

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТРАНСПАРАНТА НА ИЗОБРАЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ

А. П. Смирнов и А. Д. Гальперн

Рассмотрено влияние ошибок периодичности и фокусировки первичного периодического объекта на качество изображения Френеля. Показано, что вышеуказанные ошибки приводят к ухудшению разрешения в изображении Френеля и появлению фона.

При исследованиях саморепродукции, а также при использовании этого явления для решения ряда технических задач, связанных с получением объемных изображений [1], необходимо получить матрицу изображений двумерного объекта. Эта задача может быть решена либо при помощи линзовых растров, либо при помощи других устройств, таких, например, как дырчатые маски, зеркальные коридоры [2] и т. д. Использование тех или иных устройств размножения приводит (в результате их несовершенства) к ошибкам в периодичности следования элементарных изображений и к несовпадению плоскостей их фокусировки. Например, при использовании линзовых растров эти ошибки возникают из-за различия фокусных расстояний отдельных линзочек раstra и ошибок периодичности.

Данная работа посвящена исследованию влияния вышеуказанных ошибок на изображения Фурье и Френеля периодических структур (дифракционные картины Френеля за транспарантом, освещаемым монохроматической волной).

Рассмотрим периодическую структуру $t(x)$ (при анализе ограничимся одномерным случаем)

$$\left. \begin{aligned} t(x) &= g(x) \otimes \varphi(x), \\ \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na + \Delta_n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $g(x)$ — функция распределения коэффициента пропускания элементарной ячейки по амплитуде, \otimes — операция свертки, $\delta(x)$ — δ -функция Дирака, N — число элементарных ячеек, a — период следования элементарных ячеек. Будем считать, что Δ_n (ошибки периодичности элементарных ячеек) — гауссовские случайные независимые величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией σ . Тогда функция распределения плотности вероятности может быть записана следующим образом:

$$f(\Delta_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta_n^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Интенсивность изображения Френеля, наблюдаемого на расстоянии z за транспарантом (плоскость OXY совмещена с плоскостью транспаранта) при освещении его плоской монохроматической волной с длиной волны λ , определяется следующим выражением:

$$\left. \begin{aligned} I(x) &= |g(x) \otimes \varphi(x) \otimes h(x)|^2, \\ h(x) &= (i\lambda z)^{-1/2} \exp\left(i\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp\left(i\frac{\pi x^2}{\lambda z}\right), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $h(x)$ — импульсный отклик свободного пространства толщины z в параболическом приближении [3]. Перепишем (3) в следующем виде:

$$I(x) = \frac{1}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x_1) g(x-x_2) \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x_1 - na - \Delta_n)^2\right] \times \\ \times \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (x_2 - ma - \Delta_m)^2\right] dx_1 dx_2. \quad (4)$$

Определим математическое ожидание интенсивности. Поскольку Δ_n и Δ_m ($n \neq m$) независимы и распределены нормально, то совместная их функция распределения представляет собой произведение функций распределения сомножителей. Поэтому математическое ожидание произведения экспоненциальных сомножителей в (4) при $n \neq m$ равно произведению их математических ожиданий. Используя теорему теории вероятности о нахождении числовых характеристик функции случайных величин, можно записать следующее выражение для математического ожидания m_n сомножителя с индексом n :

$$m_n(x_1 - na) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta_n) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x_1 - na - \Delta_n)^2\right] d\Delta_n = f \otimes \sqrt{i\lambda z} h. \quad (5)$$

Подставляя (2) в (5) и используя табличные интегралы [4], получим

$$m_n = \frac{\exp\left(i \frac{\pi \sigma^2}{\lambda z}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2\pi \sigma^2}{\lambda z}}} \exp\left[\frac{\pi (x - na)^2}{2\pi \sigma^2 + i\lambda z}\right]. \quad (5a)$$

Слагаемое математического ожидания интенсивности при $m \neq n$ можно записать следующим образом:

$$A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n m_n(x_1 - na) g(x-x_1) \sum_m m_m(x_2 - ma) g(x-x_2) dx_1 dx_2 - \\ - \sum_{m=n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m_m(x_1 - na) g(x-x_1) m_m(x_2 - ma) g(x-x_2) dx_1 dx_2. \quad (6)$$

В случае, когда $m=n$, математическое ожидание произведения экспонент, стоящих в (4), имеет следующий вид:

$$M_n = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z} (x_1 - na)^2\right] \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} (x_2 - na)^2\right] \exp\left[-\frac{8\sigma^2\pi^2}{\lambda^2 z^2} (x_1 - x_2)^2\right]. \quad (7)$$

Если ошибка периодичности транспаранта на порядок меньше, чем период транспаранта, то, как показывают проведенные нами оценки, третий сомножитель в (7) в пределах интегрирования, определяемых шириной функции $g(x)$, при вычислении математического ожидания интенсивности $\langle I \rangle$ близок к единице. Используя (4), (5), (6) и (7), запишем выражение для математического ожидания интенсивности изображения Френеля

$$\langle I \rangle = |g \otimes \varphi_0 \otimes h \otimes f|^2 - |g \otimes h \otimes f|^2 \otimes \varphi_0 + |g \otimes h|^2 \otimes \varphi_0, \quad (8)$$

где $\varphi_0 = \varphi$ при $\Delta_n = 0$. Первый член в (8) представляет собой интенсивность изображения Френеля, подверженного дополнительной пространственной обработке фильтром с импульсным откликом в виде функции $f(x)$. Третий член представляет сумму интенсивностей дифракционных картин Френеля каждой элементарной ячейки и соответствует случаю некогерентного освещения. Второй член отличается от третьего только тем, что каждый член суммы фильтруется с импульсным откликом $f(x)$. Таким образом, помимо низкочастотной фильтрации в изображении Френеля появляется фон (второе и третье слагаемые), снижающий контраст изображения. На рис. 1

представлены рассчитанные по (8) средние интенсивности центрального штриха в изображении Френеля решетки, состоящей из 10 бесконечно узких штрихов и имеющих разные ошибки в периодичности. Из графика видно, что с увеличением дисперсии ошибки периодичности падает контраст изображений и происходит уширение штриха. Известно, что при увеличении числа штрихов качество изображений Френеля улучшается [5] (вследствие увеличения апертуры транспаранта), но, как видно из рис. 2, где представлены графики зависимости контраста от числа штрихов, одновременно падает контраст.

Рассмотрим подробнее когерентную передаточную функцию ошибки периодичности $\psi(\nu)$ [преобразование Фурье импульсного отклика $f(x)$]

$$\psi(\nu) = \exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2). \quad (9)$$

Сравним ее с когерентной передаточной функцией, описывающей влияние конечных размеров транспаранта [5] $s(\lambda z \nu)$, где $s(x)$ — функция ограни-

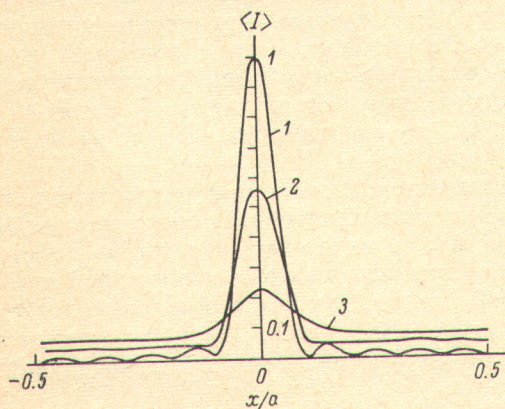


Рис. 1. Средние интенсивности центрального штриха в изображении Френеля, решетки, состоящей из 10 бесконечно узких штрихов для различных величин ошибок.

1 — $\sigma/a=0.01$, 2 — 0.05, 3 — 0.1.

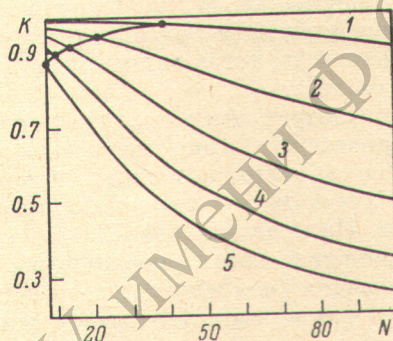


Рис. 2. Графики зависимости контраста от числа штрихов — в центре изображения Френеля ($p=1/2$) для различных величин ошибок.

1 — $\sigma/a=0.01$, 2 — 0.02, 3 — 0.03, 4 — 0.04, 5 — 0.05. Точками отмечено эффективное число штрихов решетки.

чения транспаранта. Если полуширина функции $\psi(\nu)$ равна ширине функции $s(\lambda z \nu)$, то ограничения разрешения, обусловленные этими функциями, должны быть одного порядка. В работе [5] ограничение размеров транспаранта связано с качеством элементарных изображений в изображении Френеля. Поэтому, сравнивая функции ψ и s , можно указать эффективные размеры или оптимальное число ячеек транспаранта, обладающего ошибкой периодичности и имеющего наилучшее качество изображения. Причем дальнейшее улучшение качества изображений за счет увеличения размеров транспаранта наблюдаться не будет, а приведет лишь к уменьшению контраста изображений. Таким образом, для каждой величины ошибки периодичности можно указать эффективное число элементарных ячеек и наоборот — по заданному числу элементарных ячеек указать необходимое значение ошибки. Для получения количественного выражения приравняем максимальные пространственные частоты функций $s(\lambda z \nu)$ и $\psi(\nu)$ [для $\psi(\nu)$ за ν_{\max} примем частоту, соответствующую полуширине функции $\psi(\nu)$]. Получим выражение для эффективного числа ячеек

$$N_0 = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi} \frac{\lambda z}{\sigma a} + 1 \approx \frac{3pa}{4\sigma} + 1, \quad (10)$$

где в последнем равенстве расстояние z до плоскости наблюдения выражено в единицах Фурье, равных расстоянию до первого изображения

Фурье (плоскость первой саморепродукции). Так, при построении графиков на рис. 1 $p=1/2$ и эффективный размер для различных отношений σ/a (кривые 1-3) равен соответственно 39, 9 и 5. Таким образом, для транспаранта (1) число элементарных ячеек 10 меньше оптимального числа 39, а для транспаранта (3) больше. Наилучшим образом согласованы между собой число элементарных ячеек (10) и ошибка периодичности $\delta/a=0.05$ во втором случае. В первом случае возможно добиться улучшения качества изображений за счет увеличения числа штрихов до 39, а в третьем случае, не снижая качества изображений, можно увеличить контраст изображений, уменьшив число штрихов до 5. На рис. 2 представлены вычисленные по формуле (8) для $g(x)=\delta(x)$ кривые изменения контраста в центре изображения Френеля ($p=1/2$) в зависимости от числа штрихов N для различных величин ошибок $\sigma/a=0.01$ для кривой 1, 0.02 для кривой 2 и т. д. На графиках точками отмечен эффективный размер решеток, вычисленный по (10). Область на графике ниже этих точек соответствует случаю, где качество изображений ограничено ошибкой периодичности транспаранта, а выше — размерами транспаранта. Из графиков видно, что изменение контраста с ростом N пропорционально величине ошибки. Для кривой 1, например, увеличение размеров решетки больше эффективного не приведет к заметному снижению контраста, тогда как в случае кривой 5 контраст падает в 3 раза в области изменения N .

Следует отметить, что закон падения контраста при возрастании N , приведенный выше, не учитывает, во-первых, конечности пространственной полосы частот свободного пространства, а, во-вторых, вследствие выбора $g(x)=\delta(x)$ ограниченности пространственного спектра элементарной ячейки. На практике преобладает второй фактор, так как наименьшие детали периодического транспаранта обычно больше, чем λ . Пусть элемент разрешения (наименьшая разрешимая деталь) периодического транспаранта в k раз меньше периода транспаранта

$$\gamma = \frac{a}{k}. \quad (11)$$

Определим размеры транспаранта, разрешающего эту наименьшую деталь γ в плоскости изображения Фурье. Когерентная передаточная функция ограничения $s(\lambda z v)$ в случае одномерной решетки имеет вид $\text{rect} \left[\frac{\lambda z v}{(N-1)a} \right]$, где $\text{rect}(x)$ — П-образная функция с носителем $|x| \leq 1/2$, откуда, приравнявая $1/\gamma$ максимальной пространственной частоте, получим, что для передачи детали размеров γ наименьший размер транспаранта равен

$$N_\gamma = \frac{4pa}{\gamma} + 1. \quad (12)$$

Увеличение размеров транспаранта больше, чем N_γ , никак не повлияет на изображение Френеля. Это следует из простых геометрических соображений, связывающих гармоники поля с углом их дифракции на транспаранте. Поэтому всегда справедливо неравенство $N_s \leq N_\gamma$. В случае равенства $N_s = N_\gamma$, как следует из (10) и (12), $\gamma = 16\sigma/3$, т. е. приблизительно равна полной ширине «колокольчика» функции $f(x)$. Если же $N_s < N_\gamma$, то $\gamma < 16\sigma/3$ и в изображении Френеля элементы величины γ уже не разрешаются и увеличение N_s вплоть до N_γ приведет к уменьшению контраста изображения. Очевидно, что в случае $g(x)=\delta(x)$, N_γ равнялось бесконечности.

Теперь рассмотрим ошибку, связанную с несовпадением плоскостей фокусировки. В этом случае ошибка распределена по оси z и вместо (4) запишем

$$I(x) = \frac{1}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x_1) g(x-x_2) \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[\frac{i\pi(x_1 - na)^2}{\lambda(z + \Delta z_n)} \right] \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{i\pi(x_2 - ma)^2}{\lambda(z + \Delta z_m)} \right] dx_1 dx_2. \quad (13)$$

Математическое ожидание интенсивности получим, действуя так же, как и при определении (8)

$$\langle I \rangle = |g \otimes \varphi_0 \otimes (hu)|^2 + |g \otimes h|^2 \otimes \varphi_0 - |g \otimes (hu)|^2 \otimes \varphi_0, \quad (14)$$

где $u(x) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{\lambda z^2} \right)^2 x^2 \right]$. Из (14) видно, что эта ошибка также приводит к появлению фона и пространственно-частотным ограничениям. Функцию $u(x)$ аппроксимируем П-образной функцией $\text{rect} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{\lambda}} \frac{x}{z} \right)$. Объединенная когерентная передаточная функция ошибки и свободного пространства может быть записана следующим образом:

$$\exp(-i\pi\lambda z v^2) \otimes \text{sinc} \left[2\sqrt[4]{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\sigma}} z v \right]. \quad (15)$$

Она близка к нулю, когда ширина функции sinc больше или равна локальному периоду когерентной передаточной функции свободного пространства, т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda z v} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}} \frac{1}{z}. \quad (16)$$

Откуда получим

$$v_{\max}^z = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\lambda\sigma}} \approx \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{\lambda\sigma}}. \quad (17)$$

Максимальная пространственная частота когерентной передаточной функции ошибки периодичности, как следует из (9), равна

$$v_{\max}^x = \frac{3}{2\pi\sigma}. \quad (18)$$

Сравнивая (17) и (18), заключаем, что ошибка периодичности сильнее влияет на изображение Френеля, чем ошибка несовпадения плоскостей фокусировки. Если при ошибке периодичности наименьшая деталь разрешения равна $\sim 2\sigma$, то при ошибке несовпадения плоскостей фокусировки она равна $\sim \sqrt{\lambda\sigma}$. Если, например, $\sigma = 100\lambda$, то имеет 200λ и 10λ соответственно.

Таким образом, ошибки периодичности и фокусировки приводят как к уменьшению разрешения в изображении Френеля, так и к появлению дополнительного фона. В связи с этим уменьшение этих ошибок является важной задачей при создании устройств, производящих размножение изображений.

Литература

- [1] Ю. Н. Денисюк. ЖТФ, 45, 2574, 1975.
- [2] O. Wunghdahl. J. Opt. Soc. Am., 63, 416, 1973.
- [3] А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике, 333. «Мир», М., 1971.
- [4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3.923. М., 1962.
- [5] А. П. Смирнов. Опт. и спектр., 44, 359, 1978.

Поступило в Редакцию 21 марта 1979 г.