad (23)$$

Мы пришли к задаче, в которой существует замкнутое решение ассоциированной проблемы собственных чисел: производящая функция распределения $P_s(n)$ [1]

$$Q_s(z) = e^{k_3} \left[\operatorname{ch} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \varphi \left(\frac{k_3}{\varphi} + \frac{\varphi}{k_3} \right) \right]^{-1},$$

где

$$\varphi = (k_3^2 + 2k_3 \bar{n} z)^{1/2}.$$

В рассматриваемом частном случае величины в числителе (19)

$$\nu_s \nu_t = \frac{27}{4} \prod_{n=1}^3 \frac{k_n - 1 + (k_n + 1) e^{-2k_n}}{k_n^3}, \quad (24)$$

$$\nu_3 = 3 \frac{k_3 - 1 + (k_3 + 1) e^{-2k_3}}{k_3^3}. \quad (25)$$

Табл. 2, рассчитанная по (17), (18), (23)–(25) при $\bar{n} = 2$, $k_3 = 2$, иллюстрирует точность совпадения $P_s(n)$ и $P(n)$ по критерию (19') и ее нарастание с увеличением k_1 , k_2 .

В последней строке табл. 2 даны значения K' критерия (19) для случая замены точного распределения часто применяемым [1] отрицательно-биномиальным распределением с подогнанной дисперсией. Несмотря на под-

Таблица 2

$k_1 = k_2$	k_3	K	K'
0.5	4.431	0.0411	0.1159
1	7.69	0.0339	0.0725
2	18.1	0.0123	0.0228
4	54.9	0.00189	0.00348

гонку дисперсии, точность такого распределения при умеренных k_1 , k_2 и k_3 значительно хуже, чем при использовании вышеописанной методики. Это объясняется тем, что отрицательно-биномиальное распределение не учитывает формы спектра.

Литература

- [1] C. L. Mehta. In: Progress in Optics, vol. 8, p. 375. University of Rochester N. Y., 1970.
 [2] E. Jakeman, E. R. Pike. J. Phys., A1 (ser. 2), 128, 1968.
 [3] Дж. Клаудер, Э. Сударшан. Основы квантовой оптики. «Мир», М., 1970.
 [4] Р. М. Гальярди, Ш. Карп. Оптическая связь. «Связь», М., 1976.
 [5] Э. Вольф, Л. Мандель. Усп. физ. наук, 88, 619, 1966.
 [6] В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. ИЛ, М., 1960.
 [7] Н. Нодага. Proc. IEEE, 53, 696, 1965.

Поступило в Редакцию 7 марта 1979 г.