УДК 517.538.52+517.538.53

А. В. Герман, Е. П. Кечко

О НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

В работе установлены верхние оценки для модулей нулей многочленов Эрмита (аппроксимаций Эрмита – Паде I типа), системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$, *где* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ *– произвольные действительные числа. Доказанные утверждения дополняют и обобщают известные результаты Э. Саффа и Р. Варги, Ф. Вилонского о поведении нулей многочленов Эрмита для системы экспонент* $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) $(n-1)$–го порядка для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ принято называть $k+1$ многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \ \ z \to 0, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю. Этот тип аппроксимаций в 1883 году ввел Ш. Эрмит [1], с их помощью можно доказать трансцендентность числа e [2].

В одномерном случае общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенству (1), принадлежит Паде [3]. В многомерном случае, когда $k \geq 2$, начало интенсивного и систематического изучения аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для произвольных систем аналитических функций связано с появлением работ К. Малера [2], [4], [5]. Аппроксимации Эрмита – Паде I типа имеют множество приложений в теории приближений аналитических функций [6], [7] и в теории диофантовых приближений, в частности, для измерения иррациональности [8], в доказательствах трансцендентности [5], в исследованиях алгебраической природы математических констант [9] (о других приложениях см. обзоры [10], [11].

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде экспоненты. В этом случае многочлены Паде $A_0(z) = -p^1_{n-1}(z)$, $A_1(z) = q_{n-1}(z)$ находятся из условий

$$q_{n-1}(z)e^{z} - p^1_{n-1}(z) = O(z^{2n-1}) \tag{2}$$

с точностью до однородной константы. Однородная константа задаётся условиями нормировки, которые однозначно определяют эти многочлены.

Поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспоненциальной функцией, исследовал Г. Сеге [12]. Э. Сафф и Р. Варга [13] изучили расположение нулей аппроксимаций Паде экспоненты и нашли границы кольца, в котором находятся нули её многочленов Паде. В частности, в диагональном случае ими доказано следующее утверждение, известное как «теорема о кольце».

Ф. Вилонский [14] получил оценку сверху для модулей нулей многочленов $\{A_p(z)\}_{p=0}^{k}$, которые определяются равенствами (1). Г. Шталь [14] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде I типа системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$, и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости.

В данной статье рассматриваются диагональные аппроксимации Эрмита-Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$. Нас интересует поведение нулей многочленов Эрмита $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$, имеющих степень не выше $n-1$ и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \ \ z \to 0, \tag{3}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ *– произвольные действительные числа. Тогда при* $n \geq 2$, $k \geq 1$ *нули многочлена* $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq k$, *лежат в круге* $\{z : |z| < R_n^p\}$, *где*

$$R_n^p = 2(n-1/3)\left[\sum_{j=1}^{p} 1/(\lambda_p - \lambda_{p-j}) + \sum_{j=1}^{k-p} 1/(\lambda_{p+j} - \lambda_p)\right]. \tag{4}$$

В случаях, когда $p = 0$ *или* $p = k$, *соответственно первая и вторая суммы в скобках равны нулю.*

При $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, и $k = 1$ из теоремы 1 следует, что все нули многочленов Паде $q_{n-1}(z)$, $p_{n-1}^1(z)$ лежат в круге $\{z : |z| < 2(n-1/3)\}$, что согласуется с теоремой Э. Саффа и Р. Варги.

2. Иллюстрирующий пример.

Согласно теореме 1 нули многочленов Эрмита A_n^p лежат в круге с центром в нуле, радиус которого R_n^p зависит как от степени многочлена, так и от взаимного расположения показателей $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ системы экспонент. В связи с этим представляет интерес вопрос о точности полученной в теореме 1 верхней оценки для модулей нулей A_n^p в случае, когда число n – фиксировано, а расстояние между соседними членами последовательности $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ является сколь угодно малой величиной.

Представление многочленов A_n^p с помощью интегралов позволяет при $n = 2,\ 3,\ 4$ найти точные значения всех нулей A_n^p. Ограничимся случаями, когда $n = 3$.

