И. В. СЕМЧЕНКО

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего образования по физическим специальностям

МИНСК
«ИВЦ Минфина»
2011

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.33я73
С 30

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра общей физики УО Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук, доцент *Л И Буров;* кандидат физико-математических наук *А. Г Рябцев);*

доцент кафедры общей и теоретической физики УО Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, кандидат физико-математических наук, доцент *В. В. Кисель.*

Семченко, И. В.

С 30 Основы электромагнетизма: учеб. пособие для студентов учреждений высш. образования по физ. специальностям /И.В.Семченко.– Минск: ИВЦ Минфина, 2011. – 240 с.

ISBN 978-985-6993-45-2.

В учебном пособии кратко изложены основные законы электромагнетизма, которые формулируются в интегральной и дифференциальной форме, разъясняется их физический смысл.

Основное внимание уделяется не выводу формул, а концентрированному изложению конечных результатов.

Пособие помимо теоретического материала включает тестовые задания по излагаемым темам и электронное приложение.

Учебное пособие адресовано студентам физических специальностей уни-верситетов, может быть использовано при организации самостоятельной работы студентов.

УДК 537.8(075.8)
ББК 22.33я73

ISBN 978-985-6993-45-2

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие………………………………………………………………………. 5
Часть 1 Лекционный курс……………………………………………….…...... 7
1 Введение. Закон Кулона. Принцип суперпозиции…………………………. 7
2 Электростатическая теорема Гаусса……………………………………….. 14
3 Потенциальный характер электростатического поля…………………….. 22
4 Электростатическое поле при наличии проводников……………………. 28
5 Диэлектрики в электростатическом поле………………………………….. 37
6 Граничные условия для векторных характеристик электростатического поля………………………….. 48
7 Сегнетоэлектрики……………………………………………………….…..... 51
8 Пьезоэлектрики……………………………………………………………..... 55
9 Энергия электрического поля……………………………………………….. 57
10 Постоянный электрический ток. Закон Ома……………………………… 64
11 Сторонние электродвижущие силы. Закон Джоуля – Ленца…………….. 69
12 Классическая электронная теория проводимости. Эффект Холла……… 79
13 Основы зонной теории твердых тел. Проводимость металлов и полупроводников…………………………………………………………………..... 84
14 Электрические явления в контактах проводников……………………….. 95
15 Электрический ток в вакууме……………………………………………… 103
16 Электрический ток в газах и жидкостях. Законы электролиза Фарадея… 108
17 Стационарное магнитное поле. Сила Лоренца и сила Ампера………….. 112
18 Закон взаимодействия элементов тока…………………………………..... 115
19 Закон полного тока……………………………………………………….... 120
20 Вихревой характер магнитного поля……………………………………… 122
21 Поле и магнитный момент элементарного замкнутого тока…………….. 124
22 Магнитное поле в присутствии магнетиков………………………………. 128
23 Граничные условия для векторных характеристик магнитного поля…... 132
24 Классификация магнетиков………………………………………………… 135
25 Явление электромагнитной индукции…………………………………….. 144
26 Явление самоиндукции…………………………………………………….. 150
27 Энергия магнитного поля…………………………………………………... 152
28 Закон Ома для цепи переменного тока…………………………………..... 155
29 Мощность переменного тока……………………………………………..... 163
30 Уравнения Максвелла……………………………………………………… 166
31 Закон сохранения энергии электромагнитного поля…………………….. 172
32 Относительность электрического и магнитного полей………………….. 175
33 Скин-эффект……………………………………………………………….... 178
34 Примеры вычисления электрических и магнитных полей……………..... 179

35 Киральные среды. Метаматериалы…………………………………………… 184
Часть 2 Тестовые задания……………………………………………….... 188
1 Электростатика (№ 1-24) …………………………………………………. 188
2 Металлы в электрическом поле (№ 25-35) ……………………………… 192
3 Диэлектрики (№ 36-63) …………………………………………………….. 194
4 Энергия электрического поля. Силы в электрическом поле (№ 64-76)….. 199
5 Постоянный электрический ток. Закон Ома (№ 77-102)………………….. 202
6 Закон Джоуля - Ленца (№ 103-111)……………………………………… 207
7 Классическая теория электропроводности (№ 112-145)………………….. 209
8 Электрический ток в вакууме. Проводимость полупроводников (№ 146-173) ……………………………………………………………………… 215
9 Постоянное магнитное поле. Взаимодействие токов (№ 174-196)……….. 220
10 Магнитное поле в веществе (№ 197-222) ……………………………… 224
11 Свойства магнетиков (№ 223-256) ……………………………………… 229
12 Явление электромагнитной индукции (№ 257-270)……………………. 235
13 Квазистационарные токи (№ 271-285) ………………………………… 237
14 Энергия магнитного поля (№ 286-294) ………………………………… 240
15 Электромагнитное поле (№ 295-314) …………………………….....… 242
16 Электрические и магнитные поля в симметричных случаях (№ 315-330) ……………………………………………………………………….. 245
Ответы к тестовым заданиям……………………………………………. 249
Литература…………………………………………………………..…. 251

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие основано на учебниках С.Г.Калашникова, И.Е.Иродова, Д.В.Сивухина, А.Н.Матвеева, И.В.Савельева, изданных в советское время и ставших классическими. Указанные учебники имеют энциклопедический характер в силу логичности и завершённости изложения материала, широты охвата изучаемых явлений и закономерностей.

В то же время большой объём данных учебников приводит к некоторым затруднениям при последовательном изложении материала в рамках часов, отведённых учебной программой.

Предлагаемое учебное пособие посвящено более краткому изложению основных законов электромагнетизма. Законы формулируются в интегральной и дифференциальной форме, разъясняется их физический смысл. Изложение ведётся в системе СИ. Курсивом выделены основные понятия и термины, которые можно рассматривать как опорные точки при изложении материала.

Основное внимание уделяется не выводу формул, а концентрированному изложению конечных результатов. Автор стремился сделать результаты и выводы наиболее наглядными, но не в ущерб научной строгости изложения материала. Рисунки в пособии выполнены в упрощённой, схематичной форме, чтобы облегчить их воспроизведение студентами.

При подготовке пособия использован опыт преподавания раздела «Электричество» курса общей физики на физическом факультете Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины в течение более 25 лет.

Кроме теоретического материала, пособие содержит раздел, в котором приведены примеры вычисления электрических полей с помощью закона Кулона, электростатической теоремы Гаусса и магнитных полей на основании закона Био – Савара и закона полного тока.

Помимо традиционных тем, пособие содержит раздел «Киральные среды. Метаматериалы», где приводится первичная информация о некоторых современных искусственных структурах и их уникальных электромагнитных свойствах, которыми не обладают вещества, встречающиеся в природе.

Наряду с теоретическим материалом в пособие включено более 300 тестовых заданий по излагаемым темам. Каждое задание предполагает только один правильный ответ, список ответов также приведен в пособии.

В течение нескольких последних лет издано значительное число пособий, предлагающих тестовые задания для старшеклассников и абитуриентов. Однако тестовые задания по электричеству и магнетизму, соответствующие университетской программе, в Беларуси не издавались. Безусловно, тестирование не может заменить другие возможные формы контроля усвоения теоретического материала. В то же время оно может оказаться полезным на определённом этапе подготовки студентов. Читателям данного пособия предоставляется возможность удалённого тестирования с использованием автоматизированной системы проверки и контроля знаний, размещённой в глобальной сети Интернет по адресу http://gsu.by/physfac/phystest (режим доступа – гостевой).

Тестирование можно также осуществить, например, с помощью инструментальной программы «КРАБ 2», разработанной в Учреждении образования “Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка” Кравченей Э.М. и Тарбаевым П.Б. Эта программа рекомендована экспертным советом Министерства образования республики Беларусь для использования в образовании в качестве инструментального средства. Инструментальная программа «КРАБ 2» не является коммерческим продуктом и свободно распространяется в системе образования. Используя диск, прилагаемый к пособию, можно установить программу на компьютере и затем пройти тестирование. Диск содержит также электронную версию тестовых заданий с указанием правильных ответов и, кроме того, скомпилированный архив для импорта тестовых заданий в информационную оболочку на базе системы Moodle.

Один из разделов тестовых заданий направлен на проверку знания формул для электрических и магнитных полей в симметричных случаях. Рассматриваются поля плоскости, слоя, нити, цилиндра, сферы и шара при однородном распределении зарядов и токов в этих телах. Приведённые случаи важны как идеальные модели, упрощающие изучение электрических и магнитных полей, которые создаются реальными объектами.

Учебное пособие адресовано студентам физических специальностей университетов. Оно может быть использовано при организации самостоятельной работы студентов.

Автор признателен рецензентам Л.И.Бурову, А.Г.Рябцеву, В.В.Киселю за внимательное прочтение рукописи и важные замечания, которые позволили улучшить изложение материала. Автор также благодарит С.А.Хахомова за внимание и поддержку, А.П.Балмакова, М.А.Подалова, Г.И.Русецкую за помощь в изображении рисунков, В.В.Грищенко и А.Л.Самофалова за апробацию тестов.

И.В.Семченко

ЧАСТЬ 1 ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

1 ВВЕДЕНИЕ. ЗАКОН КУЛОНА. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Современной науке известны ***четыре вида взаимодействия*** материальных объектов: гравитационное, электромагнитное, сильное (ядерное) и слабое. Все они играют очень важную роль в природе, а теория, описывающее каждое взаимодействие, имеет основополагающее значение в физике.

Гравитационные силы являются заметными, как правило, если хотя бы одно из взаимодействующих тел имеет астрономический масштаб, то есть является, например, звездой или планетой. В гравитационном взаимодействии участвуют все тела в природе, и силы тяготения действуют при любых расстояниях между телами. Гравитационное взаимодействие обеспечивает устойчивость тел на Земном шаре, связывает Солнце и планеты в Солнечной системе и объединяет звезды в галактиках.

Ядерные, или сильные взаимодействия проявляются при сближении элементарных частиц на очень малые расстояния, порядка 10^{-15}м и меньше. Сильное взаимодействие связывает протоны и нейтроны (нуклоны) в ядрах всех атомов.

Слабые взаимодействия значительны, в основном, в микромире и играют очень важную роль при взаимопревращениях элементарных частиц. Слабое взаимодействие обладает очень малым радиусом действия, порядка 10^{-18}м, при удалении частиц слабое взаимодействие становится несущественным. Слабое взаимодействие не обладает способностью создавать устойчивые состояния вещества, в отличие от других взаимодействий. Примером частицы, которая обладает лишь слабым взаимодействием, является нейтрино. Процессы слабого взаимодействия с испусканием нейтрино играют очень важную роль в эволюции звёзд. Без слабого взаимодействия были бы невозможными процессы превращения элементарных частиц, которые являются основным источником энергии Солнца и большинства звёзд.

В пространственных масштабах, в которых проходит наша повседневная жизнь, очень значительно проявляется ***электромагнитное взаимодействие***. Используя закон всемирного тяготения и закон Кулона, который будет рассмотрен ниже, можно сравнить гравитационные и электростатические силы. Для двух электронов отношение электростатической силы к гравитационной имеет порядок 10^{42}, для двух протонов, которые являются более тяжелыми частицами, это отношение сил составляет величину порядка 10^{36}. Электромагнитное взаимодействие обеспечивает стабильное положение электронов в атомах и удерживает в равновесии атомы в молекулах и кристаллах. Электромагнитные силы играют важную роль в химических и биологических процессах. Поэтому электромагнитные явления имеют большое практическое значение для жизнедеятельности человека. Солнечный свет, который представляет собой электромагнитное излучение, является одним из необходимых условий существования жизни на Земле. Силы упругости и трения, часто встречающиеся в быту, имеют, в конечном счете, электромагнитную природу. Электрический ток незаменим в настоящее время в производстве, на транспорте и в быту. Телевидение, радио и телефонная связь используют электромагнитные волны для передачи сигналов. Действие персональных компьютеров, а также других современных устройств для получения, передачи, хранения и обработки информации, основано на использовании широкого круга электромагнитных явлений.

Теория электромагнетизма занимает одно из самых важных мест в современной науке. В рамках электромагнетизма впервые возникло и было развито понятие ***поля*** как материального объекта. В этом состоит общефилософское и мировоззренческое значение электромагнитной теории.

Удивительным свойством электромагнитной теории является то, что законы электромагнетизма выполняются как на очень больших расстояниях, в масштабах Вселенной, так и в микромире, когда расстояния между взаимодействующими частицами становятся гораздо меньше размеров атома. В микромире проявляются, с одной стороны, волновые свойства частиц и с другой стороны, квантовые свойства полей. Поэтому для описания электромагнитных явлений в микромире используется квантовая электродинамика - очень точная и совершенная квантовая теория.

Электрические заряды. Тела участвуют в электрическом взаимодействии вследствие того, что они обладают ***электрическими зарядами***. Заряд можно рассматривать как количественную меру электрического взаимодействия. Для любой элементарной частицы электрический заряд является одной из ее основных, фундаментальных характеристик, такой же важной, как масса частицы. Понятие «электрический заряд» в электромагнетизме является первичным, природа электрического заряда не может быть понята в рамках общей физики. Основные свойства электрического заряда следуют из опыта.

