Некоторые сведения из теории вероятностей.

Одним из основополагающих понятий теории вероятностей является понятие события или случая. Под ***событием*** в теории вероятностей понимается всякое явление, относительно которого имеет смысл ставить вопрос, может оно произойти или нет. Примером события могут быть: выпадение герба или решки при бросании монеты, попадание молекулы газа в определенный объем dV пространства, т. е. наличие у нее значений координат, лежащих в пределах от x, y, z до $x + dx, y + dy, z + dz$.

Опыт, в результате которого появляется или не появляется то или иное событие, называется ***испытанием.***

Событие называется ***случайным***, если в результате испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Два случайных события называются ***равновероятными***, если при достаточно большом числе испытаний N каждое событие появляется одинаково часто. При бросании монеты появление герба или решки являются равновероятным событием, поскольку при испытаниях то и другое события происходят приблизительно одинаковое число раз. Например, возможен такой типичный исход: число испытаний N — 100, число появлений герба и решки соответственно равно 47 и 53 (или наоборот). Сильные отклонения возможны, однако при достаточно больших значениях N они реализуются редко. Это так называемые ***флуктуации*** (от лат. fluctuatio — отклонение от среднего).

События, подобные опыту с монетой, называются *несовместимыми,* так как появление одного исключает появление другого.

Суммой двух событий **является** событие, состоящее в появлении одного события или другого или обоих. вместе. Сумма двух событий *А и В* символически обозначается как $A + B$.

Произведением двух событий называется событие, состоящее в появлении обоих событий. Произведение событий *А и В* обозначается в виде произведения символов этих событий *(АВ)*.

Вероятностью случайного события называется количественная мера, равная частоте его появления при неограниченном числе испытаний N. Например, если при N испытаниях событие, имеющее признак *А,* появляется N_A раз, то вероятность этого события определяется соотношением:

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Два события называются ***независимыми***, если вероятность появления каждого из этих событий не зависит от того, произошло ли другое событие.

Приведем без доказательства только две теоремы из теории вероятностей, которые нужны для понимания дальнейшего материала.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме их вероятностей:

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$p(AB) = p(A)p(B),$$

Среднее значение дискретной и непрерывной случайной величины.

Если в опыте возможна реализация только несовместимых событий, то сумма вероятностей всех n **несовместимых событий** равна единице:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{N_i}{N} = 1$$

Это соотношение называется **условием нормировки вероятностей** p_i

Если значение случайной величины y_i принимает ряд из M различных значений, то среднее значение *y* определяется по формуле:

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

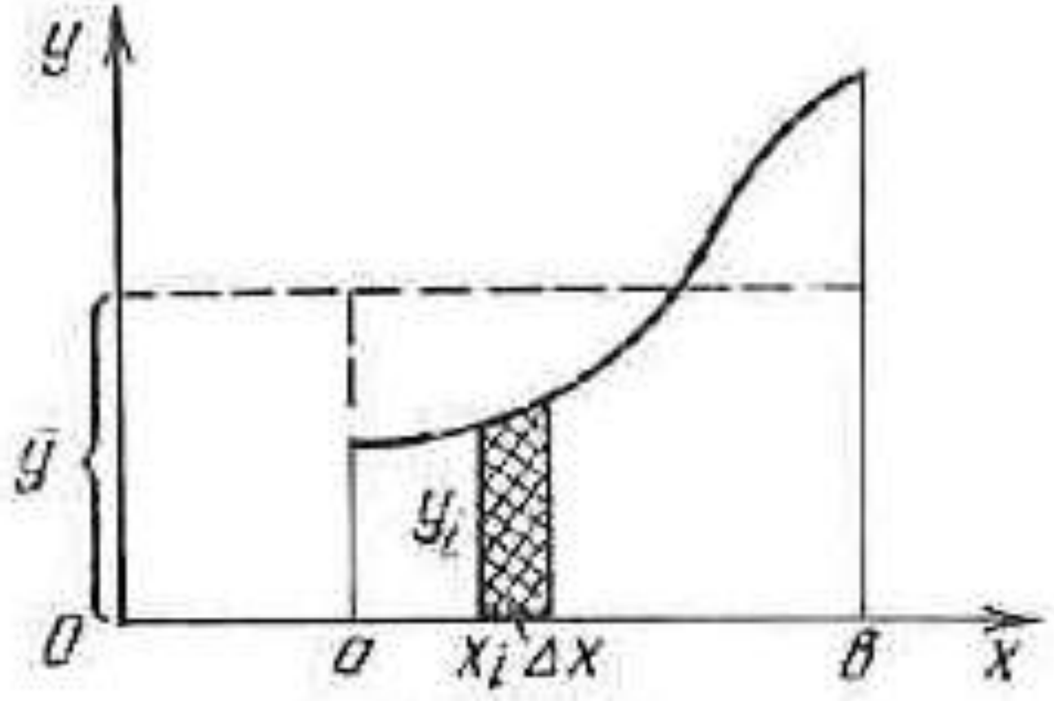
Часто встречается ситуация, когда в серии из N испытаний каждое возможное значение y_i- (i = 1, 2, ..., *n)* повторяется N_i раз, тогда справедливо соотношение:

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} N_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{N_j}{N} y_j = \sum_{j=1}^{n} p_j y_j$$

В статистике последнее соотношение называется **математическое ожидание** случайной величины:

Выше мы рассматривали случайную величину *y,* которая принимала дискретный ряд возможных значений *y,*. Если же некоторая случайная величина *y = y(x)* может принимать непрерывный ряд значений в интервале *x* от *a* до b (рисунок 1), то, разделив интервал *b — a* на *M* достаточно малых и равных участков *dx (M = (b — a)/dx),* получим:

$$\langle y \rangle = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i = \frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{M} y_i \Delta x$$



Устремив далее dx к нулю, а M к бесконечности, приходим к среднему y в виде интеграла от y по dx.

$$\langle y \rangle = \frac{1}{b - a} \int_a^b y(x)dx$$

При определении математического ожидания непрерывной случайной величины $y(x)$ вводится вероятность dp того, что численное значение случайной величины x заключено в пределах от x до $x + dx$. Эта вероятность, пропорциональная ширине бесконечно узкого интервала dx, может быть представлена в виде:

$$dp = f(x)dx \Rightarrow f(x) = \frac{dp}{dx}$$

Функция *f(x)* в выражении называется *плотностью вероятности (или функцией распределения)* случайной величины *x*. Нормировка вероятности и математическое ожидание будут вычисляться с помощью определенных интегралов:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i = \int_a^b dp = \int_a^b f(x)dx = 1$$

$$\langle y\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta p_i = \int_a^b y(x)f(x)dx$$

Например, при $y(x) = x$ и $y(x) = x^2$ с помощью находим среднее значение x и среднеквадратичное значение x^2 случайной величины x.

$$\langle x \rangle = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2 f(x) dx$$