Э. В. Майструк, И. П. Козярский, П. Д. Марьянчук, К. С. Ульяницкий, J. Rappich // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, вып. 10. – С. 1886–1890.

3 Кондрашин, В. И. Определение толщины тонких оптически прозрачных пленок SnO_2 конвертным методом [Электронный ресурс] / В. И. Кондрашин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. Электроника, измерительная и радиотехника. – 2016. – № 2 (38). – С. 93–101. – Режим доступа: CyberLeninka.ru. – Дата доступа 07.05.2017.

4 Бажин, А. И. Влияние режима магнетронного распыления и состава реакционного газа на структуру и свойства пленок *ITO* / А. И. Бажин, А. Н. Троцан, С. В. Чертопалов, А. А. Стипаненко, В. А. Ступак // ФИП. – 2012. – Т. 10, № 4. – С. 342–349.

5 Крылов, П. Н. Оптические свойства пленок *ITO*, полученных высокочастотным магнетронным напылением с сопутствующей ионной обработкой / П. Н. Крылов, Р. М. Закирова, И. В. Федотова // Физика и техника полупроводников. – 2013. – Т. 47, вып. 10. – С. 1421–1424.

6 Ипатова, Е. О. Исследование оптических свойств пленок *ITO* / Е. О. Ипатова, Е. И. Зайцева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: storage.tusur.ru – Дата доступа 07.05.2017.

УДК 519.95

Н. А. Алёшин, Г. Л. Карасёва

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исходная задача оптимального управления с негладким критерием качества сводится к задаче с фазовыми ограничениями. Для полученной задачи введено определения допустимого, оптимального и субоптимального управления и соответствующих траекторий. Введено понятие допустимой пары. Получена формула приращения критерия качества. Сформулирован критерий оптимальности для исследуемой задачи.

Теория оптимального управления возникла в начале 50-х годов в связи с появлением новых задач, поставленных практикой. Необходимость решения актуальных проблем теории автоматического регулирования, динамики полета, потребовала разработки эффективных методов решения экстремальных задач нового типа. Такие задачи стали называться неклассическими вариационными задачами или задачами оптимального управления.

Естественно, что среди непрерывных систем в первую очередь были изучены линейные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Среди результатов этой теории выделяются принцип максимума Л. С. Понтрягина [1], динамическое программирование Р.Беллмана, метод моментов Н. Н. Красовского [2].

Эти уравнения являются математическими моделями многих процессов в различных сферах человеческой деятельности. В них переменные $x(t),\ t \in T,$ представляют значения полного набора внутренних характеристик изучаемого процесса в момент времени *t*. Переменные $u(t),\ t \in T,$ называются переменными управления, A – $n \times n$-матрица, характеризующая динамические свойства объекта, b – n-вектор параметров входного устройства.

Согласно теории дифференциальных уравнений, поведение объекта $x(t),\ t \in T,$ будет однозначным, если задать его начальное состояние $x(0) = x_0$ и управляющее воздействие $u(t),\ t \in T,$ из класса кусочно-постоянных функций.

В целом система представляет собой дифференциальный закон поведения процесса управления. Получение и использование законов поведения в дифференциальной форме широко распространено в современных научных исследованиях, так как она компактно и адекватно выражает фундаментальные свойства многих явлений.

Большие усилия были приложены к созданию эффективных методов решения задач оптимального управления. Однако до сих пор даже для линейных задач не предложено алгоритмов надёжно строящих оптимальное управление.

Линейная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями формулируется в виде:

$$c'x(t_1) \to \max,\ \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx(t_1) = g,$$

$$\alpha_*(t) \le Dx(t) \le \alpha^*(t), \quad f_* \le u(t) \le f^*, \quad t \in T = [0, t_1],$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$; $c,\ A,\ B,\ H,\ D$ – постоянные векторы и матрицы соответствующих размеров.

В классе кусочно-непрерывных функций рассмотрим задачу:

$$\max_{t \in T} \left| d'x(t) \right| \to \min \tag{1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T = \left[0, t^*\right].$$

Здесь $x = x(t) \in R^n$, $u = u(t) \in R$, A – $n \times n$-матрица, $H \in R^{m \times n}$; $rankH = m < n$, $b, d \in R^n$.