Во-первых, существует ***два вида электрического заряда***: положительный и отрицательный. Еще в древности было известно, что тела могут приобретать электрические заряды в результате трения одного тела о другое. Например, если стекло потереть о шелк, то на стекле появляются электрические заряды, которые назвали положительными. Если же эбонит потереть о мех, то эбонит приобретает заряды, которые назвали отрицательными. Одним из веществ, способным легко электризоваться при трении о шерсть, является янтарь. Именно от греческого слова «электрон», что означает янтарь, и произошел термин «электричество», которым мы пользуемся в настоящее время.

Позднее ученые поняли, что для электризации тел необходим их тесный контакт, который достигается в результате взаимного трения. Как следует из опыта, одноименные заряды отталкиваются, а разноименные - притягиваются. Поэтому, по-видимому, два вида электрических зарядов существуют в природе для того, чтобы обеспечивать устойчивость атомов, молекул, молекулярных соединений и т.д.

Во-вторых, существует минимальное значение электрического заряда, так называемый ***элементарный заряд***. В международной системе единиц СИ элементарный электрический заряд имеет величину

$$e = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}. \tag{1.1}$$

Впервые элементарный заряд был измерен Р.Миллекеном в 1909 г., и затем его значение было уточнено в различных экспериментах. Современная теория предполагает, что электрон не имеет структуры, однако протон и нейтрон состоят в свою очередь из более мелких частиц, так называемых ***кварков***, которые обладают дробным электрическим зарядом. Однако до настоящего времени кварки в свободном состоянии, то есть отдельно друг от друга, обнаружены не были. Поэтому мы вынуждены рассматривать значение ***e*** как минимально возможную порцию электрического заряда, встречающуюся в природе.

Отсюда следует, что электрический заряд любого тела должен быть кратным элементарному заряду:

$$q = ne, \tag{1.2}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, и так далее.

Это свойство называется ***дискретностью электрического заряда***.

Третьим важным свойством электрического заряда является его сохранение в любой электрически изолированной системе. В такой замкнутой системе алгебраическая сумма электрических зарядов не изменяется с течением времени при любых взаимопревращениях элементарных частиц. ***Закон сохранения электрического заряда*** является одним из фундаментальных законов природы. Электрический заряд не может существовать отдельно от своего носителя - элементарной частицы. В то же время заряд является в определенном смысле величиной самостоятельной, поскольку не изменяется при взаимопревращениях его носителей.

В-четвертых, величина электрического заряда не зависит от скорости движения заряженной частицы. Другими словами, заряд частицы является релятивистски-инвариантной величиной, то есть величина заряда одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Независимость величины заряда от скорости движения его носителя является опытным фактом и подтверждается, в частности, электрической нейтральностью атомов. Связанное состояние электронов в атоме обеспечивается благодаря кулоновской силе притяжения электронов к ядру. В тяжелых атомах, ядра которых имеют большой электрический заряд, эта сила значительно возрастает. Следовательно, увеличиваются центростремительное ускорение и скорость движения электронов в атоме. Как показывают расчеты, в тяжелом атоме, например, атоме урана, скорость электронов может достигать величины порядка половины скорости света. В то же время протоны являются более тяжелыми и инертными частицами по сравнению с электронами и движутся внутри ядра с малыми скоростями даже в тяжелых атомах. Если бы величина заряда частицы зависела от скорости её движения, то суммарный заряд электронов в тяжелом атоме не был бы скомпенсирован зарядом ядра. Однако опыт показывает, что как легкие, так и тяжелые атомы являются электрически нейтральными. Этот факт подтверждает ***инвариантность электрического заряда***, то есть независимость величины заряда от скорости движения частицы.

<u>Закон Кулона.</u> ***Закон Кулона*** был установлен в 1785 г. и относится к основным законам электричества. Этот закон описывает взаимодействие точечных частиц, то есть таких частиц, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия двух покоящихся точечных частиц с зарядами q_1 и q_2, находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга, имеет вид:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \tag{1.3}$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила, с которой первая частица действует на вторую, эта сила приложена ко второй частице;

q_1 и q_2 - заряды взаимодействующих частиц;

$\vec{r}_{12}$ - радиус-вектор, проведенный от первой частицы ко второй;

$\varepsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1}$ Ф/м – электрическая постоянная;

фарад (Ф)– единица измерения электроёмкости, которая будет введена ниже, по мере изложения материала.

Векторная запись закона Кулона (1.3) означает, что сила взаимодействия двух покоящихся точечных заряженных частиц прямо пропорциональна произведению их зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль линии, соединяющей частицы. При этом разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются. Коэффициент пропорциональности в формуле (1.3) зависит от выбора системы единиц измерения физических величин, в данном случае он записан для международной системы СИ. При использовании другой системы единиц коэффициент пропорциональности в формуле (1.3) может изменяться, однако характер зависимости силы взаимодействия от величины зарядов и расстояния между частицами остаётся прежним.

Формула (1.3) записана для случая, когда взаимодействующие частицы находятся ***в вакууме***, то есть в пространстве, не содержащем вещества. Следует отметить, что очень многие электромагнитные явления, проявляющиеся в нашей повседневной жизни, происходят не в вакууме, а в воздухе. Однако ниже будет показано, что электромагнитные свойства воздуха, находящегося при обычных условиях, очень близки к свойствам вакуума. Поэтому законы электромагнетизма, сформулированные для вакуума, могут быть с высокой степенью точности применены для электромагнитных явлений, наблюдаемых в воздухе.

В международной системе СИ единицей измерения величины электрического заряда является кулон [Кл]. Далее мы увидим, что величина электрического заряда связана с силой электрического тока:

$$1\text{Кл} = 1\text{А} \cdot 1\text{с}. \tag{1.4}$$

Здесь ампер [А] - единица измерения силы тока.

Закон Кулона полностью описывает взаимодействие двух частиц, если они покоятся или только одна из них движется равномерно. В случае равномерного движения обеих частиц возникает дополнительно магнитное взаимодействие. В то же время электрические силы, действующие между равномерно движущимися частицами, по – прежнему подчиняются закону Кулона.

До работ Фарадея закон Кулона трактовался с позиции ***дальнодействия*** или действия на расстоянии, то есть считалось, что одно тело действует на другое без посредников. В 1831 – 1855 гг. Фарадеем была развита теория ***близкодействия***, согласно которой взаимодействие между телами осуществляется лишь путем непрерывной "передачи сил" через пространство между телами с помощью посредника.

В результате борьбы концепций дальнодействия и близкодействия в науку вошло представление о поле как посреднике, осуществляющем взаимодействие. Поле существует в пространстве и времени, как и вещество, является формой существования материи, обладает свойствами материи - энергией, импульсом и т.д.

Основной характеристикой электрического поля является ***напряженность***

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \tag{1.5}$$

где q - заряд некоторой частицы, находящейся в поле;

$\vec{F}$ - сила, действующая на частицу со стороны поля и приложенная к частице.

Из формул (1.3) и (1.5) следует, что напряжённость не зависит от заряда частицы, находящейся в поле, и характеризует само электрическое поле. Это свойство напряжённости проявляется не только при взаимодействии двух точечных зарядов, но и для любых электрических полей.

Для получения наглядной картины распределения электрического поля в пространстве вводят понятие ***силовых линий***, которые обладают двумя основными свойствами. Во-первых, вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ всегда направлен по касательной к силовой линии. Во-вторых, густота силовых линий численно равна величине напряженности электрического поля. Чтобы определить величину напряжённости электрического поля, необходимо построить поверхность, перпендикулярную силовым линиям в выбранной области пространства. Число силовых линий, пересекающих единицу площади этой поверхности, численно равно величине напряжённости электрического поля. Силовые линии называют также ***линиями напряжённости*** электрического поля.

Необходимо ввести понятие ***пробного заряда.*** Это такой точечный заряд, который используется для измерения напряженности поля. Предполагается, что при помещении пробного заряда в рассматриваемую точку пространства значение напряженности поля не изменяется. Это означает, что не изменяется расположение заряженных частиц, создающих исследуемое поле.

Из формулы (1.5) следует, что напряженность является силовой характеристикой электрического поля. Напряженность поля измеряется в единицах Н/Кл.

Закону Кулона может быть дана ***полевая трактовка*** в виде следующих двух утверждений:

1) Произвольный точечный заряд q_1, находящийся в вакууме, создает в окружающем его пространстве электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^3}\vec{r}\,, \qquad (1.6)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда в точку наблюдения.

2) На произвольный точечный заряд q, находящийся в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$, со стороны этого поля действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E}. \qquad (1.7)$$

Физический смысл полевой трактовки закона Кулона состоит в том, что электрическое поле рассматривается как материальный объект, который играет роль посредника при взаимодействии электрических зарядов. Следует особо отметить, что понятия поля и заряда неразрывно связаны друг с другом. Поле создается зарядами и проявляет себя действием на заряды. Взаимосвязанность поля и заряда приводит к тому, что сила вычисляется как произведение заряда на напряженность поля. А именно сила является физической величиной, которая может быть измерена на эксперименте.

<u>Принцип суперпозиции полей.</u> ***Принцип суперпозиции*** является обобщением экспериментальных данных и может быть сформулирован следующим образом: сила, действующая на заряженную частицу со стороны других частиц, равна векторной сумме сил, действующих на неё со стороны каждой из частиц при отсутствии всех других:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{1.8}$$

Таким образом, электростатические силы складываются, не влияя друг на друга. Если изменяется количество взаимодействующих частиц, то изменяется количество слагаемых в формуле (1.8), изменяется также результирующая сила, однако каждое слагаемое остается неизменным.

Полевая формулировка принципа суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \tag{1.9}$$

Напряженность электрического поля, создаваемого несколькими заряжёнными частицами в любой точке пространства, равна векторной сумме напряженностей полей всех зарядов, причем напряженность каждого поля вычисляется при условии отсутствия всех других полей. Это означает, что электрические поля складываются, не искажая друг друга.

Принцип суперпозиции позволяет вычислить силу взаимодействия произвольного количества заряженных частиц. Для этого необходимо мысленно разбить рассматриваемую систему точечных частиц на пары и для каждой пары частиц применить закон Кулона, а затем сложить все силы, действующие на некоторую частицу.

2 ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ГАУССА

Поток вектора напряжённости электростатического поля сквозь поверхность. Используя закон Кулона, можно доказать электростатическую теорему Гаусса. Для этого необходимо рассмотреть некоторую произвольную область (V), границей которой является поверхность (S), при этом внутри или снаружи области (V) располагается точечная заряжённая частица. Рассматривается напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля, создаваемого зарядом, и вычисляется поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность (S).

Потоком вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность (S) называется величина

$$N = \oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{(S)} E dS \cos\alpha , \qquad (2.1)$$

где $\vec{E}$ - напряжённость электрического поля, рассматриваемая в некоторой точке замкнутой поверхности (S);

$d\vec{S}$ - вектор, характеризующий элемент поверхности (S), этот вектор направлен ортогонально элементу поверхности и наружу относительно замкнутой поверхности (S), модуль вектора $d\vec{S}$ численно равен площади элемента поверхности;

α - угол между векторами $\vec{E}$ и $d\vec{S}$.

Из формулы (2.1) следует, что поток вектора $\vec{E}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от величины угла α. Если вектор $\vec{E}$ направлен наружу относительно замкнутой поверхности, то угол α является острым, и выполняется неравенство $\cos\alpha > 0$. В этом случае поток вектора $\vec{E}$ является положительным. Если же вектор $\vec{E}$ ориентирован вовнутрь области, ограниченной замкнутой поверхностью, то справедливы неравенства $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\cos\alpha < 0$. При этом поток вектора $\vec{E}$ принимает отрицательные значения. Если на некоторых участках поверхности вектор $\vec{E}$ направлен наружу, а на других участках – вовнутрь относительно замкнутой поверхности, то поток этого вектора через всю поверхность может быть равным нулю.

Электростатическая теорема Гаусса для полей и зарядов в вакууме гласит, что поток напряженности электрического поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность (S) пропорционален суммарному электрическому заряду Q, находящемуся внутри области (V), ограниченной поверхностью:

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad (2.2)$$

где Q - суммарный электрический заряд, распределённый внутри области (V);

ε_0 - электрическая постоянная.

Важной особенностью электростатической теоремы Гаусса является независимость потока (2.2) от формы замкнутой поверхности.

Для точечного заряда в вакууме электростатическая теорема Гаусса принимает следующий вид:

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (2.3)$$

где q - заряд частицы, находящейся внутри области (V).

Если заряжённая частица находится вне области (V), то электростатическая теорема Гаусса записывается в виде

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = 0. \qquad (2.4)$$

Значит, в этом случае поток электростатического поля через граничную поверхность (S) равен нулю независимо от формы поверхности.

Если некоторая частица находится непосредственно на поверхности (S), то поток её электростатического поля сквозь поверхность не определён. Это следует из формулы (1.6), которая не позволяет вычислить напряженность поля заряженной частицы в точке нахождения самой частицы. Этот случай не имеет физического смысла, так как мы не можем считать частицу точечной и пренебрегать её размерами в условиях, когда точки поверхности (S) находятся очень близко.

Для системы точечных заряженных частиц в вакууме формула (2.2) остаётся справедливой с учётом соотношения $Q = \sum\limits_i q_i$, где суммирование производится по всем заряжённым частицам, находящимся внутри рассматриваемой области (рисунок 1).

Если частицы расположены снаружи области, ограниченной поверхностью (S), то поток вектора напряжённости их электростатического поля сквозь эту поверхность равен нулю.

