

3 ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В данном разделе мы будем изучать свойство потенциальности на примере *электростатического* поля в вакууме, созданного неподвижными электрическими зарядами. Далее мы увидим, что существуют не только потенциальные, но и вихревые электрические поля, например, индукционное электрическое поле. Такое вихревое электрическое поле порождается магнитным полем, изменяющимся с течением времени, в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея.

Рассмотрим точечную заряженную частицу, находящуюся в вакууме во внешнем электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$. При перемещении частицы, имеющей заряд q , из точки 1 в точку 2 электростатические силы совершают работу (рисунок 4)

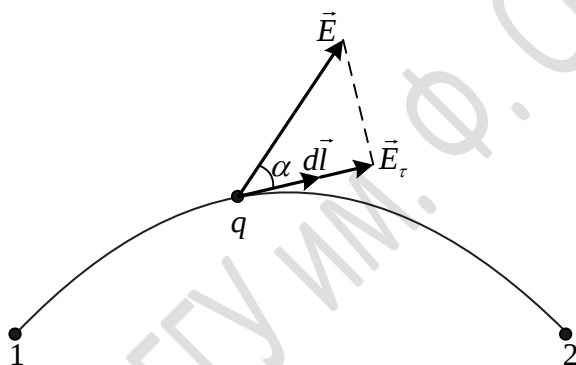


Рисунок 4 - Траектория перемещения точечной заряженной частицы во внешнем электростатическом поле

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 E dl \cos \alpha = q \int_1^2 E_t dl, \quad (3.1)$$

где $E_t = E \cos \alpha$ - тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ внешнего электростатического поля относительно элемента траектории $d\vec{l}$.

Поле некоторых сил называется **потенциальным**, если работа, совершаемая при перемещении тела в этом поле, не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела.

Электростатическое поле удовлетворяет этому определению и является потенциальным. Поэтому результат интегрирования в формуле (3.1) не изменяется при выборе любой траектории частицы.

Можно дать также и другое определение потенциального поля: это такое поле, в котором работа, совершаемая при перемещении тела по любому замкнутому контуру, равна нулю.

Математически условие потенциальности можно сформулировать, используя понятие циркуляции вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру (L):

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{(L)} E_{\tau} dl = 0. \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) называют *теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$, или условием потенциальности электростатического поля в интегральной форме*.

Хорошо известным примером потенциального поля является гравитационное поле, которое, как и электростатическое поле, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от тела, создающего поле. Можно доказать, что потенциальность поля точечной заряженной частицы связана с обратной квадратичной зависимостью напряженности поля от расстояния. Далее на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что произвольное электростатическое поле также является потенциальным.

Циркуляцию некоторого вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру (L) можно преобразовать с помощью *теоремы Стокса*

$$\oint_{(L)} \vec{A} d\vec{l} = \int_{(S)} \text{rot} \vec{A} d\vec{S}, \quad (3.3)$$

$$\text{где } \text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = [\vec{\nabla} \vec{A}] \quad - \text{ ротор}$$

вектора $\vec{A}$, который можно представить в виде векторного произведения оператора «набла» на вектор $\vec{A}$;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат x, y, z ;

(S) – поверхность произвольной формы, границей которой является контур (L), положительная нормаль к поверхности образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Для выполнения теоремы Стокса (3.3) необходимо, чтобы на всей поверхности (S) компоненты A_x, A_y, A_z векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ имели непрерывные частные производные по координатам. Мы предполагаем, что реальные физические поля соответствуют этому требованию, и поэтому для них, в том числе и для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, теорема Стокса (3.3) является справедливой.

Используя теорему Стокса для вектора $\vec{E}$, *условие потенциальности электростатического поля можно записать в дифференциальной форме:*

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (3.4)$$

Из условий (3.3) и (3.4) следует, что поскольку электростатическое поле является потенциальным, то его силовые линии не могут быть замкнутыми. Проведём доказательство от противного и допустим, что существует хотя бы

одна замкнутая силовая линия электростатического поля. Выберем эту линию в качестве траектории перемещения точечного заряда. Поскольку для всех элементов такой траектории векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ совпадают по направлению, то $\cos \alpha = 1$, и из формулы (3.1) следует, что электростатическое поле совершило бы положительную, не равную нулю работу при перемещении заряженной частицы по замкнутой траектории. Но такой вывод противоречил бы условию потенциальности электростатического поля (3.2).

В качестве примера можно рассмотреть самые простые и часто встречающиеся электрические поля: точечного заряда, пары точечных зарядов, нити, цилиндра, сферы, шара, плоскости, плоского слоя. Во всех указанных случаях силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность, **в электростатическом поле замкнутых линий вектора $\vec{E}$ не существует.**

Кроме напряженности $\vec{E}$, электрическое поле характеризуется также **скалярным потенциалом φ** . Чтобы ввести в рассмотрение скалярный потенциал электростатического поля, можно воспользоваться соотношением, известным из векторного анализа: $\text{rot grad } X = 0$. Это соотношение является тождественным равенством, то есть выполняется для любой функции X . Сравнивая данное соотношение и формулу (3.4), приходим к выводу, что напряженность электростатического поля $\vec{E}$ можно представить в виде градиента некоторой функции φ , которая и называется скалярным потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (3.5)$$

где $\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla} \varphi$ - **градиент скалярной функции φ** .

Как следует из определения градиента, он является вектором, и это свойство отражено в соотношении (3.5). Единицей измерения потенциала является вольт [В].

В разделе 9 будет показано, что потенциал электростатического поля равен отношению потенциальной энергии заряда, находящегося в данной точке поля, к величине заряда.

Соотношение (3.5) показывает, что напряженность электростатического поля направлена в сторону самого быстрого убывания потенциала в пространстве. Модуль напряженности равен скорости изменения потенциала в направлении, задаваемом градиентом. Напряженность направлена перпендикулярно **эквипотенциальной поверхности**, то есть такой поверхности, во всех точках которой потенциал имеет одинаковые значения.

В отличие от напряженности, потенциал является неоднозначной функцией и определен с точностью до произвольной постоянной. Чтобы избежать неоднозначности, при решении конкретной задачи производят **нормировку потенциала**, т.е. приписывают ему определенное значение в некоторой точке. Например, можно считать потенциал равным нулю на

поверхности Земли, если рассматривается электрическое поле вблизи земной поверхности. Если заряженные частицы расположены в некоторой ограниченной области, а электрическое поле рассматривается во всем пространстве, то обычно используется другое *условие нормировки*:

$$\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (3.6)$$

Физический смысл имеет не сам потенциал, а *разность потенциалов* в двух точках поля. Она численно равна работе, совершаемой полем при перемещении частицы с единичным положительным зарядом из первой точки во вторую:

$$\frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi(1) - \varphi(2), \quad (3.7)$$

где учтено соотношение (3.5).

Электростатическое поле является потенциальным, поэтому работа при перемещении частицы в поле не зависит от выбора траектории пробной частицы. Это свойство поля проявляется в формуле (3.7), согласно которой разность потенциалов определяется положением двух точек поля.

В электростатике разность потенциалов двух точек поля называют также *электрическим напряжением* U между этими точками. Разность потенциалов и напряжение, так же как и потенциал, измеряются в вольтах. Из соотношения (3.7) следует, что $1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}$.

Важным идеальным примером электростатического поля является *однородное поле*, напряженность которого не зависит от координат, то есть не изменяется в пространстве в пределах некоторой области. Силовые линии однородного электростатического поля представляют собой параллельные прямые. Густота силовых линий постоянна в пределах той области, в которой выполняется условие однородности поля. Для напряженности однородного электростатического поля из соотношения (3.7) можно получить формулу

$$E = \frac{\Delta\varphi}{d}, \quad (3.8)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между двумя точками пространства, лежащими на одной силовой линии;

d – расстояние между этими точками.

Согласно (3.8), напряженность электрического поля может быть измерена в единицах В/м. Ранее на основании формулы (1.5) мы получили, что единицей измерения напряжённости является Н/Кл.

С некоторыми допущениями можно считать, что однородное поле существует внутри *плоского конденсатора* вдали от краев его обкладок. Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, имеющих одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды. Эти проводники называются обкладками конденсатора. Если обкладки

имеют форму плоскостей, то конденсатор называется плоским. Обычно в конденсаторе расстояние между обкладками значительно уступает по величине линейным размерам обкладок, и этим обеспечивается однородность электростатического поля внутри конденсатора. В случае плоского конденсатора также можно применить формулу (3.8), при этом $\Delta\varphi = U$ - электрическое напряжение на конденсаторе, d - расстояние между его обкладками.

Потенциал поля точечной частицы с зарядом q при условии нормировки (3.6) равен

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (3.9)$$

где r - расстояние от заряженной частицы до точки наблюдения, то есть до точки пространства, в которой рассматривается потенциал.

Для скалярного потенциала, так же как и для напряженности электрического поля, применим принцип суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (3.10)$$

Согласно (3.10), потенциал электрического поля, создаваемого несколькими заряженными частицами в любой точке пространства, равен сумме потенциалов полей всех зарядов, причем потенциал каждого поля вычисляется при условии отсутствия всех других полей.

Используя принцип суперпозиции (3.10), можно вычислить потенциал системы точечных частиц с зарядами q_i , расположенных в точках с координатами (x_i, y_i, z_i) :

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \quad (3.11)$$

где (x, y, z) - координаты точки пространства, в которой определяется потенциал.

При непрерывном распределении заряда в некоторой области (V) выражение для потенциала имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{r}, \quad (3.12)$$

где ρ - объемная плотность заряда;

r - расстояние от физически малой области (dV) до точки, в которой вычисляется потенциал.

В заключение данного раздела произведем формальное сравнение математических величин, введенных в рассмотрение в векторном анализе и широко используемых в электромагнетизме:

а) **дивергенция вектора** – вычисляется в результате дифференцирования векторного поля по пространственным координатам, является скалярной величиной, связана с потоком вектора через замкнутую поверхность и характеризует расходимость линий вектора в пространстве, то есть наличие источников линий вектора в данной точке пространства;

б) **ротор вектора** – вычисляется в результате дифференцирования векторного поля по пространственным координатам, является векторной величиной, связан с циркуляцией исходного вектора по замкнутому контуру и ассоциируется с замкнутостью линий исходного вектора в пространстве вблизи данной точки;

в) **градиент функции** - вычисляется в результате дифференцирования скалярной функции по пространственным координатам, является векторной величиной, связан с изменением функции и характеризует максимальную скорость изменения функции в пространстве в окрестности рассматриваемой точки.