Две бесконечно большие при $\varepsilon \to a$ неотрицательные функции $\varphi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$ имеют одинаковый порядок ($\varphi(\varepsilon) \sim \psi(\varepsilon)$), если $\lim_{\varepsilon \to a} \varphi(\varepsilon)/\psi(\varepsilon) = A$, где $0 < A < +\infty$.

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{3}$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1$. Пусть $r_j^p(\varepsilon)$ – нули многочлена A_n^p, $r_n^p(\varepsilon) := \max\{r_j^p(\varepsilon) \colon j = 1,\ 2, \ldots,\ n-1\}$, а $R_n^p(\varepsilon)$ – радиус соответствующего круга, который определяется равенством (4). С помощью элементарных вычислений при $\varepsilon \to 0$ получаем, что

$$r_3^p(\varepsilon) \sim R_3^p(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}, \text{ для } p = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\sqrt{90} \leftarrow r_3^0(\varepsilon) < R_3^0(\varepsilon) = (16/3)(1 + 2/(1 - \varepsilon^2)).$$

При $\varepsilon \to 1$

$$r_3^p(\varepsilon) \sim R_3^p(\varepsilon) \sim \frac{1}{1 - \varepsilon}, \text{ для } p = 0,\ 1,$$

$$\sqrt{13} \leftarrow r_3^2(\varepsilon) < R_3^2(\varepsilon) = (16/3)(1 + 2/\varepsilon),$$

$$\sqrt{582}/4 \leftarrow r_3^3(\varepsilon) < R_3^3(\varepsilon) = (16/3)(1/(1+\varepsilon) + 2/(2\varepsilon)).$$

Данный пример показывают, что для рассматриваемой в нём систем экспонент при $n = 3$ полученные в теореме 1 неравенства для модулей нулей соответствующих многочленов Эрмита являются точными в смысле порядка при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon \to 1$).

Литература

1. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – V. 21. – P. 289–308.

2. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P. 118–150.

3. Pade, H. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – V. 16. № 3. – P. 394–426.

4. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – V. 19. – P. 95–166.

5. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – V. 168. – P. 200–227.

6. Boyd, J. Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev – Hermite – Pade method / J. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math.– 2009. – V. 223. № 2. – P. 693–702.

7. Beckermann, B. How well does the Hermite – Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – V. 80. № 274. – P. 931 – 958.

8. Chudnovsky, G.V. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π, in "Lecture Notes in Math". – V. 925. – P. 299 – 322 / G.V. Chudnovsky. – New York/Berlin: Springer-Verlag, 1982.

9. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М.: МИАН, 1988.

10. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in "Progress in Approximation Theory" (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York/Berlin: Springer-Verlag, 1992.

11. Аптекарев, А. И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6(402) – С. 37–122.

12. Szegö, G. Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe / G. Szegö // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.

13. Saff, E. On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in "Pade and Rational Approximations: Theory and Applications" (E. B. Saff and R. S. Varga,Eds.) / E. Saff, R. Varga. – New York: Academic Press, 1977.

14. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90, № 2. – P. 283–298.

15. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomals associated with the exponential function/ H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193 – 220.

УДК 004.7

Д. В. Гетиков, М. И. Жадан

СОЗДАНИЕ БИЗНЕС-ЛОГИКИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ MBEANS

Статья посвящена использованию основных технологий проектирования и верстки web-документов в специальной среде разработки – Domino Designer. Решена задача по реализации web-ориентированной базы данных «Грузоперевозки», созданной в среде универсального корпоративного средства управления данными Lotus Notes. Используя возможности MBean, создается бизнес-логика приложения. С применением технологий HTML создан пользовательский интерфейс. Компоненты приложения реализованы на языке LotusScript и JavaScript в среде разработки Notes Designer.

Приложение учета перевозки грузов «Грузоперевозки», позволит вести бухгалтерский учет предприятия, а также содержать данные о сотрудниках рабочих должностей (водители). Оно использует интерфейс, в котором много операций будут реализованы через web при помощи технологии XPages, что позволит облегчить процесс загрузки, управления и отображения различных изображений.

Процесс разработки приложения разделен на несколько этапов: