МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Кафедра высшей математики

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Часть 1

Гомель 2002

Составитель:
В.В. Бураковский, доцент, кандидат физико-математических наук

Рецензенты:
Т.И. Васильева, доцент, кандидат физико-математических наук;
кафедра высшей математики Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендован к изданию научно-методическим советом Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» 27 марта 2002 года, протокол №7

Лабораторный практикум включает 6 лабораторных работ по следующим разделам теории вероятностей: классическое определение вероятности, основные формулы комбинаторики, геометрические вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса, формула Бернулли, законы распределения и числовые характеристики случайных величин. Содержит основные теоретические сведения, примеры решения задач по теории вероятностей и контрольные задания. Предназначен для студентов математического, физического, экономического и заочного факультетов.





## Введение

Последние годы характеризуются интенсивным внедрением вероятностных и статистических методов в технические, социологические и экономические науки, главным образом в связи с развитием массовых процессов в производстве и экономике. Элемент случайности постоянно должен учитываться в рыночных отношениях.

Настоящий лабораторный практикум включает 6 лабораторных работ по следующим разделам теории вероятностей: классическое определение вероятности; основные формулы комбинаторики; геометрические вероятности; теоремы сложения и умножения вероятностей; формулы полной вероятности и Байеса; формула Бернулли; полиномиальное распределение; локальная и интегральная теорема Лапласа; дискретные случайные величины, законы распределения и числовые характеристики; непрерывные случайные величины, законы распределения и числовые характеристики. В практикуме содержатся основные теоретические сведения, примеры решения задач и контрольные задания. Задачи подобраны из различных источников, указанных в конце практикума. Предназначен для студентов математического, физического, экономического и заочного факультетов.

## Лабораторная работа №1
## Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики

Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_N\}$, состоящее из конечного числа N равновозможных результатов испытаний. Тогда вероятностью события $A \le \Omega$ называют отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов к общему числу всех возможных элементарных исходов $N(A)$:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Это *классическое определение вероятности*.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

*Перестановками* называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n! \qquad \textbf{(1.2)}$$

*Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) \qquad \textbf{(1.3)}$$

*Сочетаниями* называют комбинации, составленные из n



различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m \qquad \textbf{(1.5)}$$

<u>Пример 1.1.</u> Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

*Решение.* Пространство элементарных исходов $\Omega = \{(г, г), (г, р), (р, г), (р, р)\}$ состоит из 4-х элементарных исходов, т.е. $N(\Omega) = 4$. Событие $A = \{\text{хотя бы один раз появится "герб"}\} = \{(г, г), (г, р), (р, г)\}$ состоит из 3-х элементарных исходов, т.е. $N(A) = 3$. Поскольку все исходы равновозможны, то по классическому определению вероятности искомая вероятность

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

<u>Пример 1.2.</u> В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

*Решение.* Общее число элементарных исходов равно $C_N^m$. Благоприятствующими являются исходы, когда из общего числа стандартных n взято k деталей (это можно сделать $C_n^k$ способами), а остальные m-k деталей взяты из N-n нестандартных деталей (выбираются $C_{N-n}^{m-k}$ способами). Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}$. Следовательно, по классическому определению вероятности, вероятность интересующего нас события

$$P(A) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

**Задания:**

**1.1** Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что а) сумма выпавших очков равна 10; б) сумма выпавших очков равна 5, а произведение 6.

**1.2** В ящике имеется 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что все детали не окрашены.

**1.3** В урне 15 шаров, среди которых 8 белых. Наудачу отобраны 7 шаров. Найти вероятность того, что среди отобранных шаров 5 белых.

**1.4** Набирая номер телефона, абонент забыл последние 4 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

**1.5** Определить вероятность того, что выбранное наудачу натуральное число при возведении в квадрат даст число, заканчивающееся 6-кой.

**1.6** На шести одинаковых карточках напечатаны буквы а, т, м, р, с, о. По одной наудачу извлекли 4 карточки. Найти вероятность того, что из них сложено слово «трос».

**1.7** Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

**1.8** В урне 10 шаров, среди которых 6 красных. Наудачу отобраны 4 шара. Найти вероятность того, что все они не



красного цвета.

**1.9** Устройство состоит из 8 элементов, из которых 3 изношены. Случайным образом включено 4 элемента. Найти вероятность того, что 2 из включенных элементов изношены.