Следует подчеркнуть, что поток напряженности не зависит от формы поверхности и расположения заряженных частиц внутри области (V), ограниченной поверхностью (S). С математической точки зрения, интеграл в формулах (2.2) – (2.4) является достаточно сложным, поскольку в общем случае модуль вектора $\vec{E}$ и его ориентация относительно поверхности (S) могут изменяться самым произвольным образом. В то же время результат интегрирования оказывается неожиданно простым. Таким образом, теорема Гаусса имеет важное значение, поскольку демонстрирует общее свойство электростатических полей, проявляющееся при произвольном расположении заряженных частиц внутри области (V).

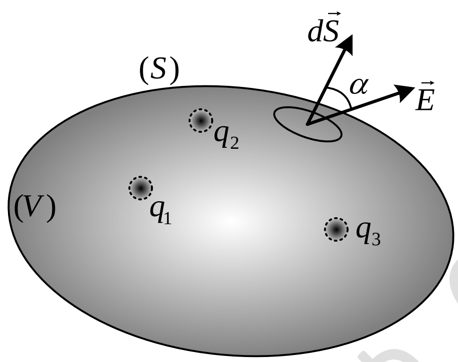


Рисунок 1 - Расположение точечных заряженных частиц и поток вектора электростатического поля через элемент замкнутой поверхности

Если частицы расположены с высокой плотностью, то можно считать, что заряд распределен непрерывным образом. Аналогично мельчайшие капельки воды, находящиеся в воздухе во взвешенном состоянии, могут восприниматься как сплошной туман. В случае непрерывного распределения зарядов выполняется соотношение

$$Q = \int\limits_{(V)} \rho dV. \tag{2.5}$$

Здесь ρ - ***объемная плотность электрического заряда***, равная отношению электрического заряда dq, содержащегося в физически малой области (dV), к объёму этой области:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \tag{2.6}$$

Единицей измерения объёмной плотности электрического заряда является Кл/м^3.

Физически малая область (dV) должна удовлетворять двум главным требованиям: иметь малые геометрические размеры, но в то же время содержать большое количество заряженных частиц, чтобы было можно говорить о непрерывном распределении зарядов. В пределах такой физически малой области все свойства вещества и, в частности, объёмную плотность электрического заряда, можно считать постоянными.

Закон Кулона в дифференциальной форме. Формулировка ***"закон записан в дифференциальной форме"*** означает:

1) все используемые величины относятся к любой, но к одной и той же точке пространства;

2) при записи закона использованы производные физических величин по пространственным координатам.

Другими словами, закон, записанный в дифференциальной форме, справедлив для любой физически малой области пространства. Поэтому говорят, что такой закон имеет ***локальную формулировку***.

Одной из основных целей теоретического курса «Электричество и магнетизм» является запись основных законов и соотношений в дифференциальной форме. Для того чтобы сформулировать закон Кулона в дифференциальной форме, необходимо воспользоваться ***теоремой Остроградского – Гаусса,*** известной из векторного анализа:

$$\oint_{(S)} \vec{A} d\vec{S} = \int_{(V)} div\vec{A} dV, \tag{2.7}$$

где поверхность (S) является границей области (V),

$\vec{A}$ - некоторый вектор, в качестве которого может выступать, например, вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Чтобы выполнялась теорема Остроградского – Гаусса (2.7), необходимо, чтобы во всей области (V) компоненты A_x, A_y, A_z векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ имели непрерывные частные производные по координатам. Мы предполагаем, что реальные физические поля удовлетворяют этому требованию, и поэтому для них, и в частности, для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, теорема Остроградского – Гаусса (2.7) является справедливой.

В формуле (2.7) фигурирует ***диверегенция вектора*** $\vec{A}$

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla}\vec{A}, \tag{2.8}$$

где A_x, A_y, A_z - компоненты вектора $\vec{A}$ в декартовой системе координат;

$\vec{\nabla}$ - символический векторный дифференциальный оператор «набла».

Дивергенцию называют также расходимостью линий вектора, смысл этого термина будет пояснён ниже.

Таким образом, теорема Остроградского – Гаусса (2.7) показывает, что дивергенция вектора в произвольной области пространства связана с потоком этого вектора через граничную поверхность.

Будем использовать в качестве вектора $\vec{A}$ вектор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ и преобразуем левую часть соотношения (2.2) с помощью формулы (2.7). Одновременно подставим выражение для заряда Q (2.5) в правую часть соотношения (2.2) и получим:

$$\int\limits_{(V)} div\vec{E}dV = \int\limits_{(V)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV. \tag{2.9}$$

Поскольку равенство двух интегралов имеет место для любой области (V), то из соотношения (2.9) следует ***закон Кулона в дифференциальной, или локальной форме для зарядов, находящихся в вакууме:***

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.10}$$

где $\vec{E}$ - напряжённость электрического поля;

ρ - объемная плотность электрического заряда.

Выясним физический смысл закона Кулона в дифференциальной форме. Для этого учтём в явном виде ориентацию вектора $\vec{E}$ в пространстве относительно поверхности (S) и представим формулу (2.2) следующим образом:

$$\oint\limits_{(S)} EdS\cos\alpha = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{2.11}$$

где α - угол между векторами $\vec{E}$ и $d\vec{S}$.

В качестве примера рассмотрим электростатическое поле, создаваемое двумя равными по величине, но противоположными по знаку точечными электрическими зарядами (рисунок 2). Учтём, что положительная нормаль к замкнутой поверхности всегда направлена наружу относительно ограниченной области. Тогда, если внутри некоторой малой области пространства частицы имеют суммарный положительный заряд Q, то из формулы (2.11) следует, что $\cos\alpha_1 > 0$, и угол α_1 является острым. В этом случае вектор напряженности электрического поля $\vec{E}_1$ ориентирован наружу во все стороны из рассматриваемой малой области, то есть этот вектор направлен от положительных зарядов вблизи этих зарядов.

Аналогично, если заряд Q имеет отрицательное значение, то $\cos\alpha_2 < 0$, и угол α_2 является тупым. Значит, вектор напряженности электрического поля $\vec{E}_2$ всюду на граничной поверхности ориентирован вовнутрь рассматриваемой малой области, то есть этот вектор направлен к отрицательным зарядам в точках пространства, близких к зарядам.

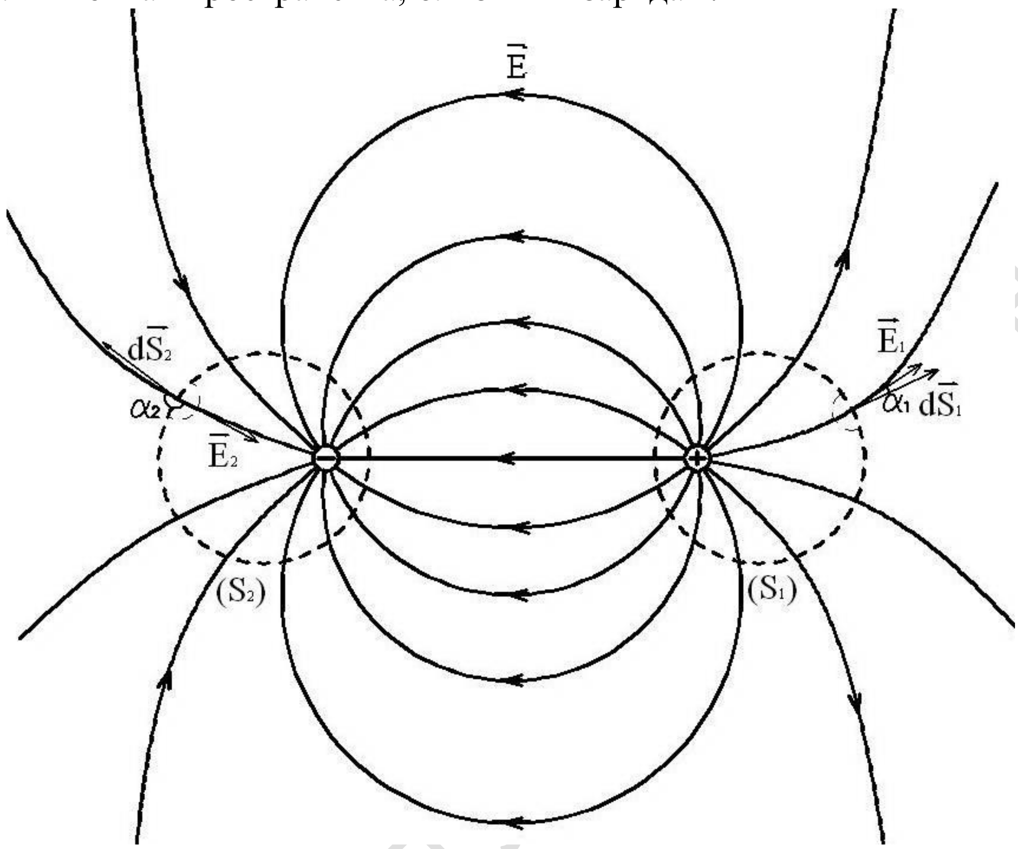


Рисунок 2 – Силовые линии электростатического поля двух равных по величине, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов

Если внутри малой области нет электрических зарядов, то поток вектора напряженности $\vec{E}$ через граничную поверхность равен нулю. В этом случае линии вектора $\vec{E}$ пронизывают рассматриваемую область и не имеют источников внутри неё.

Следовательно, дивергенция вектора в некоторой точке пространства, то есть в физически малом объёме, характеризует ***расходимость линий вектора и наличие источников линий вектора*** в этой точке пространства.

Таким образом, ***физический смысл закона Кулона в дифференциальной форме*** (2.10) состоит в том, что силовые линии электрического поля начинаются на положительно заряженных частицах и заканчиваются на отрицательно заряженных частицах, т.е. заряды являются источниками электрического поля. Говорят также, что положительные заряды являются источниками линий вектора $\vec{E}$, а отрицательные заряды – стоками линий вектора $\vec{E}$. Отметим, что положительные и отрицательные заряды абсолютно равноправны, и направление силовых линий является просто результатом нашего выбора.

Применение электростатической теоремы Гаусса. Рассмотренная теорема может быть использована для вычисления напряжённости электрического поля в случае симметричного распределения электрических зарядов. В качестве примера рассмотрим электрическое поле бесконечной равномерно заряжённой плоскости (рисунок 3).

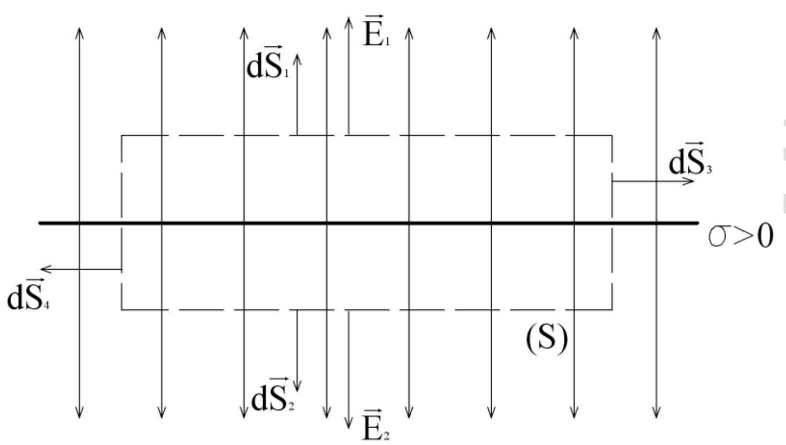


Рисунок 3 – Напряжённость электростатического поля бесконечной равномерно заряжённой плоскости

По аналогии с объемной плотностью электрического заряда ρ (2.6), введем также ***поверхностную плотность электрического заряда*** σ

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad (2.12)$$

где dS - некоторый физически малый элемент поверхности, имеющий малые геометрические размеры, но в то же время содержащий большое количество заряженных частиц;

dq – электрический заряд, сосредоточенный на этом элементе поверхности.

Поверхностная плотность электрического заряда измеряется в единицах Кл/м^2.

Допустим, что в рассматриваемом случае по плоскости равномерно распределён положительный заряд, то есть σ является постоянной положительной величиной. Введём вспомогательную поверхность (S) в виде прямоугольного параллелепипеда, ограничивающего часть плоскости. Основания прямоугольного параллелепипеда параллельны рассматриваемой плоскости, площадь основания равна $S_{осн}$. На рисунке 3 показаны сечения заряжённой плоскости и прямоугольного параллелепипеда. Распределение зарядов на бесконечной плоскости является симметричным, поэтому можно предположить, что силовые линии электростатического поля направлены ортогонально плоскости от неё. Применим электростатическую теорему Гаусса (2.2), (2.11) к поверхности прямоугольного параллелепипеда. Поток вектора напряжённости электростатического поля через все боковые стороны прямоугольного параллелепипеда равен нулю, так как векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ взаимно ортогональны на всех боковых сторонах. Существует только поток вектора напряжённости электростатического поля сквозь основания прямоугольного параллелепипеда. Поскольку заряды равномерно распределены по бесконечной плоскости, то вектор $\vec{E}$ является одинаковым во всех точках, лежащих на основаниях прямоугольного параллелепипеда. Кроме того, для обоих оснований векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ совпадают по направлению, то есть $\cos\alpha = 1$. Используя формулу (2.11), получаем

$$2ES_{осн} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad (2.13)$$

где $Q = \sigma \cdot S_{осн}$ - электрический заряд на участке плоскости, ограниченном прямоугольным параллелепипедом.

