УДК 512.542

В. А. Кравцов, В. В. Аниськов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРИВОДИМЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Пусть H – непустой класс конечных групп, F – некоторая локальная формация конечных групп. В том случае, когда решетка локальных формаций, заключенных между F и $F \cap H$ имеет конечную длину n, число n называют H-дефектом локальной формации F. Если H-дефект достаточно мал, то свойства локальной формации F могут изучаться с помощью описания этого дефекта относительно наиболее известных классов групп. Если локальная формация может быть представлена в виде объединения своих собственных локальных подформаций в решетке локальных формаций, то такая локальная формация называется приводимой. В статье приводится классификация приводимых локальных формаций конечных групп, имеющих заданный дефект относительно некоторого класса конечных групп.

В работе используются стандартные определения и обозначения, которые при необходимости можно найти в [1–2]. Мы рассмотрим здесь лишь самые необходимые для прочтения данной работы.

Группой называется непустое множество элементов, на котором определена бинарная алгебраическая операция, обладающая свойством ассоциативности и допускающая существование нейтрального элемента и элементов, симметричных каждому элементу группы. В дальнейшем речь будет идти только о конечных группах, т. е. группах, состоящих из конечного числа элементов.

Множество групп называется классом групп, если оно содержит вместе с каждой своей группой и все другие группы, ей изоморфные. В качестве наиболее часто используемых можно привести класс всех групп, класс простых групп, класс разрешимых групп.

Формацией конечных групп называется такой класс групп, который замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Локальной формацией называется формация, которая обладает хотя бы одним так называемым локальным экраном [1]. Подмножество локальной формации, которое само является локальной формацией, называется локальной подформацией этой локальной формации. Локальная подформация F_1 называется максимальной локальной подформацией локальной формации F, если из того, что существует локальная подформация F_2 формации F такая, что $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F$, всегда следует, что либо $F_2 = F_1$, либо $F_2 = F$.

В докладе, прочитанном Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1978 г., была поставлена общая проблема изучения минимальных локальных не H-формаций, т. е. локальных формаций, не входящих в класс H, но все собственные локальные подформации которых в классе H содержатся. Изучение такого рода формаций проводилось А.Н. Скибой.

Эффективным явилось введение А.Н. Скибой в работе [3] понятия H-дефекта локальной формации. Пусть H – непустой класс конечных групп, F – некоторая локальная формация конечных групп. Если решетка локальных формаций, заключенных между F и $F \cap H$ имеет конечную длину n, то число n называется H-дефектом локальной формации F.

В работе [4] была предпринята первая попытка обобщения исследований формаций конечных групп относительно заданного дефекта. Эта идея в дальнейшем получила развитие в работе [5], где была приведена классификация приводимых локальных формаций конечных групп, имеющих дефект 2 относительно произвольной 2-кратнолокальной формации в классе разрешимых групп.

В результате изучения работы [5] и проведенных затем исследований, была получена теорема, которая приводится ниже и является расширением основного результата указанной работы.

Теорема. Пусть H – некоторая произвольная 2-кратнолокальная формация классического типа. Пусть F – такая приводимая локальная формация, всякая однопорожденная локальная подформация которой имеет конечную длину. Тогда и только тогда F – локальная формация H-дефекта 2, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $F = H_1 V_l H_2 V_l M$, где H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не H-формации, а M – некоторая локальная H-формация;

2) $F = H_3 V_l M$, где H_3 – неприводимая локальная формация H-дефекта 2, а M – некоторая локальная H-формация.

Доказательство теоремы традиционно разбивается на доказательство необходимости и доказательство достаточности. Приведем основные идеи, которые лежат в основе этих структурных компонент.

Доказательство необходимости начинается с того, что, поскольку формация F в классе H не содержится, то на основании леммы 20.2 [2, с. 195], делается вывод о том, что в формации F существует такая максимальная локальная подформация F_1, H-дефект которой равен 1. Тогда, согласно Теореме 1 [5, с. 67], $F_1 = MV_l H_1$, где M – некоторая локальная формация, которая в классе H содержится, а H_1 – минимальная локальная не H-формация.

Затем рассматриваются два логически возможных случая:

1) в формации F содержится еще одна минимальная локальная не H-формация H_2;

2) в формации F не содержится других минимальных локальных не H-формаций, отличных от H_1.

В первом случае получаем, что $F = H_1 V_l H_2 V_l M$ и поэтому приходим к тому, что формация F удовлетворяет первому условию теоремы.

Во втором случае, после построения ряда цепочек вложенных формаций, используя условие теоремы в котором сказано, что каждая однопорожденная формация имеет конечную длину, приходим в конечном итоге к выводу о том, что формация F удовлетворяет второму условию теоремы.

В основе доказательства достаточности лежит использование прямой проверки с помощью леммы 20.3 [2, с. 195] и леммы 20.4 [2, с. 195].

Литература

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков – М.: Наука, 1978 – 267 с.

2. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба – М: Наука, 1989 – 253 с.

3. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А. Н. Скиба, Е. А. Таргонский // Мат. заметки. – 1987 – Т. 41, № 4. – С. 490–499.

4. Аниськов, В. В. Некоторые общие свойства локальных формаций с заданным X-дефектом / В. В. Аниськов – Гомель, 1994. – 14 с. – (Препринт/ Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 20).

5. Аниськов, В. В. О приводимых локальных формациях с заданным Н-дефектом / В. В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук – 1997 – № 4 – С. 65–68.