**1.10** Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

**1.11** Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

**1.12** В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в линию кубиках появится слово «спорт».

**1.13** Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

**1.14** Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

**1.15** Определить вероятность того, что выбранное наудачу натуральное число при возведении в четвертую степень дает число, оканчивающееся на 6.

**1.16** На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых находится двухтомник одного автора. Найти вероятность того, что оба тома двухтомника расположены рядом.

**1.17** Буквенный замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается при определенном наборе букв. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

**1.18** Из полного набора костей домино наудачу берется 5 костей. Найти вероятность того, что среди них не будет костей с шестеркой.

**1.19** На восьми одинаковых карточках напечатаны буквы а, б, г, е, л, м, о, ь. По одной наудачу извлекли 6 карточек. Найти вероятность того, что из них сложено слово «Гомель».

**1.20** Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число при возведении в третью степень дает число, заканчивающееся четной цифрой.

**1.21** Слово «керамит» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются и из них извлекаются по очереди 4 карточки. Какова вероятность, что эти карточки составят слово «река».

**1.22** В партии из 50 деталей 5 нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 6 деталей 2 окажутся нестандартными.

**1.23** На стол бросается кубик, 2 грани которого окрашены. Какова вероятность того, что кубик упадет на стол окрашенной гранью.

**1.24** Из последовательности целых чисел от 1 до 10 наудачу выбираются 2 числа. Какова вероятность, что одно из них меньше 6, а другое – больше 6.

**1.25** 10 книг на полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом 3 определенных книги окажутся рядом.

**1.26** Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

**1.27** В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.



**1.28** Библиотечка состоит из 10 различных книг, при чем 5 книг стоят по 4 рубля каждая, 3 книги – по 1 рублю и 2 книги по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу 2 книги стоят 6 рублей.

**1.29** Слово «книга» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки перемешиваются и извлекаются по одной по очереди. Какова вероятность того, что карточки вновь составят слово «книга»?

**1.30** Найти вероятность того, что произведение двух наудачу выбранных натуральных чисел даст число, заканчивающееся на 3.

# Лабораторная работа №2
## Геометрические вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Классическое определение вероятности нельзя применить к опыту с бесконечным числом «равновероятных» исходов. В этом случае применяется геометрическое определение вероятности, которое используется, когда вероятность попадания в любую часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы.

Если геометрическая мера всей области $\Omega$ равна $mes\,\Omega$, а мера части этой области А, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть $mes\,A$, то вероятность события А определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Области А и $\Omega$ могут иметь любое число измерений.

**Теорема 1. (Сложения вероятностей несовместных событий).** Вероятность появления одного из двух несовместных событий А и В ( $A \cdot B = \varnothing$ ) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad \textbf{(2.2)}$$

**Следствие**. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad \textbf{(2.3)}$$



**Теорема 2. (Сложения вероятностей совместных событий).** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad \textbf{(2.4)}$$

**Теорема 3. (Умножения вероятностей).** Вероятность совместного наступления двух событий А и В равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B) \qquad \textbf{(2.5)}$$

Для случая $n$ событий $A_1, \ldots A_n$ формула (2.5) принимает вид:

$$P(A_1, A_2, \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_n \mid A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}) \qquad \textbf{(2.6)}$$

Пример 2.1. На отрезке $L$ длины 20 см помещён меньший отрезок $l$ длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

*Решение:* Согласно геометрическому определению вероятности (формула 2.1), получим:

$$P(A) = \frac{mes\,l}{mes\,L} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Пример 2.2. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

*Решение:* Обозначим через $x$ расстояние от центра монеты до ближайшей прямой. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{x \mid 0 \le x \le a\}$, а множество благоприятствующих исходов $A = \{x \mid r < x \le a\}$. Поэтому

$$P(A) = \frac{mes\,A}{mes\,\Omega} = \frac{a-r}{a}$$

Пример 2.3. Вероятности появления каждого из двух независимых событий $A_1$ и $A_2$ соответственно равны $p_1$ и $p_2$. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

*Решение:* Вероятность появление только одного из событий $A_1$ и $A_2$ вычисляется по формуле:

$$P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) +$$
$$+ P(\overline{A}_1)P(A_2) = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2.$$

Пример 2.4. В ящике 7 деталей, из которых 4 стандартных. Наудачу взяты 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали являются стандартными.

*Решение:* Обозначим через А событие, что первая из взятых деталей является стандартной, через В – вторая выбранная деталь – стандартная, С – третья деталь – стандартная. Тогда

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

**Задания:**

**2.1** В точке С, положение которой на телефонной линии



АВ длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка С удалена от точки А на расстояние, не меньше L.

**2.2** На отрезке ОА длиной L числовой оси Ох наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков ОВ и ВА имеет длину, меньшую, чем L/3.

**2.3** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность того, что наудачу выбранный шар не белого цвета.

**2.4** Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

**2.5** В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

**2.6** Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

**2.7** На отрезке ОА длины L числовой оси Ох наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \ge x$. Найти вероятность того, что длина отрезка ВС окажется меньше, чем L/2.

**2.8** Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

**2.9** Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

**2.10** В ящике имеются 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность того, что в сумме они составят не более одного рубля?

**2.11** С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

**2.12** На отрезке AB длины $a$ наудачу поставлены две точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

**2.13** В первой урне находятся 5 белых, 11 черных и 8 красных шаров, во второй – 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из обеих урн наудачу извлекаются по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

**2.14** Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

**2.15** Среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

**2.16** Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

**2.17** Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,9. Найти вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания).

**2.18** В урне 5 красных, 10 синих, 14 зеленых и 1 белый шар. Какова вероятность того, что в первый раз будет вынут красный шар, во второй раз – синий и в третий – зеленый,



если шары обратно не возвращаются.

**2.19** Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

**2.20** Вероятность того, что при одном измерении допущена ошибка, равна 0,4. Производят 3 независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущена ошибка.

**2.21** На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

**2.22** На отрезке длиной $l$ наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше $kl$, где $0 < k < 1$?

**2.23** В урне имеются n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

**2.24** Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него бросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,5; 0,8?

**2.25** В урне имеется 5 шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что извлеченные шары будут иметь номера 1,4,5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

**2.26** На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 9 см, наудачу брошен круг радиуса 3 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых.

**2.27** Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрельба происходит по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

**2.28** Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

**2.29** Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты карту пиковой масти, либо вальта, даму или короля одной масти?

**2.30** Студент знает 10 из 15 вопросов. Найти вероятность, что он ответит на все 3 заданных ему вопроса.



## Лабораторная работа №3
## Формулы полной вероятности и Байеса

__Теорема 1.__ Вероятность появления события А, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий (гипотез), определяется по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i), \qquad \textbf{(3.1)}$$

где $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Формула (3.1) носит название *формулы полной вероятности*.

__Теорема 2.__ Пусть событие А может наступить при условии одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, причем $P(A) \neq 0$. Тогда вероятность гипотезы $H_k$ после того, как имело место событие А, определяется по формуле

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) P(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)} \qquad \textbf{(3.2)}.$$

Формула (3.2) носит название *формулы Байеса*.

<u>Пример 3.1.</u> Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а для второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу де-

таль (из наудачу взятого набора) – стандартная.

*Решение:* Обозначим через

$A = \{\text{извлеченная деталь стандартна}\}$,

$H_1 = \{\text{деталь извлечена из 1-го набора}\}$,

$H_2 = \{\text{деталь извлечена из 2-го набора}\}$.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2};\ P(A \mid H_1) = 0{,}8;\ P(A \mid H_2) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Пример 3.2. В первой коробке 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

*Решение:* Обозначим через

$A = \{\text{из первой коробки извлечена стандартная лампа}\}$,

$H_1 = \{\text{из второй коробки извлечена стандартная лампа}\}$,

$H_2 = \{\text{из второй коробки извлечена нестандартная лампа}\}$

$P(H_1) = \dfrac{9}{10};\ P(H_2) = \dfrac{1}{10}$. Условные вероятности $P(A \mid H_1) = \dfrac{19}{21},\ P(A \mid H_2) = \dfrac{18}{21}$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0.9.$$



Пример 3.3. Детали, изготовленные цехом завода, попадают для проверки к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

*Решение:* Обозначим через

$A = \{\text{годная деталь признана стандартной}\}$,

$H_1 = \{\text{деталь проверил первый контролер}\}$,

$H_2 = \{\text{деталь проверил второй контролер}\}$. По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98 = 0{,}956.$$

По формуле Байеса находим искомую вероятность:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}956} \approx 0{,}59$$

**Задания:**

**3.1** Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

**3.2** Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5 и 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

**3.3** Противник применяет самолеты 5 типов. Известно, что на данном участке фронта сосредоточено примерно равное число самолетов каждого типа. Вероятности сбить самолет соответственно равны для них 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 и 0,1. Самолет противника сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет I-го типа?

**3.4** Имеются 3 партии по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15 и 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращается в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из 3-ей партии.

**3.5** Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

**3.6** Имеются 5 урн. В двух урнах – по 2 белых и 1 черному шару, в одной – 10 черных и в двух – по 3 белых и 1 черному шару. Найти вероятность того, что извлеченный из наудачу взятой урны шар окажется белым.

**3.7** На сборку поступают детали из трех автоматов. Первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступает 1000 деталей, со 2-го – 2000, а с 3-го – 2500.

**3.8** Имются 10 одинаковых урн, из которых в девяти находится по 2 черных и по 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

**3.9** В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: выстрел произведен из винтовки с прицелом или без него?

**3.10** Две из четырех независимо работающих ламп прибора отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и вторая лампы, если вероятности отказа 1, 2, 3 и 4 лампы соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4.

**3.11** Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

**3.12** В тире имеются 5 ружей, вероятности попадания которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

**3.13** В партии 600 лампочек: 200 изготовлены на 1-м заводе, 250 – на 2-м, 150 – на 3-м. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной для 1 завода равна 0,97, для 2-го – 0,91, для 3-го – 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка, оказавшаяся стандартной, изготовлена на 1-м заводе?

**3.14** Вероятности попадания при каждом выстреле для 3-х стрелков равны соответственно $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$. При залпе всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

**3.15** В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

**3.16** В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

**3.17** При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3, мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее?

**3.18** В батарее из 10 орудий одно непристрелянное. Вероятность попадания из пристрелянного орудия равна 0,73, а из непристрелянного – 0,23. Произвели один выстрел и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведен из непристрелянного орудия.

**3.19** Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 3 черных, во второй – 5 белых и 2 черных, в третьей – 2 белых и 5 черных шаров. Наугад выбирают одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

**3.20** По линии связи передаются два сигнала А и В соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех $\frac{1}{6}$ сигналов А искажается и принимается как В-сигналы, а $\frac{1}{8}$ часть переданных В-сигналов принимается как А-сигналы. Известно, что принят сигнал А. Какова вероятность того, что он же и был передан?

**3.21** Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 40 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.



**3.22** Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать одной из трех партий с вероятностями 0,5; 0,25 и 0,25 соответственно. Вероятности того, что лампа проработает определенное количество часов, для этих партий равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

**3.23** Имеются 3 урны с шарами. В первой урне 4 белых и 3 черных, во второй – 5 белых и 2 черных, в третьей – 2 белых и 5 черных шаров. Из наугад выбранной урны вынули белый шар. Найти вероятность того, что он вынут из 2-ой урны.

**3.24** На сборку поступают детали с 3 автоматов. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% деталей данного типа, поступающих на сборку. Первый автомат выпускает 0,1% нестандартных деталей, второй – 0,2%, третий – 0,3%. Найти: а) вероятность поступления на сборку нестандартной детали; б) вероятность того, что оказавшаяся нестандартной деталь изготовлена первым автоматом.

**3.25** В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без прицела – 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произвел один выстрел из наудачу взятой винтовки.

**3.26** В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность попасть в квалификацию для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен попадет в квалификацию.

**3.27** В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

**3.28** В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

**3.29** Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную университета, соответственна равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнований попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

**3.30** Вероятность удовлетворять стандарту для деталей некоторого производства равна 0,96. При проверке стандартные изделия признаются стандартными с вероятностью 0,98, а не удовлетворяющие стандарту признаются стандартными с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.



## Лабораторная работа №4
## Формула Бернулли. Полиномиальное распределение. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Пусть производятся испытания, являющиеся: 1) повторными, независимыми; 2) в любом испытании возможны только 2 исхода; 3) вероятности этих исходов постоянны, не изменяются от испытания к испытанию. Тогда вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно $k$ раз вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \textbf{(4.1)}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $q = 1 - p$, $k = \overline{0, n}$.

Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $E_1, E_2, \ldots, E_m$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, события $E_k$ $(k = \overline{1, m})$ произойдут ровно $n_k$ раз, определяется формулой полиномиального распределения:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}, \qquad \textbf{(4.2)}$$

где $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$.

**Теорема 4.1.** **(Локальная теорема Лапласа).** Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно $k$ раз, вычисляется по формуле:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad \textbf{(4.3)}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Для функции плотности стандартного нормального распределения $\varphi(x)$ имеются таблицы, причем функция четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

**Теорема 4.2.** **(Интегральная теорема Лапласа).** Вероятность того, что в $n$ независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз (от $k_1$ до $k_2$ раз) приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad \textbf{(4.4)}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.



Для функции Лапласа $\Phi(x)$ имеются таблицы для значений $0 \le x \le 5$. При значениях аргумента $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$, причем функция нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Число появлений события А, которому отвечает наибольшая вероятность, называют *наивероятнейшим числом появления события А*.

Это наивероятнейшее число $m_0$ определяется двойным неравенством

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Пусть проводятся $n$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна $p$ $(0 < p < 1)$. Тогда вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты появления события А от вероятности появления события А не превысит числа $\varepsilon > 0$, вычисляется по формуле

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Пример 4.1. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

*Решение:* Поскольку вероятность нормального расхода электроэнергии в течение суток $p = 0{,}75$, то вероятность перерасхода $q = 1 - p = 0{,}25$. По формуле Бернулли имеем

$$P_6(4) = C_6^2 p^4 q^2 = 15 \cdot (0{,}75)^4 (0{,}25)^2 = 0{,}3.$$

Пример 4.2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

*Решение:* По условию $n = 10$; $k = 8$; $p = 0,75$; $q = 0,25$. Согласно локальной теореме Лапласа

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot \varphi(x) = 0,7301 \cdot \varphi(x).$$

Значение $x = \dfrac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36$. По таблице находим значение $\varphi(0,36) = 0,3739$.

Искомая вероятность $P_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 = 0,273$.

Пример 4.3. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется не прошедших проверку от 70 до 100 деталей.

*Решение:* По условию

$n = 400$; $k_1 = 8$; $k_2 = 100$; $p = 0,2$; $q = 0,8$.

Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$P_{400}(70,100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25, \quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

По таблице функции Лапласа имеем

$\Phi(2,5) = 0,4938$; $\quad \Phi(1,25) = 0,3944$.



Искомая вероятность

$$P_{400}(70,100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Пример 4.4. Вероятность того, что деталь не стандартна равна 0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности 0,1 по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

*Решение:* По условию $n = 400$; $p = 0,1$; $q = 0,9$; $\varepsilon = 0,03$. Пользуясь формулой (4.6) имеем:

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - 0,1\right| \le 0,03\right\} \approx 2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{400}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице функции Лапласа находим $\Phi(2) = 0,4772$.

Следовательно $2\Phi(2) = 0,9544$ - искомая вероятность.

Пример 4.5. Испытывается каждый из 15 элементов устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

*Решение:* По условию $n = 15$; $p = 0,9$; $q = 0,1$. По формуле (4.5) найдем наивероятнейшее число элементов $m_0$ из неравенства

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \le m_0 \le 15 \cdot 0,9 + 0,9; \quad 13,4 \le m_0 \le 14,4.$$

Так как $m_0$ - целое число, то $m_0 = 14$.

**Задания:**

**4.1** В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

**4.2** Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

**4.3** Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

**4.4** Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,001.

**4.5** Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

**4.6** Найти вероятность того, что события А появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3.

**4.7** Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

**4.8** Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

**4.9** Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности



можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаний.

**4.10** Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

**4.11** Событие В появится в случае, если событие А появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,4.

**4.12** Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

**4.13** Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз.

**4.14** Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

**4.15** Сколько необходимо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

**4.16** Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,1. Найти вероятность того, что событие А появится хотя бы два раза.

**4.17** Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

**4.18** Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности его появления по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

**4.19** Двое одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

**4.20** Найти вероятность того, что событие наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равно 0,2.

**4.21** В каждой из шести колод карт выбирается наудачу по одной карте. Найти вероятность того, что 4 карты окажутся красной масти, а две – черной.

**4.22** При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых диодов 50 будет бракованных?

**4.23** Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена от 200 до 250 раз в серии из 600 выстрелов.

**4.24** Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число $\varepsilon$, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила $\varepsilon$.

**4.25** Чему равна вероятность $p$ наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

**4.26** В урне имеется 3 шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекались 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращается обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее, чем по два раза каждый.



**4.27** Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

**4.28** Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 конденсаторов за время T выйдет из строя: а) не менее 30 конденсаторов; б) не более 20 конденсаторов.

**4.29** Найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди 19 изготовленных, если вероятность того, что деталь нестандартная, равна 0,1.

**4.30** Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаний, если вероятность наступления события в одном испытании равна 0,6.

# Лабораторная работа №5
# Дискретные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики

Случайная величина X называется *дискретной*, если она принимает конечное либо счетное число значений. Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $(n, p)$, если она принимает значения $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ с вероятностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{5.1}$$

где $p + q = 1$.

Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $k \in \{0,1,\ldots\}$ с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{5.2}$$

Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром $p$ $(0 < p < 1)$, если она принимает значения $k \in \mathrm{N}$ с вероятностями

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \tag{5.3}$$

где $q = 1 - p$.

Дискретная случайная величина X имеет *гипергеометрическое* распределение с параметрами $(N, n, m)$, если она принимает значения $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ с вероятностями



$$P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}. \tag{5.4}$$

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X называется число

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{5.5}$$

причем математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.

*Свойства математического ожидания*

1. $MC = C$, где C – постоянная.
2. $M(CX) = C \cdot MX$
3. $M(X + Y) = MX + MY$
4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$, где X и Y – независимые случайные величины

*Дисперсией* случайной величины X называется число

$$DX = M(X - MX)^2. \tag{5.6}$$

Более удобна для вычислений формула

$$DX = M(X^2) - (MX)^2. \tag{5.7}$$

Для дискретной случайной величины эта формула

$$DX = \sum_i x_i^2 p_i - \left( \sum_i x_i p_i \right)^2 \qquad \textbf{(5.8)}$$

*Свойства дисперсии*

1. $DC = 0$, где C – постоянная.
2. $D(CX) = C^2 DX$.
3. $D(X+Y) = DX + DY$, где X и Y – независимые случайные величины.

*Начальным моментом* порядка $k$ случайной величины X называют

$$\nu_k = M(X^k).$$

*Центральным моментом* порядка $k$ случайной величины X называют

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

Пример 5.1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0.1. Составить закон распределения X – числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

*Решение:* Дискретная случайная величина X может принимать значения 0,1,2 и 3. Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применим формулу Бернулли. По условию $n = 3$; $p = 0,1$; $q = 1 - 0,1 = 0,9$. Получим $P_3(0) = 0,9^3 = 0,729$; $P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243$; $P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027$; $P_3(3) = 0,1^3 = 0,001$.



Искомый биномиальный закон распределения X:

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| p | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

Математическое ожидание $MX = 1 \cdot 0,243 + 2 \cdot 0,027 + 3 \cdot 0,001 = 0,3$. Для нахождения дисперсии используем формулу (5.7)

$$DX = M(X)^2 - (MX)^2 = (1 \cdot 0,243 + 4 \cdot 0,027 + 9 \cdot 0,001) - (0,3)^2 = 0,36 - 0,09 = 0,27.$$

Пример 5.2. Найти дисперсию случайной величины $-3X + 6$, если $DX = 5$.

*Решение:* Применяя свойства дисперсии, получим

$$D(-3X + 6) = D(-3X) + D(6) = (-3)^2 DX + 0 = 9 \cdot 5 = 45$$

**Задания:**

**5.1** Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

**5.2** В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

**5.3** Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

**5.4** Случайная величина X принимает значения 1, 2, 3. Известны также $MX = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

**5.5** Найти дисперсию случайной величины X – числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

**5.6** Составить закон распределения вероятностей числа появлений события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

**5.7** Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность появления в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым – 0,8. Первым сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками.

**5.8** Найти дисперсию X – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $MX = 0.9$.

**5.9** Найти начальные моменты 1,2,3-го порядка дискретной случайной величины X, принимающей значения 2,3 и 5 с вероятностями 0,1; 0,4 и 0,5 соответственно.

**5.10** Бросают две игральных кости. Составить закон распределения случайной величины X – суммы очков, выпадающих на костях.

**5.11** Найти дисперсию случайной величины X, принимающей значения 1,2 и 5 с вероятностями 0,3; 0,5 и 0,2 соответственно.

**5.12** В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа нестандартных деталей среди 4 отобранных.

**5.13** Производится один выстрел по самолету. Вероятность попадания - 0,3. Найти закон распределения и функцию распределения случайной величины X числа попаданий в самолет.

**5.14** Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) менее трех; б) хотя бы одно.



**5.15** Случайная величина X может принимать два возможных значения $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). Найти закон распределения случайной величины X, если $MX = \frac{9}{5}$; $DX = \frac{4}{25}$, $p_1 = 0{,}2$.

**5.16** Монета подбрасывается три раза. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа появлений герба.

**5.17** Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно 20.

**5.18** Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, принимающей значения 4,3; 5,1 и 10,6 с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 соответственно.

**5.19** Дискретная случайная величина X может принимать 2 возможных значения $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). Найти закон распределения X, если $MX = 1{,}4$; $DX = 0{,}24$, $p_1 = 0{,}6$.

**5.20** Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно 2; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

**5.21** Случайная величина X может принимать значения $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). Найти закон распределения X, если $MX = \frac{17}{5}$; $DX = \frac{36}{25}$, $p_1 = 0{,}2$.

**5.22** Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если она принимает значения 131; 140; 160 и 180 с вероятностями 0,05; 0,1; 0,25 и 0,6 соответственно.

**5.23** Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

**5.24** Две игральных кости одновременно бросают 2 раза. Составить закон распределения случайной величины Х – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

**5.25** Случайная величина Х принимает значения 3; 4; 7; 10 с вероятностями 0,2; 0,1; 0,4 и 0,3 соответственно. Найти математическое ожидание и функцию распределения Х.

**5.26** Случайная величина Х принимает 2 значения $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). Найти закон распределения Х, если $MX = \frac{13}{5}$; $DX = \frac{16}{25}$, $p_2 = 0.8$.

**5.27** Найти дисперсию случайной величины Х – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если $MX = 0.8$.

**5.28** Дискретная случайная величина Х принимает значения 3 и 5 с вероятностями 0,2 и 0,8 соответственно. Найти центральные моменты 1, 2, 3 и 4 порядков.

**5.29** Известно, что в партии из 10 телефонных аппаратов имеется 5 недействующих. Случайно из этой партии взято 4 аппарата. Найти закон распределения случайной величины числа недействующих аппаратов из выбранных.

**5.30** Вероятность того, что изделие стандартно, равно 0,9. В каждой партии содержится 5 изделий. Найти математическое ожидание случайной величины Х – числа партий, в каждой из которых окажется ровно 4 стандартных изделия, если проверки подлежит 50 партий.

## Лабораторная работа №6
## Непрерывные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики

*Математическое ожидание непрерывной случайной величины* X, имеющей плотность распределения вероятностей $p(x)$, определяется равенством

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \qquad \textbf{(6.1)}$$

*Дисперсия непрерывной случайной величины* X определяется по формуле

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \right)^2. \qquad \textbf{(6.2)}$$

*Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины* X определяется как производная от функции распределения $F(x)$:

$$p(x) = F'(x). \qquad \textbf{(6.3)}$$

Зная плотность распределения $p(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \qquad \textbf{(6.4)}$$

При решении задач часто используются следующие *свойства плотности распределения*:

**I.** $p(x) \geq 0$ **(6.5)**





**II.** $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$ **(6.6)**

**III.** $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} p(x)dx.$ **(6.7)**

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение* с параметрами $a$ и $\sigma^2$, если она имеет плотность $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $x \in \Re$.

Непрерывная случайная величина имеет *равномерное распределение* на [a,b], если она имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Непрерывная случайная величина имеет *показательное (экспоненциальное) распределение* с параметром $\lambda > 0$, если она имеет плотность вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Пример 6.1. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-5, & x\in[10,12];\\ 0, & x\notin[10,12].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

*Решение:* По формуле (6.1) находим

$$MX=\int_{10}^{12}x\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx=11\frac{1}{3}.$$

По формуле (6.2) имеем

$$DX=\int_{10}^{12}x^2\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx-\left(11\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

Пример 6.2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно на [a,b].

*Решение:* $$MX=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

$$DX=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 6.3. Найти вероятность того, что случайная величина X, имеющая нормальное распределение с параметрами 3 и 4, попадет в интервал (1; 7).

*Решение:* По лемме о нормальном распределении случайная величина $Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение, где $a=3$, $\sigma=2$. Тогда

$$P(1<X<7)=\Phi\left(\frac{7-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=$$
$$=\Phi(2)+\Phi(1)=0{,}8236.$$

Значение $\Phi(x)$ находится по таблице функции Лапласа.

**Задания:**

6.1 Случайная величина X имеет распределение Эрланга 2-го порядка с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda^2xe^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

6.2 Случайная величина $Y$ имеет плотность вероятности

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{x^4}, & x\in[1,2];\\ 0, & x\notin[1,2].\end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию случайной величины $Y$.

6.3 Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a=8$ и $\sigma^2=9$. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (5;9).

6.4 Случайная величина X имеет ненулевую плотность распределения $p(x) = (\sin x)/2$ на интервале $(0;\pi)$. Найти математическое ожидание функции $Y = X^2$.

**6.5** Случайная величина X имеет ненулевую плотность распределения $p(x) = \frac{2x}{25}$ в интервале (0,5). Найти дисперсию X.

**6.6** Случайная величина X имеет распределение Эрланга 4-го порядка с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\lambda^4}{3!} x^3 e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**6.7** Случайная величина $Y$ имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию $Y$.

**6.8** Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (12; 14).

**6.9** Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения



$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le -2; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & при\ -2 < x \le 2; \\ 1 & при\ x > 2. \end{cases}$$

**6.10** Найти плотность распределения случайной величины $Y = 3X + 1$, если X имеет нормальное распределение с $MX = 2$ и $DX = 0{,}25$.

**6.11** Случайная величина X имеет распределение Эрланга 3-го порядка с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{\lambda^3}{2!} x^2 e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

**6.12** Случайная величина $Y$ имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию случайной величины $Y$.

**6.13** Вычислить вероятность того, что случайная величина X, имеющая нормальное распределение, при трех испытаниях хотя бы один раз окажется в (1,2), если математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 1.5 и 1.2.

**6.14** Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в (0,4; 1)

**6.15** Случайная величина X имеет ненулевую плотность распределения $p(x) = x + 0{,}5$ на $(0,1)$. Найти математическое ожидание функции $Y = X^3$.

**6.16** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda > 0$.

**6.17** Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x}, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию случайной величины X.

**6.18** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, меньшая 0,04.

**6.19** Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 0,04. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в (1,2).

**6.20** Случайная величина X имеет ненулевую плотность распределения $p(x) = \cos x$ на $(0, \pi/2)$. Найти математическое ожидание функции $Y = X^2$.

**6.21** Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & x \in [0, \pi/2]; \\ 0, & x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию



случайной величины X.

**6.22** Случайная величина X имеет распределение Эрланга 5-го порядка с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{\lambda^5}{4!} x^4 e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X

**6.23** Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/4, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

**6.24** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, большая 0,05.

**6.25** Случайная величина X имеет нормальное распределение, $MX = 6$; $DX = 4$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (4,8).

**6.26** Случайная величина X имеет плотность плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \sin 2x, & x \in [0, \pi/2]; \\ 0, & x \notin [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Найти параметр C, функцию распределения и дисперсию случайной величины X.

**6.27** Случайная величина X имеет плотность $p(x) = 2x$ на

(0,1). Найти начальные и центральные моменты 1-4-го порядков.

**6.28** Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

**6.29** Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром 0,6. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в (2;5).

**6.30** Случайная величина X имеет функцию распределения $F(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx.$ Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из (0;1).



## Литература


1 Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993.-269 с.

2 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.-479 с.

3 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.-400 с.

4 Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – М.: Наука, 1965.-632 с.

5 Круткович Г.И., Мордасова Г.М. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970.-512 с.

6 Бураковский В.В. Лабораторный практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов математического и экономического факультета. – Гомель, ГГУ им. Ф.Скорины, 1993. - 42 с.

## Содержание:



Учебное издание

Бураковский Владимир Викторович

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**
Часть 1

Подписано в печать 28.05.2002 г. Формат 60x84 1/16.

Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл. п.л. 2.9.

Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 100 экз.

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Отпечатано на ротапринте Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

б/ч

246019, г. Гомель, ул. Советская, 104.