Исходная задача эквивалентна задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$J(\alpha, u) = -\alpha \to \max_{\alpha, u}, \tag{2}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx(t^*) = g, \quad |d'x(t)| \le \alpha, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T = \left[0, t^*\right].$$

Введем обозначения: $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$, которые будем использовать в дальнейшем.

<u>Определение 1.</u> Пара $(\alpha, u(\cdot))$ и соответствующая ей траектория $x(\cdot)$ называется допустимыми, если они удовлетворяют всем ограничениям задачи (2).

<u>Определение 2.</u> Оптимальными будем называть допустимую пару $(\alpha^0, u^0(\cdot))$ и соответствующую ей траекторию $x^0(\cdot)$, на которых критерий качества $J(\alpha, u)$ задачи (2) достигает максимального значения.

<u>Определение 3.</u> Допустимое пара $(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon(\cdot))$, для которой выполняется неравенство $J(\alpha^0, u^0(\cdot)) - J(\alpha^\varepsilon, u^\varepsilon(\cdot)) \le \varepsilon$, будем называть ε-оптимальным (субоптимальным) управлением.

Будем считать, что $d'b \ne 0$, и ограничения задачи (1.2) удовлетворяют условию типа Слейтера, т. е. для некоторого числа $\delta > 0$, любого $\Delta g \in R^m$, $\|\Delta g\| < \delta$, существует такое кусочно-непрерывное управление $\bar{u}(\cdot)$, что вдоль него и соответствующей ему траектории $\bar{x}(\cdot)$ выполняются соотношения:

$$\left|\bar{u}(t)\right| < 1, \quad t \in T; \quad H\bar{x}\left(t^*\right) = g + \Delta g.$$

Рассмотрим произвольную совокупность отрезков $T_i = \left[\tau_i, \tau^i\right]$, $\tau_i \le \tau^i << \tau_{i+1}$, $i \in N = \{1,.., p\}$; $N_* = \left\{i \in N : \tau_i < \tau^i\right\}$, $N_0 = N \setminus N_*$, $N = N^+ \cup N^-$, $N^+ \cap N^- = \varnothing$, $N_* = N_*^+ \cup N_*^-$, $N_*^+ \cap N_*^- = \varnothing$. Наряду с допустимой парой $(\alpha, u(\cdot))$ и соответствующей ей траекторией $x(\cdot)$ рассмотрим произвольную пару $(\tilde{\alpha}, \tilde{u}(\cdot))$ и соответствующую ей траекторию $\tilde{x}(\cdot)$.

Получена формула приращения критерия качества

$$\Delta J(u) = \left(-1 + \sum_{i \in N^-} \bar{v}_i + \sum_{i \in N^+} \bar{v}_i\right)\Delta\alpha + \int_{T_H} \psi'(t) b \, \Delta u(t)\, dt + \sum_{i \in N_0} \bar{v}_i \, \Delta\omega(\tau_i) +$$

$$+\sum_{i \in N_*}\left(\frac{\psi'\left(\tau^i\right)b}{d'b}\Delta\omega\left(\tau^i\right) + \left(\bar{v}_i - \frac{\psi'(\tau_i + 0)b}{d'b}\right)\Delta\omega(\tau_i) + \int_{T_i}\frac{\psi'(t)\bar{A}b}{d'b}\Delta\omega(t)\,dt\right).$$

Функция $\psi(\cdot) = (\psi(t),\ t \in T)$ является решением уравнения

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad \psi'\left(t^*\right) = c' - y'H, \ \psi(\tau_i - 0) = \psi(\tau_i + 0) - d\,\bar{v}_i, \quad i \in N, \tag{3}$$

$$A(t) = A, \quad t \in T \setminus \bigcup_{i \in N_*} T_i, \quad A(t) = ZA, \quad t \in T_i, \ i \in N_*,$$

где y – вектор потенциалов терминальных ограничений;

$\bar{v}_i$ – скачки котраектории.

Систему (3) назовём сопряженной системой.

Сформулирован критерий оптимальности для исследуемой задачи. Рассмотрим множества

$$T_a = \left\{t \in T : \left|d'x(t)\right| = \alpha\right\} = \bigcup_{i \in N_a} T_{ai},$$

$$T_{ai} = \left[\tau_i, \tau^i\right], \quad \tau_i \le \tau^i < \tau_{i+1}, \quad i \in N_a = \{1,..., n_0\};$$

$$N_a^+ = \left\{i \in N_a :\ d'x(t) - \alpha = 0,\ t \in T_{ai}\right\}, \quad N_a^- = N_a \setminus N_a^+, \tag{4}$$

$$N_{a*}^+ = \left\{i \in N_a^+ : \tau_i < \tau^i\right\}, \quad N_{a0}^+ = N_a^+ \setminus N_{a*}^+,$$

$$N_{a*}^- = \left\{i \in N_a^i : \tau_i < \tau^i\right\}, \quad N_{a0}^- = N_a^- \setminus N_{a*}^-,$$

$$N_{a*} = N_{a*}^+ \cup N_{a*}^-, \quad N_{a0} = N_{a0}^+ \cup N_{a0}^-, \quad T_{на} = T \setminus \bigcup_{i \in N_{a*}} T_{ai},$$

построенные по допустимой паре $(\alpha, u(\cdot))$ и соответствующей ей траектории.

<u>Определение</u> Допустимая пара $(\alpha, u(\cdot))$ называется регулярной, если множество $T_{a*} = \left\{t \in T_a : \left|u(t) = 1\right|\right\}$ состоит из конечного числа точек и $n_0 < \infty$.

Если в системе (3) в качестве отрезков $T_i, i \in N$, взять отрезки T_{ai}, построенные согласно (4), тогда получим сопряженную систему вида:

$$\dot{\varphi} = -A'\varphi - d\xi(t), \qquad \varphi(t^*) = -H'y,$$

$$\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i + 0) - dv_i,\ i \in N_a; \qquad \varphi(\tau^i) = \varphi(\tau^i + 0) - dv^i,\ i \in N_{a*} \tag{5}$$

справедлива.

Теорема (***Критерий оптимальности***). Пусть в задаче (2) выполняется условие типа Слейтера. Тогда для оптимальности регулярной пары $(\alpha, u(\cdot))$ в задаче (2) необходимо и достаточно существования таких кусочно-непрерывной функции $\xi(t),\ t \in T$, вектора $y \in R^m$ и чисел

$$(v_i,\ i \in N_a; \quad v^i,\ i \in N_{a*}),$$

$$\int_T |\xi(t)| dt + \sum_{i \in N_a} |v_i| + \sum_{i \in N_{a*}} |v^i| = 1,$$

что вдоль соответствующего им решения сопряжённой системы (5) и пары $(\alpha, u(\cdot))$ выполняются соотношения:

$$\varphi'(t) bu(t) = \max_{|u| \le 1} \varphi'(t) bu, \quad -\xi(t) d'x(t) = \max_{|\gamma| \le \alpha} -\xi(t)\gamma,\ t \in T; \tag{6}$$

$$v_i d' x(\tau_i) = \max_{|\gamma| \le \alpha} v_i \gamma, \quad i \in N; \qquad v^i d' x(\tau^i) = \max_{|\gamma| \le \alpha} v^i \gamma, \quad i \in N_*.$$

Из соотношений (6) следует, что на регулярной оптимальной паре $(\alpha, u(\cdot))$ должны иметь места равенства:

$$\varphi'(t) b = 0, \quad t \in T_{ai}, \quad i \in N_{a*}; \quad \xi(t) = 0, \quad t \in T_{на}. \tag{7}$$

Литература

1 Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

2 Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н.Красовский. – М. : Наука, 1968. – 475 с.

3 Карасёва, Г. Л. Критерий оптимальности для одной специальной задачи многомерного управления Г. Л. Карасёва. – Вестник БГУ. Серия 1, 1997, № 3. –С. 49–52.

4 Алёшин Н.А. Задача оптимального управления с негладким критерием качества / Н. А. Алёшин, Г. Л. Карасёва // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии. Материалы международной научно-практической конференции. – Брест, 21 октября 2016 / Брестский гос. университет им. А. С. Пушкина, 2016. – С. 22–24.

УДК 373.5.016

Д. Б. Аллаберенов

МЕТОД ТРЕНИНГА – ЭФФЕКТИВНЫЙ ПРИЁМ СИСТЕМАТИЗАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

В статье представлен анализ сущности, основных принципов и целеполагания метода тренинга. Изложена разработанная автором методика использования метода