Преобразуя соотношение (2.13), получаем выражение для модуля напряжённости электростатического поля:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (2.14)$$

Из формулы (2.14) следует, что $E = const$. Это означает, что бесконечная равномерно заряжённая плоскость создаёт в окружающем пространстве однородное электрическое поле, то есть поле, не зависящее от расстояния между плоскостью и точкой наблюдения, в которой рассматривается поле. При этом модуль напряжённости электростатического поля пропорционален поверхностной плотности заряда, распределённого на плоскости.

Далее, в разделе 37, приведен ещё один пример вычисления напряжённости электрического поля в случае симметричного распределения электрических зарядов.

3 ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В данном разделе мы будем изучать свойство потенциальности на примере ***электростатического*** поля в вакууме, созданного неподвижными электрическими зарядами. Далее мы увидим, что существуют не только потенциальные, но и вихревые электрические поля, например, индукционное электрическое поле. Такое вихревое электрическое поле порождается магнитным полем, изменяющимся с течением времени, в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея.

Рассмотрим точечную заряженную частицу, находящуюся в вакууме во внешнем электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$. При перемещении частицы, имеющей заряд q, из точки 1 в точку 2 электростатические силы совершают работу (рисунок 4)

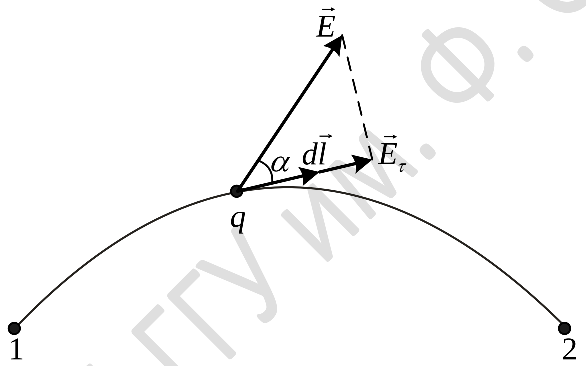


Рисунок 4 - Траектория перемещения точечной заряженной частицы во внешнем электростатическом поле

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q\int_1^2 Edl\cos\alpha = q\int_1^2 E_\tau dl\ , \tag{3.1}$$

где $E_\tau = E\cos\alpha$ - тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ внешнего электростатического поля относительно элемента траектории $d\vec{l}$.

Поле некоторых сил называется ***потенциальным***, если работа, совершаемая при перемещении тела в этом поле, не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела.

Электростатическое поле удовлетворяет этому определению и является потенциальным. Поэтому результат интегрирования в формуле (3.1) не изменяется при выборе любой траектории частицы.

Можно дать также и другое определение потенциального поля: это такое поле, в котором работа, совершаемая при перемещении тела по любому замкнутому контуру, равна нулю.

Математически условие потенциальности можно сформулировать, используя понятие циркуляции вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру (L):

$$\oint\limits_{(L)} \vec{E}d\vec{l} = \oint\limits_{(L)} E_\tau dl = 0. \qquad (3.2)$$

Соотношение (3.2) называют ***теоремой о циркуляции вектора*** $\vec{E}$***, или условием потенциальности электростатического поля в интегральной форме***.

Хорошо известным примером потенциального поля является гравитационное поле, которое, как и электростатическое поле, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от тела, создающего поле. Можно доказать, что потенциальность поля точечной заряженной частицы связана с обратной квадратичной зависимостью напряженности поля от расстояния. Далее на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что произвольное электростатическое поле также является потенциальным.

Циркуляцию некоторого вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру (L) можно преобразовать с помощью ***теоремы Стокса***

$$\oint\limits_{(L)} \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_{(S)} rot\vec{A}d\vec{S}, \qquad (3.3)$$

где $rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \left[\vec{\nabla}\vec{A}\right]$ - ***ротор вектора*** $\vec{A}$, который можно представить в виде векторного произведения оператора «набла» на вектор $\vec{A}$;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат x, y, z;

(S) – поверхность произвольной формы, границей которой является контур (L), положительная нормаль к поверхности образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Для выполнения теоремы Стокса (3.3) необходимо, чтобы на всей поверхности (S) компоненты A_x, A_y, A_z векторного поля $\vec{A}(x, y, z)$ имели непрерывные частные производные по координатам. Мы предполагаем, что реальные физические поля соответствуют этому требованию, и поэтому для них, в том числе и для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, теорема Стокса (3.3) является справедливой.

Используя теорему Стокса для вектора $\vec{E}$, ***условие потенциальности электростатического поля можно записать в дифференциальной форме:***

$$rot\vec{E} = 0. \tag{3.4}$$

Из условий (3.3) и (3.4) следует, что поскольку электростатическое поле является потенциальным, то его силовые линии не могут быть замкнутыми. Проведём доказательство от противного и допустим, что существует хотя бы одна замкнутая силовая линия электростатического поля. Выберем эту линию в качестве траектории перемещения точечного заряда. Поскольку для всех элементов такой траектории векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ совпадают по направлению, то $\cos\alpha = 1$, и из формулы (3.1) следует, что электростатическое поле совершило бы положительную, не равную нулю работу при перемещении заряжённой частицы по замкнутой траектории. Но такой вывод противоречил бы условию потенциальности электростатического поля (3.2).

В качестве примера можно рассмотреть самые простые и часто встречающиеся электрические поля: точечного заряда, пары точечных зарядов, нити, цилиндра, сферы, шара, плоскости, плоского слоя. Во всех указанных случаях силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность, ***в электростатическом поле замкнутых линий вектора*** $\vec{E}$ ***не существует.***

Кроме напряженности $\vec{E}$, электрическое поле характеризуется также ***скалярным потенциалом*** φ. Чтобы ввести в рассмотрение скалярный потенциал электростатического поля, можно воспользоваться соотношением, известным из векторного анализа: $rotgradX = 0$. Это соотношение является тождественным равенством, то есть выполняется для любой функции X. Сравнивая данное соотношение и формулу (3.4), приходим к выводу, что напряжённость электростатического поля $\vec{E}$ можно представить в виде градиента некоторой функции φ, которая и называется скалярным потенциалом:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \tag{3.5}$$

где $grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}\varphi$ ***- градиент скалярной функции*** φ.

Как следует из определения градиента, он является вектором, и это свойство отражено в соотношении (3.5). Единицей измерения потенциала является вольт [В].

В разделе 9 будет показано, что потенциал электростатического поля равен отношению потенциальной энергии заряда, находящегося в данной точке поля, к величине заряда.

Соотношение (3.5) показывает, что напряженность электростатического поля направлена в сторону самого быстрого убывания потенциала в пространстве. Модуль напряженности равен скорости изменения потенциала в направлении, задаваемом градиентом. Напряженность направлена перпендикулярно ***эквипотенциальной поверхности***, то есть такой поверхности, во всех точках которой потенциал имеет одинаковые значения.

В отличие от напряженности, потенциал является неоднозначной функцией и определен с точностью до произвольной постоянной. Чтобы избежать неоднозначности, при решении конкретной задачи производят ***нормировку потенциала***, т.е. приписывают ему определенное значение в некоторой точке. Например, можно считать потенциал равным нулю на поверхности Земли, если рассматривается электрическое поле вблизи земной поверхности. Если заряженные частицы расположены в некоторой ограниченной области, а электрическое поле рассматривается во всем пространстве, то обычно используется другое ***условие нормировки***:

$$\varphi(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}0. \tag{3.6}$$

Физический смысл имеет не сам потенциал, а ***разность потенциалов*** в двух точках поля. Она численно равна работе, совершаемой полем при перемещении частицы с единичным положительным зарядом из первой точки во вторую:

$$\frac{A}{q}=\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}=\varphi(1)-\varphi(2), \tag{3.7}$$

где учтено соотношение (3.5).

Электростатическое поле является потенциальным, поэтому работа при перемещении частицы в поле не зависит от выбора траектории пробной частицы. Это свойство поля проявляется в формуле (3.7), согласно которой разность потенциалов определяется положением двух точек поля.

В электростатике разность потенциалов двух точек поля называют также ***электрическим напряжением*** U между этими точками. Разность потенциалов и напряжение, так же как и потенциал, измеряются в вольтах. Из соотношения (3.7) следует, что 1В = 1Дж/1Кл.

Важным идеальным примером электростатического поля является ***однородное поле***, напряженность которого не зависит от координат, то есть не изменяется в пространстве в пределах некоторой области. Силовые линии однородного электростатического поля представляют собой параллельные прямые. Густота силовых линий постоянна в пределах той области, в которой выполняется условие однородности поля. Для напряженности однородного электростатического поля из соотношения (3.7) можно получить формулу

$$E=\frac{\Delta\varphi}{d}, \tag{3.8}$$

где $\Delta\varphi$ - разность потенциалов между двумя точками пространства, лежащими на одной силовой линии;

d – расстояние между этими точками.

Согласно (3.8), напряженность электрического поля может быть измерена в единицах В/м. Ранее на основании формулы (1.5) мы получили, что единицей измерения напряжённости является Н/Кл.

С некоторыми допущениями можно считать, что однородное поле существует внутри ***плоского конденсатора*** вдали от краев его обкладок. Конденсатором называется система, состоящая из двух проводников, имеющих одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды. Эти проводники называются обкладками конденсатора. Если обкладки имеют форму плоскостей, то конденсатор называется плоским. Обычно в конденсаторе расстояние между обкладками значительно уступает по величине линейным размерам обкладок, и этим обеспечивается однородность электростатического поля внутри конденсатора. В случае плоского конденсатора также можно применить формулу (3.8), при этом $\Delta\varphi = U$ - электрическое напряжение на конденсаторе, d – расстояние между его обкладками.

Потенциал поля точечной частицы с зарядом q при условии нормировки (3.6) равен

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \tag{3.9}$$

где r - расстояние от заряженной частицы до точки наблюдения, то есть до точки пространства, в которой рассматривается потенциал.

Для скалярного потенциала, так же как и для напряженности электрического поля, применим принцип суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i . \tag{3.10}$$

Согласно (3.10), потенциал электрического поля, создаваемого несколькими заряжёнными частицами в любой точке пространства, равен сумме потенциалов полей всех зарядов, причем потенциал каждого поля вычисляется при условии отсутствия всех других полей.

Используя принцип суперпозиции (3.10), можно вычислить потенциал системы точечных частиц с зарядами q_i, расположенных в точках с координатами (x_i, y_i, z_i):

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}, \tag{3.11}$$

где (x, y, z) - координаты точки пространства, в которой определяется потенциал.

При непрерывном распределении заряда в некоторой области (V) выражение для потенциала имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{r}, \tag{3.12}$$

где ρ - объемная плотность заряда;

r - расстояние от физически малой области (dV) до точки, в которой вычисляется потенциал.

В заключение данного раздела произведем формальное сравнение математических величин, введенных в рассмотрение в векторном анализе и широко используемых в электромагнетизме:

а) ***дивергенция вектора*** – вычисляется в результате дифференцирования векторного поля по пространственным координатам, является скалярной величиной, связана с потоком вектора через замкнутую поверхность и характеризует расходимость линий вектора в пространстве, то есть наличие источников линий вектора в данной точке пространства;

б) ***ротор вектора*** – вычисляется в результате дифференцирования векторного поля по пространственным координатам, является векторной величиной, связан с циркуляцией исходного вектора по замкнутому контуру и ассоциируется с замкнутостью линий исходного вектора в пространстве вблизи данной точки;

в) ***градиент функции*** - вычисляется в результате дифференцирования скалярной функции по пространственным координатам, является векторной величиной, связан с изменением функции и характеризует максимальную скорость изменения функции в пространстве в окрестности рассматриваемой точки.

4 ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОВОДНИКОВ

Проводники электричества – это вещества, содержащие свободные заряжённые частицы. В проводящих телах электрические заряды могут свободно перемещаться в пространстве. К проводникам относятся, в первую очередь, металлы. Кроме того, электропроводными свойствами обладают электролиты, а также плазма. В данном разделе мы рассмотрим свойства проводников на примере их самых типичных представителей – металлов.

Электрические свойства металлов обусловлены наличием в них очень большого количества ***электронов проводимости***, ***или свободных электронов***. Это электроны, которые вследствие хаотического теплового движения приобрели достаточную энергию и потеряли связь с отдельными атомами металла. Такие электроны могут достаточно свободно перемещаться в металле под действием электрического поля. Эти процессы являются возможными, поскольку в металлах энергия связи электронов с ядром мала.

При помещении проводника во внешнее электрическое поле электроны проводимости начинают упорядоченно двигаться, но затем достигают равновесного положения. Оно становится возможным, когда на электроны проводимости перестаёт действовать электрическая сила. Это означает, что напряжённость электрического поля внутри металла становится равной нулю.

Механизм исчезновения электрического поля внутри металла заключается в следующем. При помещении проводника в электростатическое поле $\vec{E}_0$, созданное внешними зарядами, электроны проводимости перераспределяются и создают внутри проводника собственное поле $\vec{E}'$. Это поле полностью компенсирует поле $\vec{E}_0$, созданное внешними источниками. В результате суммарная напряженность поля внутри проводника обращается в нуль (рисунок 5):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0. \tag{4.1}$$

Следует особо отметить, что соотношение (4.1) выполняется для проводника произвольной формы, хотя на рисунке 3 для удобства изображён сферический проводник. Из закона Кулона в дифференциальной форме (2.10) следует, что объемная плотность заряда внутри проводника также равна нулю:

$$\rho = 0. \tag{4.2}$$

Это означает, что электрические заряды могут концентрироваться только на поверхности проводника произвольной формы в слое атомарной толщины. Внутри объема проводника также существуют заряженные частицы (ядра атомов и электроны), однако их заряды взаимно компенсируются, и суммарная объемная плотность электрического заряда обращается в нуль.

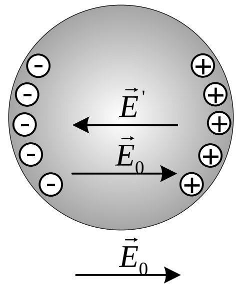


Рисунок 5 - Перераспределение зарядов на поверхности металла и исчезновение электрического поля внутри металла

Соотношения (4.1) и (4.2) выражают два основных свойства металлов в электрическом поле. С помощью эффекта Холла (см. далее) можно экспериментальным путем определить объемную концентрацию N электронов проводимости в металлах. Измерения показывают, что величина N является очень большой и имеет порядок

$$N \sim 10^{28}\,м^{-3}, \tag{4.3}$$

то есть на каждый атом металла приходится в среднем около одного электрона проводимости. Очень высокая концентрация электронов проводимости обеспечивает выполнение соотношений (4.1) и (4.2) при любых, даже самых сильных, внешних электрических полях.

При наличии проводника поле, созданное внешними источниками, искажается, поскольку свободные заряды проводника перераспределяются, и проводник создаёт собственное электрическое поле. Для характеристики электростатического поля в присутствии проводников удобно ввести поверхностную плотность электрического заряда σ (2.12). Можно показать, что вблизи поверхности проводника напряженность электрического поля пропорциональна поверхностной плотности заряда σ (2.12) и направлена ортогонально поверхности:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}, \tag{4.4}$$

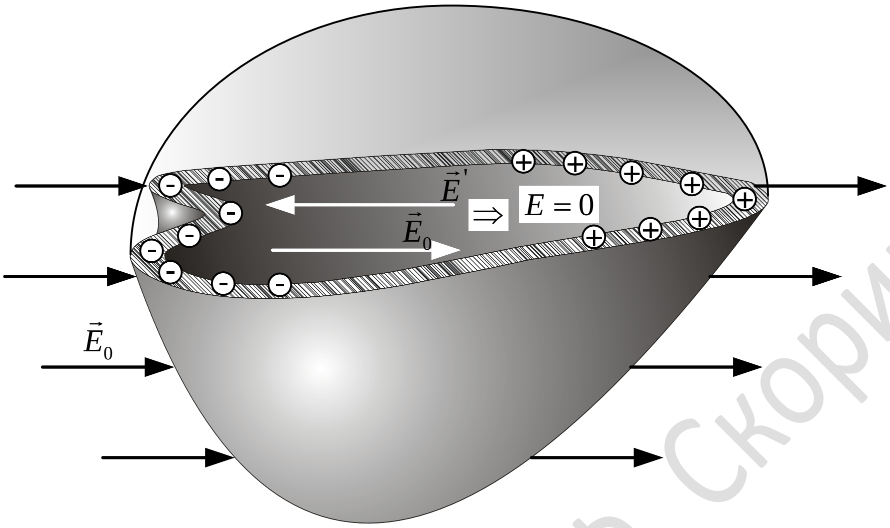
где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности проводника, направленный наружу от металла.

Плотность заряда σ увеличивается с увеличением кривизны поверхности, если поверхность выпуклая, и уменьшается с увеличением кривизны, если поверхность вогнутая. Другими словами, электрические заряды обладают свойством скапливаться на острых выпуклых участках поверхности проводника. Такое сосредоточение заряда приводит к возрастанию электрического поля вблизи острия, возникает возможность ионизации окружающего воздуха. В сильном электрическом поле ионы и электроны интенсивно движутся, и часть их кинетической энергии переходит в энергию света. Возникает свечение газа вблизи острого участка проводника, которое называется коронным разрядом и по форме напоминает корону. Это явление служит экспериментальным подтверждением зависимости плотности электрического заряда от кривизны поверхности.

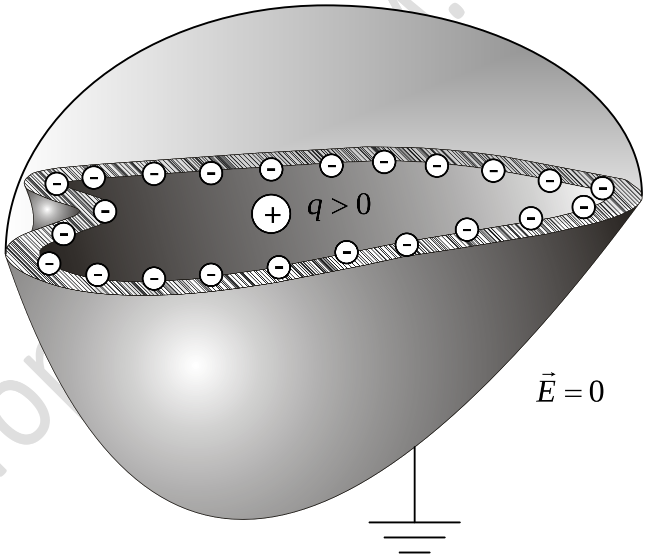
Как показывают соотношения (4.1) и (4.2), внутри металла отсутствуют электрическое поле и объемная плотность электрических зарядов. Следовательно, вещество внутри рассматриваемого металлического образца является электрически нейтральным. Допустим, что это вещество из внутренней области можно изъять. При этом ни распределение электрических зарядов на поверхности металла, ни распределение поля внутри проводника не изменится. Получим, что электрическое поле в образовавшейся полости внутри образца будет отсутствовать, хотя внешнее поле не равно нулю. Такое поведение металла во внешнем электрическом поле позволяет осуществлять ***электростатическую защиту*** объектов с помощью металлических экранов. ***Металлическим экраном*** называется замкнутая металлическая оболочка, такая оболочка экранирует внутреннее пространство от внешнего электрического поля (рисунок 6а).

Одновременно возникает вопрос, проникает ли во внешнее пространство электростатическое поле зарядов, расположенных внутри полости? Да, в общем случае проникает. Можно доказать, что внешнее пространство экранируется замкнутой проводящей оболочкой от зарядов, находящихся внутри полости, только в том случае, если оболочка заземлена (рисунок 6б). Заземление оболочки означает, что она соединена проводником с массивным металлическим предметом, например, листом, который закопан в землю. Обычно такой предмет закапывают на глубине подпочвенных вод, где проводимость грунта велика по причине растворения солей, содержащихся в земле. При этом все заряды с внешней поверхности оболочки переходят к Земле, остаются только первоначальные заряды внутри полости и индуцированные заряды противоположного знака на внутренней поверхности оболочки. Тогда электрическое поле во внешнем пространстве исчезает.

Экранирующая поверхность не обязательно должна быть сплошной, достаточно использовать сетку с мелкими ячейками.



а)



б)

Рисунок 6 - Принцип действия металлических экранов:
а) экранирование внутренней полости от внешних электрических полей;
б) экранирование внешнего пространства от зарядов, находящихся во внутренней полости

Поскольку внутри проводника электрическое поле отсутствует, то из формулы (3.7) следует, что потенциал во всех точках проводника является одинаковым. Рассмотрим уединенный проводник, на большом расстоянии от которого создаваемое им электрическое поле стремится к нулю. В этом случае можно применить условие нормировки потенциала (3.6). Тогда потенциал уединенного проводника можно вычислить следующим образом

$$\varphi = \int_{(1)}^{\infty} \vec{E} d\vec{l}\ , \tag{4.5}$$

где точка (1) – любая точка проводника, траектория интегрирования также является произвольной по причине потенциальности электростатического поля.

Потенциал уединенного проводника прямо пропорционален его заряду, поэтому можно ввести коэффициент пропорциональности между этими величинами – электроёмкость. ***Электроёмкостью (ёмкостью) уединенного проводника*** называется отношение заряда Q проводника к его потенциалу φ:

$$C = \frac{Q}{\varphi}. \tag{4.6}$$

Электроёмкость проводника определяется его формой и размерами, но не зависит от заряда и потенциала проводника. Из формулы (4.6) можно найти, каким образом зависит изменение потенциала проводника от его заряда:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{C}. \tag{4.7}$$

Таким образом, ёмкость показывает, насколько значительно возрастает потенциал проводника при увеличении его заряда.

Ёмкость измеряется в ***фарадах*** (1Ф = 1 Кл/1 В). Один фарад является очень большой величиной, оценить которую можно, вычислив ёмкость планеты Земля. Для этого в качестве приближённой модели Земли рассмотрим уединённый проводящий шар радиусом $R = 6400\text{км.}$. Будем считать электрическое поле Земли сферически симметричным и применим электростатическую теорему Гаусса (2.2), аналогично тому, как это было сделано в разделе 2 для бесконечной равномерно заряжённой плоскости. Для этого необходимо ввести в рассмотрение вспомогательную поверхность (S) в виде сферы радиуса r, удовлетворяющего неравенству $r > R$ (подробнее смотрите раздел 37). Вычисляя поток вектора $\vec{E}$ сквозь сферу радиуса r, находим модуль напряжённости электростатического поля шара во внешнем пространстве

$$E(r) = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \qquad (4.8)$$

где Q - заряд шара;

r - расстояние от центра шара до точки пространства, в которой рассматривается электрическое поле;

знак «плюс» выбирается при условии $Q > 0$, знак «минус» - в противоположном случае.

Аналогично (4.8), потенциал электростатического поля шара во внешнем пространстве можно вычислить с помощью формулы (3.9), рассматривая при этом весь заряд шара как точечный, сосредоточенный в его центре:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}. \qquad (4.9)$$

Используя формулы (4.6) и (4.9) и полагая $r = R$, можно найти ёмкость уединённого проводящего шара радиуса R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (4.10)$$

В результате получаем ***значение ёмкости Земли*** $C_{Земли} = 0{,}7 \cdot 10^{-3}\,Ф$.

На практике обычно встречаются ёмкости, меньшие на несколько порядков. Поэтому в электротехнике для измерения емкости используются микрофарады и пикофарады ($1пФ = 10^{-12}Ф$).

Измерения показывают, что ***средняя напряжённость электростатического поля на поверхности Земли*** равна $E_{Земли} = 130\,В/м$, при этом Земля заряжена отрицательно. Следовательно, согласно формуле (4.8), ***суммарный электрический заряд Земли*** приблизительно равен $Q_{Земли} = -6 \cdot 10^5\,Кл$.

Используя формулу (4.9), можно вычислить потенциал Земли при условии нормировки (3.6):

$$\varphi_{Земли} = -8{,}3 \cdot 10^8\,B. \qquad (4.11)$$

Полученное значение потенциала используется при рассмотрении электрических полей на больших расстояниях от поверхности Земли. В то же время нужно помнить, что физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов. Так как электрический потенциал является неоднозначной функцией, то можно использовать ***условие нормировки***, аналогичное (3.6):

$$\varphi_{Земли} = 0. \qquad (4.12)$$

В отличие от (3.6), условие нормировки (4.12) применяется при изучении электрических полей непосредственно вблизи поверхности Земли.

Большая емкость и хорошая электропроводность Земли позволяют осуществлять защиту человека от электрического разряда путем заземления корпусов электрооборудования. При этом корпуса приборов соединяются проводником с массивным металлическим предметом, закопанным в землю. Тогда электрические заряды, возникшие на корпусе прибора в результате неисправности, перераспределяются между корпусом и Землёй. Поскольку электроёмкость Земли является очень большой, то заряды переходят от корпуса прибора к Земле, в результате, согласно (4.12), корпуса всех электрических приборов и устройств при заземлении также будут иметь нулевой потенциал.

Если несколько проводников расположены достаточно близко друг к другу, и их нельзя считать удалёнными, то говорят, что проводники образуют систему. В этом случае потенциал φ_i и заряд Q_i любого проводника системы определяется соотношениями

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} Q_j; \qquad Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \varphi_j\ , \tag{4.13}$$

где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ – ***потенциальные коэффициенты***;

$C_{ij} = C_{ji}$ - ***ёмкостные коэффициенты***;

N - число проводников в системе;

суммирование производится по всем проводникам системы.

Эти коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\alpha_{ij} > 0 \ \text{ при } i = j, \\ &\alpha_{ij} \le 0 \ \text{ при } i \ne j. \end{aligned} \tag{4.14}$$

При этом свойства C_{ij} являются такими же. Эти коэффициенты зависят только от геометрических характеристик проводников и от их взаимного расположения.

Соотношения (4.13) являются обобщением формулы (4.6) на случай системы проводников. Они показывают, что потенциал каждого проводника в системе зависит от зарядов всех проводников, поскольку они взаимодействуют.

Если к заряжённому проводнику приблизить другой проводник, несущий заряд противоположного знака, то потенциал каждого проводника уменьшится, поскольку проводники влияют друг на друга. В соответствии с формулой (4.6), ёмкость возрастёт по сравнению со случаем уединённого проводника. Ёмкость будет максимальной, если два проводника имеют одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды. Такая система проводников называется ***конденсатором***, а сами проводники - ***обкладками*** конденсатора. Подбирая форму обкладок, можно добиться того, чтобы электрическое поле было в основном сосредоточено в пространстве между обкладками, так как линии напряжённости электростатического поля начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

Аналогично формуле (4.6), можно ввести в рассмотрение ***электроёмкость (ёмкость) конденсатора***:

$$C = \frac{Q}{U}, \tag{4.15}$$

где Q - заряд одной обкладки;

U - напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между обкладками).

Формула (4.15) означает, что напряжение между обкладками всегда пропорционально заряду обкладок.

Если применить формулы (4.13) и (4.14) к обкладкам конденсатора и вычислить напряжение между обкладками, то можно показать, что ёмкость конденсатора связана с потенциальными коэффициентами следующим образом:

$$C = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})^{-1}. \tag{4.16}$$

Учитывая свойства потенциальных коэффициентов (4.14), получаем, что ёмкость конденсатора (4.16) всегда положительна: $C > 0$.

Если обкладки конденсатора имеют форму плоскостей, то конденсатор называется плоским. Электрическое поле внутри плоского конденсатора можно считать приблизительно однородным, если не учитывать ослабление поля вблизи краев обкладок. Точность такого приближения возрастает по мере увеличения площади обкладок и по мере уменьшения расстояния между обкладками. Напряженность поля внутри плоского конденсатора можно вычислить с помощью формулы (2.14). Согласно принципу суперпозиции, поля, создаваемые положительно заряжённой и отрицательно заряжённой обкладками, складываются. Учитывая направление этих полей, получаем, что снаружи плоского конденсатора суммарное электростатическое поле обращается в нуль. В то же время внутри плоского конденсатора поле усиливается в два раза по сравнению с полем одной заряжённой плоскости. Поэтому, используя формулу (2.14), напряженность поля внутри плоского конденсатора можно записать в виде

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{4.17}$$

где σ - поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора.

Тогда из соотношений (2.12), (3.8), (4.15) и (4.17) следует ***формула для ёмкости плоского конденсатора***

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}, \tag{4.18}$$

где S - площадь обкладки;

d - расстояние между обкладками.

Из формулы (4.18) следует, что электрическая постоянная ε_0 имеет размерность Ф/м.

При ***последовательном соединении нескольких конденсаторов*** ёмкость всех конденсаторов определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}, \tag{4.19}$$

где N - количество конденсаторов;

C_k - емкость некоторого конденсатора.

При этом полное напряжение равно сумме напряжений на каждом конденсаторе, а заряды всех конденсаторов одинаковы и равны полному заряду.

В случае ***параллельного соединения конденсаторов*** ёмкость всех конденсаторов равна

$$C = \sum_{k=1}^{N} C_k, \tag{4.20}$$

при этом все конденсаторы находятся под одинаковым напряжением, а полный заряд равен сумме зарядов всех конденсаторов.

5 ДИЭЛЕКТРИКИ
В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При рассмотрении поведения атомов и молекул вещества в электрическом поле удобно использовать понятие электрического дипольного момента. ***Дипольным моментом*** системы, состоящей из двух частиц, которые имеют равные по величине, но противоположные по знаку заряды, называется вектор

$$\vec{p} = q\vec{l}\ , \tag{5.1}$$

где q - величина положительного заряда в этой системе;

$\vec{l}$ - ***плечо диполя***, то есть вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному (рисунок 7).

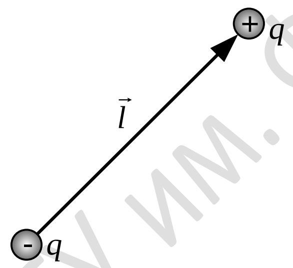


Рисунок 7 - Схематическое изображение электрического диполя

Сама система двух заряжённых частиц называется ***электрическим диполем.***

Дипольный момент измеряется в единицах $Кл \cdot м$. Используется также внесистемная единица электрического дипольного момента дебай (Д): $1Д = 3{,}33564 \cdot 10^{-30}\,Кл \cdot м$.

Если заряд распределен непрерывно, то для электрически нейтральной системы дипольный момент равен:

$$\vec{p} = \int\limits_{(V)} \vec{r}\rho dV\ , \tag{5.2}$$

где ρ - объемная плотность заряда;

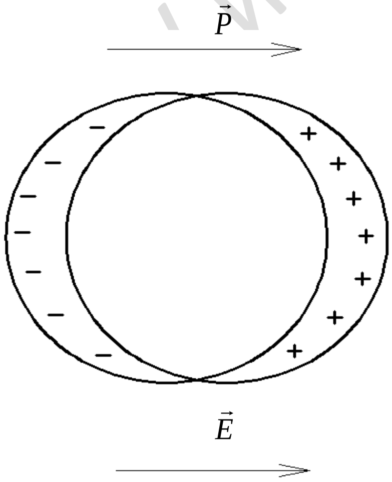
$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку расположения элементарного заряда $dq = \rho dV$.

Дипольный момент электрически нейтральной системы не зависит от выбора начала координат. Он является важнейшей характеристикой нейтральной системы, поскольку характеризует силу, действующую на систему со стороны внешнего электрического поля, а также напряженность поля, создаваемого самой системой.

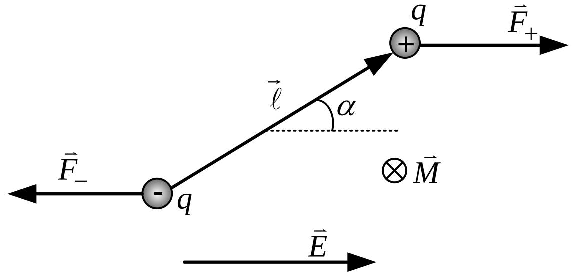
Диэлектрики – это вещества, не содержащие свободных заряжённых частиц. Поэтому в диэлектрическом теле электрические заряды не могут свободно перемещаться между различными частями тела. Заряды, принадлежащие атомам и молекулам диэлектрика, принято называть ***связанными зарядами***. Под действием поля связанные заряды в диэлектрике сдвигаются (но не могут перемещаться на большие расстояния), и диэлектрик приобретает дипольный момент, то есть поляризуется. ***Вектором поляризации (поляризованностью)*** $\vec{P}$ называется дипольный момент единичного объёма диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i \vec{p}_i. \tag{5.3}$$

Здесь суммирование производится по всем дипольным моментам $\vec{p}_i$, существующим внутри физически малого объёма ΔV. Вектор поляризации равен отношению суммарного дипольного момента всех атомов и молекул в некотором физически малом объёме диэлектрика к величине этого объёма. Поляризация вещества измеряется в единицах $\text{Кл}/\text{м}^2$.



а)



б)

Рисунок 8 - Схематическое изображение двух механизмов поляризации диэлектриков:

а) возникновение дипольного момента в неполярной молекуле;
б) поворот полярной молекулы в пространстве

Выделяют два основных класса диэлектриков: ***неполярные и полярные***.

Молекулы неполярного диэлектрика не имеют дипольного момента в отсутствие электрического поля. Можно сказать, что заряды в неполярной молекуле распределены равномерно, и поэтому в молекуле отрицательные заряды в целом не смещены относительно положительных. Например, неполярными являются атом гелия, двухатомные молекулы водорода, азота, кислорода, многоатомные молекулы CO_2, CH_4 и др.

При помещении неполярного диэлектрика во внешнее поле заряды внутри его молекул смещаются, и каждая молекула приобретает дипольный момент, параллельный напряженности электрического поля (рисунок 6). Поляризации неполярного диэлектрика противодействуют внутренние молекулярные силы, благодаря которым сохраняется симметричная форма молекулы в равновесном состоянии. Эти внутримолекулярные силы препятствуют смещению зарядов относительно положения равновесия. Следовательно, для увеличения дипольного момента каждой молекулы, и вектора поляризации вещества в целом, необходимо увеличение напряжённости электрического поля.

Молекулы полярных диэлектриков обладают собственными дипольными моментами даже в отсутствие внешнего поля. Это означает, что в силу строения молекулы заряды противоположного знака взаимно смещены в пространстве. Примерами полярных являются молекулы CO, N_2O, SO_2 и др.

Если внешнее электрическое поле равно нулю, то вследствие теплового движения моменты различных молекул ориентированы хаотически, и поэтому вектор поляризации равен нулю. При включении внешнего электрического поля на каждую молекулу действует вращательный момент сил

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\,\vec{E}\right], \tag{5.4}$$

стремящийся ориентировать ее дипольный момент $\vec{p}$ параллельно напряженности внешнего поля (см. рисунок 8). Здесь квадратные скобки означают векторное произведение. Величина вектора вращательного момента может быть представлена в виде

$$M = pE\sin\alpha, \tag{5.5}$$

где α - угол, образованный векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

Из соотношения (5.5) следует, что вращательный момент $\vec{M}$ обращается в нуль в двух случаях: а) $\alpha = 0$, что соответствует положению устойчивого равновесия диполя во внешнем поле; б) $\alpha = \pi$, что соответствует положению неустойчивого равновесия полярной молекулы во внешнем поле.

Поляризации полярного диэлектрика препятствует хаотическое тепловое движение атомов и молекул вещества. Оно противодействует выстраиванию дипольных моментов всех атомов и молекул вдоль направления, задаваемого вектором напряжённости электрического поля $\vec{E}$. Поэтому для увеличения модуля вектора поляризации вещества необходимо приложение более сильного электрического поля. В сильных электрических полях и при относительно низких температурах вещества возможно ***состояние насыщения поляризации***, при котором дипольные моменты всех атомов и молекул уже достигли ориентации вдоль направления, задаваемого вектором $\vec{E}$.

Таким образом, и для неполярных, и для полярных диэлектриков характеризующий их вектор поляризации совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля и пропорционален приложенному полю

$$\vec{P} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (5.6)$$

где κ - диэлектрическая восприимчивость.

Эта величина показывает, насколько хорошо диэлектрик поляризуется в электрическом поле. Следует отметить, что соотношение (5.6) является приближённым, оно выполняется для относительно слабых электрических полей, значительно уступающим внутриатомным полям.

При этом выполняется неравенство

$$\kappa > 0. \qquad (5.7)$$

Следует отметить, что соотношение (5.7) является справедливым только для электростатических полей. В случае использования переменных полей существует область частот, в которой диэлектрическая восприимчивость κ принимает отрицательные значения. Это возможно для высоких частот, превышающих собственную частоту колебаний связанных зарядов в молекуле. В этом случае связанные электроны не успевают смещаться вслед за высокочастотным полем, и диэлектрическая восприимчивость κ является отрицательной.

Обычно полярные диэлектрики имеют большую диэлектрическую восприимчивость, чем неполярные, то есть выполняется неравенство

$$\kappa_{неполярн} < \kappa_{полярн}. \qquad (5.8)$$

Поскольку $\kappa > 0$, то внешнее электрическое поле внутри диэлектрика ослабляется полем дипольных моментов молекул.

Картину ослабления поля внутри диэлектрика можно схематически представить следующим образом (см. рисунок 9):

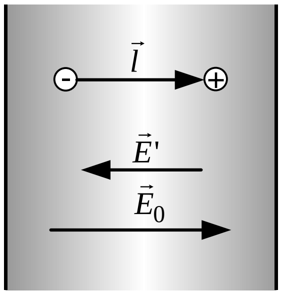


Рисунок 9 – Схематическая картина ослабления электрического поля внутри диэлектрика

Электрические диполи, ориентированные вдоль напряженности внешнего электрического поля $\vec{E}_0$, создают собственное поле $\vec{E}'$. Поскольку поле $\vec{E}'$ направлено противоположно внешнему электрическому полю, то суммарное электрическое поле $\vec{E}$ внутри диэлектрика ослабляется по сравнению с внешним:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'; \qquad E = E_0 - E', \tag{5.9}$$

$$E < E_0. \tag{5.10}$$

Таким образом, можно сравнить экранирование поля внутри проводника и ослабление поля внутри диэлектрика. Согласно (4.1), поле внутри металла полностью исчезает благодаря перераспределению электронов проводимости по поверхности металла. Связанные заряды внутри диэлектрика не могут перемещаться на большие расстояния, а способны лишь смещаться относительно положения равновесия в своих атомах. Поэтому поле внутри диэлектрика лишь ослабляется, но не обращается в нуль. Как мы увидим ниже, коэффициент ослабления поля определяется диэлектрической восприимчивостью вещества.

Выше мы ввели ***понятие о связанных зарядах*** как о зарядах, входящих в состав атомов и молекул вещества. Их принято называть также ***собственными зарядами.*** Для каждого атома и каждой молекулы вещества связанные заряды противоположного знака взаимно скомпенсированы. Однако под действием электрического поля, в результате смещения связанных заряжённых частиц, в диэлектрике могут возникать области, в которых преобладает положительный или отрицательный связанный заряд. Такой заряд принято называть ***не скомпенсированным (избыточным) связанным зарядом.***

Задавая вектор поляризации в каждой точке пространства, можно определить поле вектора $\vec{P}$ и построить линии вектора поляризации, аналогично тому, как это было сделано в разделе 2 для вектора напряжённости электростатического поля $\vec{E}$. Через поле вектора поляризации выражается ***объемная плотность избыточных связанных зарядов*** (***собственных зарядов) диэлектрика***:

$$\rho_{связ.} = -div\vec{P}. \tag{5.11}$$

Для более наглядного представления свойств поля вектора поляризации проинтегрируем обе части уравнения (5.11) по некоторой области (V) и затем применим теорему Остроградского - Гаусса (2.7). В результате получим соотношение

$$\oint_{(S)} \vec{P}d\vec{S} = -Q_{связ}, \tag{5.12}$$

где (S) - поверхность, которая ограничивает область (V),

$$Q_{связ} = \int_{(V)} \rho_{связ} dV \tag{5.13}$$

- суммарный связанный заряд внутри области (V).

Таким образом, согласно формуле (5.12), поток вектора поляризации через произвольную замкнутую поверхность (S) равен взятому с обратным знаком полному связанному заряду диэлектрика, сосредоточенному внутри области, охватываемой этой поверхностью.

Как было показано в разделе 2, дивергенция характеризует расходимость линий вектора в пространстве. Поэтому из соотношений (5.11), (5.13) следует, что линии вектора поляризации начинаются на избыточных отрицательных связанных зарядах и заканчиваются на избыточных положительных связанных зарядах. Соотношение (5.11) также показывает, что не компенсированные (избыточные) связанные заряды возникают лишь в тех областях, где вектор поляризации изменяется в пространстве. В частности, изменение вектора поляризации происходит на границе раздела двух диэлектриков, в результате чего на этой границе могут возникать не скомпенсированные связанные заряды.

Поверхностная плотность связанных зарядов равна

$$\sigma_{связ.} = P_{1n} - P_{2n}\,, \tag{5.14}$$

где P_{1n} и P_{2n} - компоненты векторов поляризации в первой и второй среде, ортогональные к поверхности раздела, единичный вектор нормали направлен от первой среды ко второй.

Внутри металла электрическое поле и поляризация вещества отсутствуют, поэтому на поверхности раздела диэлектрика и металла выполняется граничное условие

$$\sigma_{связ.} = P_n\,, \tag{5.15}$$

где P_n - составляющая вектора поляризации диэлектрика, ортогональная к поверхности раздела, единичный вектор нормали направлен наружу относительно диэлектрика.

Условие (5.15) является справедливым также для границы раздела диэлектрика и вакуума.

В объеме однородного диэлектрика, находящегося в постоянном электрическом поле, плотность связанных зарядов равна нулю. Так происходит потому, что на место сместившихся зарядов поступают заряды из соседних областей диэлектрика. В результате не скомпенсированные связанные заряды могут находиться только на границах однородного диэлектрика в постоянном электрическом поле (рисунок 10).

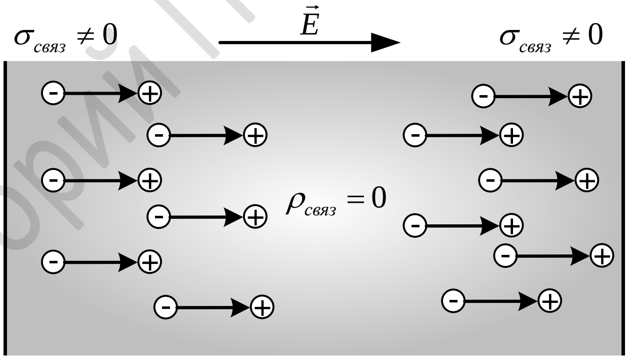


Рисунок 10 - Поляризация диэлектрика и возникновение на его поверхностях не скомпенсированных (избыточных) связанных зарядов

Общее влияние электрического поля и на проводник и на диэлектрик состоит в том, что под действием внешнего электрического поля вещество само становится источником электрического поля, в результате чего внешнее поле изменяется. Электрическое поле могут создавать как свободные заряды в проводнике, так и связанные заряды в диэлектрике. Рисунки 9 и 10 показывают, что электрическое поле, создаваемое внешними источниками, ослабляется внутри диэлектрика. Причиной этого ослабления является поляризация диэлектрика и возникновение на его границах не скомпенсированных (избыточных) связанных зарядов.

Для характеристики электрического поля в диэлектрической среде удобно ввести в рассмотрение ***вектор электрической индукции (смещения)***:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{5.16}$$

учитывающий не только электрическое поле $\vec{E}$, но и поляризацию среды $\vec{P}$. Напомним, что напряженность $\vec{E}$ является силовой характеристикой электрического поля. В свою очередь вектор поляризации $\vec{P}$ характеризует свойства диэлектрика в поле. Вектор смещения $\vec{D}$ зависит от обоих этих векторов и характеризует как свойства поля, так и свойства диэлектрической среды.

Так же как и поляризация, электрическая индукция измеряется в единицах $\text{Кл}/\text{м}^2$.

Вектор индукции можно записать также в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \tag{5.17}$$

где

$$\varepsilon_r = 1 + \kappa \tag{5.18}$$

- ***относительная диэлектрическая проницаемость*** среды. Поскольку выполняется неравенство (5.7), в случае электростатического поля получаем соотношение

$$\varepsilon_r > 1. \tag{5.19}$$

В некоторых простых, но важных случаях величина ε_r показывает, во сколько раз электрическое поле ослабляется в однородном диэлектрике по сравнению с вакуумом из-за поляризации диэлектрика. В частности, напряженность поля точечного заряда q и сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 в однородном безграничном диэлектрике имеют вид:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\vec{r}, \tag{5.20}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_{12}^{\;3}}\vec{r}. \tag{5.21}$$

Наличие множителя ε_r в знаменателе в выражениях (5.20), (5.21) описывает ослабление поля внутри однородного безграничного диэлектрика.

Электрическое поле в диэлектрике может создаваться не только связанными (собственными зарядами), но и ***свободными (сторонними) зарядами***. Это заряды, которые не принадлежат атомам и молекулам диэлектрика. Свободные заряды могут быть расположены как внутри, так и снаружи диэлектрика. Поэтому объемную плотность заряда в диэлектрике можно записать в виде

$$\rho = \rho_{связ.} + \rho_{своб.}. \tag{5.22}$$

где $\rho_{своб.}$ - ***объемная плотность свободных (сторонних) зарядов.***

Подставляя соотношения (5.22) и (5.11) в закон Кулона в дифференциальной форме (2.9), получаем уравнение для вектора смещения $\vec{D}$:

$$div\vec{D} = \rho_{своб.} \tag{5.23}$$

Это соотношение является обобщённой записью закона Кулона в дифференциальной форме, пригодной для диэлектриков. Из соотношения (5.23) следует, что линии вектора индукции электрического поля начинаются на положительных свободных зарядах и заканчиваются на отрицательных свободных зарядах. Другими словами, именно сторонние заряды являются источниками и стоками поля вектора $\vec{D}$.

Соответственно ***теорема Гаусса для диэлектриков*** имеет вид:

$$\oint\limits_{(S)} \vec{D}d\vec{S} = Q_{своб.}, \tag{5.24}$$

где

$$Q_{своб.} = \int\limits_{(V)} \rho_{своб.} dV \tag{5.25}$$

- суммарный свободный заряд, находящийся внутри области (*V*), ограниченной поверхностью (*S*).

Согласно соотношению (5.24), поток вектора смещения через произвольную замкнутую поверхность (*S*) равен полному свободному заряду, расположенному внутри области, охватываемой этой поверхностью.

Используя соотношение (5.17), можно преобразовать формулу (5.23) при условии $\varepsilon_r = const$ и записать закон Кулона в дифференциальной форме для однородных диэлектриков:

$$div\vec{E} = \frac{\rho_{своб.}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \qquad (5.26)$$

Наличие множителя ε_r в знаменателе в выражении (5.26) описывает ослабление электрического поля точечных свободных зарядов внутри однородного безграничного диэлектрика в ε_r раз по сравнению с полем, которое создавали бы эти заряды в вакууме.

Отметим, что соотношение (5.26) имеет более узкую область применимости по сравнению с (5.23), оно является справедливым только для однородных безграничных диэлектриков, свойства которых не зависят от пространственных координат. В то же время формула (5.23) верна как для однородных, так и для неоднородных диэлектриков.

Вернемся к вопросу о необходимости введения вектора электрической индукции $\vec{D}$ (вектора смещения). Этот вектор во многих случаях значительно упрощает изучение электрического поля в диэлектрике. Согласно формулам (5.23) и (5.24), источниками поля вектора смещения являются только свободные (сторонние) заряды. Такие заряды не входят в состав атомов и молекул диэлектрика, поэтому в большинстве случаев учесть расположение свободных зарядов относительно просто. Затем, используя соотношения (5.23) и (5.24), можно вычислить вектор электрической индукции $\vec{D}$ и далее, с помощью формулы (5.17), можно найти напряженность электрического поля $\vec{E}$, то есть силовую характеристику поля. Тем самым задача определения поля внутри диэлектрика будет решена. В то же время прямое вычисление напряженности поля $\vec{E}$ является более сложной задачей, поскольку напряженность поля, согласно формулам (2.9) и (5.22), создается не только свободными, но и связанными зарядами.

Приведённый выше алгоритм вычисления напряженности поля $\vec{E}$, как и весь материал раздела 5, касается ***электрического поля, усреднённого по физически малой области диэлектрика.*** Такая область имеет малые геометрические размеры, но в то же время содержит большое количество атомов и молекул вещества. Нужно помнить, что реальное поле может сильно изменяться в пределах молекул и в пространстве между ними. Это поле принято называть ***микрополем***. Однако для решения многих практически важных задач изменения микрополя можно не учитывать и рассматривать, как первое приближение, ***макрополе***, то есть электрическое поле, усреднённое по физически малому объёму. Такое усреднение учитывает плавные изменения электрического поля на больших расстояниях, но сглаживает все изменения поля на расстояниях порядка атомных.

Поэтому во всех формулах раздела 5 под напряжённостью электрического поля $\vec{E}$ понимается именно макрополе.

В то же время существуют случаи, когда необходимо различать усреднённое поле $\vec{E}$ и микрополе $\vec{E}'$, действующее непосредственно на молекулу. ***Отличие действующего поля от среднего*** важно учесть для плотных диэлектриков, у которых относительная диэлектрическая проницаемость значительно отличается от единицы. В этом случае справедливы ***формулы Лоренц – Лорентца:***

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}, \qquad (5.27)$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\beta}{3}, \qquad (5.28)$$

где $\vec{P}$ - вектор поляризации кристалла;

N - концентрация молекул вещества;

β - поляризуемость молекулы, связывающая дипольный момент молекулы $\vec{p}$ и напряжённость поля $\vec{E}'$, действующего на молекулу:

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0\vec{E}'. \qquad (5.29)$$

Соотношение (5.28) называют также ***формулой Клаузиуса – Моссотти***. Исключая вектор $\vec{P}$, с помощью формул (5.27) – (5.29) можно получить соотношение

$$\vec{E}' = \frac{\varepsilon_r + 2}{3}\vec{E}. \qquad (5.30)$$

Из формулы (5.30) следует, что если диэлектрик не является плотным и для него $\varepsilon_r \to 1$, то $\vec{E}' \to \vec{E}$, и действующее поле перестаёт отличаться от среднего.

6 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Изменение компонент векторов поля при переходе из одного диэлектрика в другой описывается ***граничными условиями***

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{своб.}, \tag{6.1}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \tag{6.2}$$

где $\sigma_{своб.}$ - поверхностная плотность свободных зарядов на границе раздела;

индексы n и τ обозначают нормальные и тангенциальные составляющие векторов относительно границы раздела первой и второй среды, единичный вектор нормали направлен, как обычно, от первой среды ко второй (см. рисунок 11).

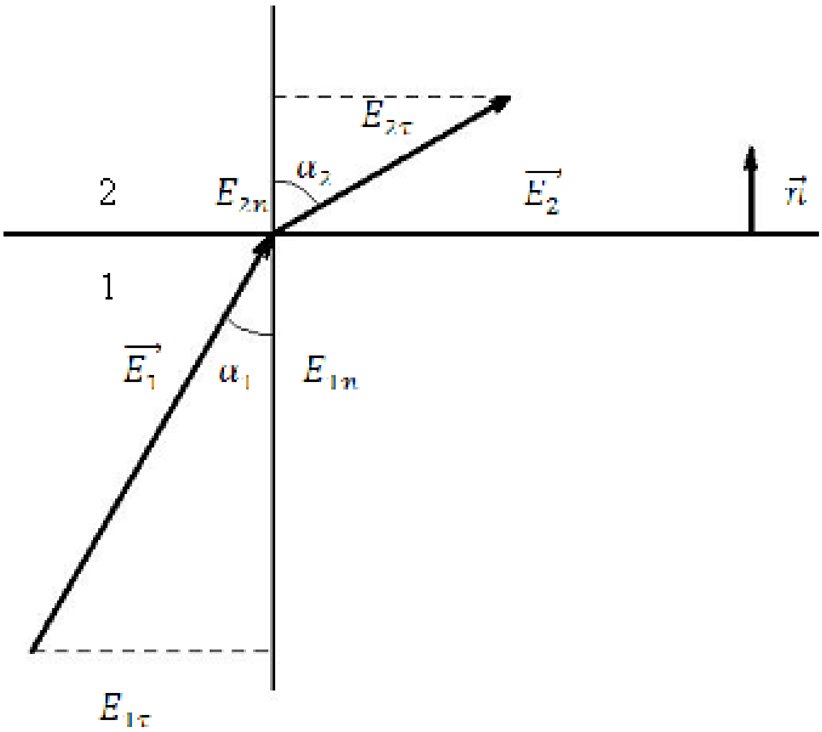


Рисунок 11 – Преломление линий вектора $\vec{E}$ на границе раздела двух диэлектриков

Нормальные и тангенциальные компоненты векторов можно вычислить следующим образом:

$$D_n = D\cos\alpha, \tag{6.3}$$

$$E_\tau = E\sin\alpha\,, \tag{6.4}$$

где α - угол между рассматриваемым вектором в некотором диэлектрике и нормалью к границе раздела двух сред.

Изменение вектора поляризации вещества при переходе через поверхность раздела двух диэлектриков описывается формулой (5.14).

Поскольку внутри металла электрическое поле отсутствует, то на границе раздела металла и диэлектрика соотношение (6.1) принимает вид

$$D_{2n} = \sigma_{своб.}, \tag{6.5}$$

где $\sigma_{своб.}$ - плотность свободных зарядов на поверхности металла, в качестве второй среды рассматривается диэлектрик, единичный вектор нормали направлен, вовнутрь диэлектрика.

Из формул (5.17), (6.5) следует выражение для напряженности электрического поля внутри диэлектрика вблизи поверхности металла

$$E_{2n} = \frac{\sigma_{своб.}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \tag{6.6}$$

Сравнивая выражения (4.4) и (6.6), получаем, что электрическое поле внутри диэлектрика вблизи поверхности металла также ослабляется в ε_r раз, как и поле точечных зарядов в однородном безграничном диэлектрике.

Используя соотношения (3.8), (4.15) и (6.6), находим ***ёмкость плоского конденсатора, заполненного диэлектриком***

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{S}{d}, \tag{6.7}$$

где S - площадь обкладки конденсатора;

d - расстояние между обкладками.

Из сравнения соотношений (4.18) и (6.7) находим, что ёмкость конденсатора возрастает в ε_r раз в случае заполнения конденсатора диэлектрическим веществом. Так происходит потому, что электрическое поле внутри такого конденсатора ослабляется, соответственно уменьшается напряжение на конденсаторе. При увеличении заряда на обкладках напряжение растёт медленнее, чем для незаполненного конденсатора, поэтому конденсатор способен накопить больший заряд.

На основании граничных условий (6.1), (6.2) и формулы (5.17) можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков происходит ***преломление линий*** вектора $\vec{E}$ и линий вектора $\vec{D}$ (см. рисунок 12). При этом линии вектора $\vec{E}$ и линии вектора $\vec{D}$ отклоняются от перпендикуляра к границе раздела двух сред при переходе в вещество с большей диэлектрической проницаемостью, или, как принято говорить, при переходе в более плотную диэлектрическую среду. Если на границе раздела двух сред отсутствуют свободные заряды ($\sigma_{своб.} = 0$), то линии вектора $\vec{D}$ испытывают только преломление, без разрыва. В результате густота линий вектора $\vec{D}$ увеличивается в более плотной диэлектрической среде, поскольку выполняется неравенство для модулей векторов $D_2 > D_1$ при условии $\varepsilon_{2r} > \varepsilon_{1r}$. В свою очередь линии вектора $\vec{E}$ не только испытывают преломление, но и терпят разрыв (из-за присутствия связанных зарядов). При этом справедливо неравенство $E_2 < E_1$, то есть густота линий вектора $\vec{E}$ во второй среде уменьшается.

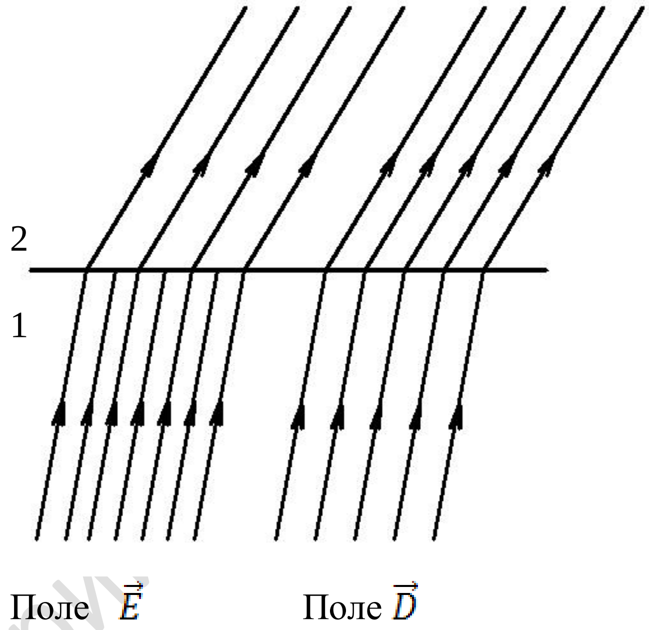


Рисунок 12 - Поведение линий вектора $\vec{E}$ и линий вектора $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков (свободных зарядов на границе нет)

Граничные условия играют очень важную роль при определении электрических и магнитных полей. В самом общем случае электромагнитные поля могут быть вычислены в результате решения уравнений Максвелла. Эти уравнения являются дифференциальными, и поэтому их решения неоднозначны. Граничные условия позволяют устранить эту неоднозначность и вычислить реальные поля, существующие в какой-либо среде, в зависимости от конкретных условий на её границе.

7 СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

В разделе 5 мы рассмотрели два основных класса диэлектриков: неполярные и полярные, а также изучили механизмы их поляризации. Однако существует группа химических соединений, относящихся к полярным диэлектрикам, которые в твёрдом состоянии имеют весьма необычные и интересные диэлектрические свойства. Эти вещества получили название сегнетоэлектриков. ***Сегнетоэлектрики*** - это такие диэлектрики, которые в определенном интервале температур могут быть самопроизвольно поляризованы, то есть могут иметь отличный от нуля вектор поляризации в отсутствие внешнего электрического поля. Такая поляризация называется ***спонтанной***. На границах этого интервала при некоторой температуре, называемой ***температурой Кюри***, происходит фазовый переход, и сегнетоэлектрик превращается в обычный полярный диэлектрик. Свойства сегнетоэлектриков объясняются сильным взаимодействием дипольных моментов соседних молекул и образованием вследствие этого ***диэлектрических доменов*** - областей спонтанной поляризации. В пределах каждого домена дипольные моменты всех частиц кристалла самопроизвольно устанавливаются в одном направлении, параллельно друг другу. Обычно размеры доменов малы по сравнению с размерами всего кристалла, тогда направления поляризованности в разных доменах являются различными, так что результирующий дипольный момент всего образца равен нулю. Такая направленность доменов соответствует минимуму энергии, так как в противном случае вокруг сегнетоэлектрика возникло бы электрическое поле, которое обладало бы дополнительной энергией.

Первое свойство сегнетоэлектриков состоит в том, что их относительная диэлектрическая проницаемость может достигать очень больших значений ($\varepsilon_r \sim 10^2 - 10^4$). Это свойство объясняется тем обстоятельством, что под действием внешнего электрического поля происходит переориентация не отдельных дипольных моментов, а каждого домена целиком. Поэтому вектор поляризации быстро увеличивается при возрастании электрического поля, то есть диэлектрик обладает большой диэлектрической восприимчивостью κ и большой относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 1 + \kappa$. Следовательно, неравенство (5.8) можно обобщить следующим образом

$$\kappa_{неполярн} < \kappa_{полярн} < \kappa_{сегнетоэл} \qquad (7.1)$$

Второе свойство сегнетоэлектриков заключается в том, что электрическое смещение D оказывается не пропорциональным напряжённости поля E. Значит, диэлектрическая проницаемость зависит от значений электрического поля. Зависимость ε_r от E описывается формулой

$$\varepsilon_r(E) = 1 + \frac{P(E)}{\varepsilon_0 E}, \quad (7.2)$$

где $P(E)$ - поляризованность сегнетоэлектрика, зависящая от напряжённости поля.

Зависимость $\varepsilon_r(E)$ графически представлена на рисунке 13.

При значительном возрастании напряженности электрического поля диэлектрик переходит в ***состояние насыщения поляризации*** ($P = const$). В таком состоянии все домены переориентированы вдоль внешнего электрического поля. Из выражения (7.2) следует, что после перехода сегнетоэлектрика в состояние насыщения поляризации относительная диэлектрическая проницаемость монотонно стремится к 1. Таким образом, сегнетоэлектрические свойства образца проявляются при сравнительно небольших напряженностях электрического поля $E \le E_{кр.}$ Максимальных значений относительная диэлектрическая проницаемость ε_r достигает при критическом значении напряженности электрического поля $E_{кр.}$

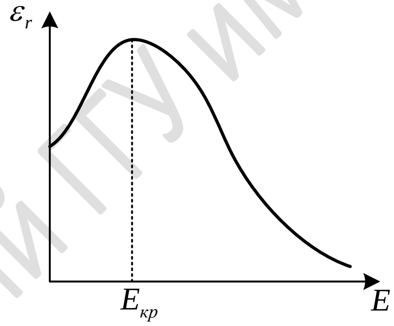


Рисунок 13 - Зависимость относительной диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика от напряженности электрического поля

Третье свойство сегнетоэлектриков проявляется в том, что значения поляризованности P, а значит, и смещения D отстают от напряжённости поля E. В результате P и D определяются не только величиной E в данный момент, но и предшествующими состояниями сегнетоэлектрика, то есть значениями E в более ранние моменты времени. Это явление называется ***гистерезисом, или запаздыванием поляризации.*** При этом зависимость электрической индукции от напряженности $D = f(E)$ является нелинейной и неоднозначной и имеет вид ***петли гистерезиса*** (рисунок 14).

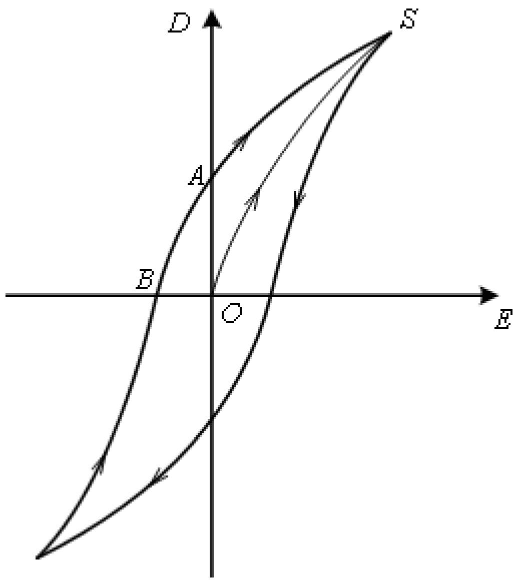


Рисунок 14 - Зависимость электрической индукции от напряженности поля для сегнетоэлектрика (петля гистерезиса)

Явление гистерезиса объясняется свойствами доменов, которые частично сохраняют направление поляризации при изменении внешнего электрического поля. Допустим, что сегнетоэлектрик приобрёл некоторую поляризованность под действием электрического поля. Этот процесс поляризации сегнетоэлектрика, который первоначально был не поляризован, можно представить кривой OS на рисунке 14. Затем, при уменьшении напряжённости электрического поля, индукция поля в среде будет убывать с задержкой, по другой ветви зависимости $D = f(E)$, а именно по кривой SB. Говорят, что индукция запаздывает относительно напряженности. Отрезок ОА характеризует ***остаточную поляризацию***, а отрезок ОВ – ***коэрцитивную (задерживающую силу)***. Коэрцитивная сила - это напряженность такого поля, которое нужно приложить в противоположном направлении, чтобы избавиться от остаточной поляризации.

Четвёртое свойство сегнетоэлектриков состоит в наличии одной или нескольких точек Кюри, при которых происходит фазовый переход. Для сегнетоэлектриков выполняется ***закон Кюри – Вейсса***

$$\kappa = \frac{C}{T - T_k}, \tag{7.3}$$

где κ - диэлектрическая восприимчивость;

C - некоторая постоянная;

T - абсолютная температура образца;

T_k - ***верхняя точка Кюри***, при которой происходит фазовый переход сегнетоэлектрика в неполяризованное состояние.

Формула (7.3) является справедливой при $T > T_k$ и показывает, что для температур, превышающих температуру Кюри, диэлектрическая восприимчивость сегнетоэлектрика быстро уменьшается при нагревании образца.

Возможны случаи, когда сегнетоэлектрик имеет также ***нижнюю точку Кюри,*** то есть низкотемпературную границу состояния со спонтанной поляризацией. Вблизи этой температуры закон Кюри – Вейсса принимает вид

$$\kappa = \frac{C'}{T_k - T}, \tag{7.4}$$

где C' - некоторая новая константа;

T_k - нижняя температура Кюри.

Соотношение (7.4) выполняется, если абсолютная температура сегнетоэлектрика удовлетворяет неравенству $T < T_k$.

Типичными представителями сегнетоэлектриков являются титанат бария ($BaTiO_3$) и сегнетова соль. Например, для сегнетовой соли температуры Кюри приблизительно равны $+24^{\circ}$C и -18°C, и сегнетоэлектрические свойства проявляются только при температурах, лежащих между этими двумя точками.

8 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКИ

Выше мы рассматривали поляризацию диэлектриков, обусловленную внешним электрическим полем. Однако в некоторых кристаллах поляризация может появиться и в отсутствие внешнего поля, если кристалл испытывает механические деформации. Кристаллы, на поверхностях которых при деформациях возникают электрические заряды, называются ***пьезоэлектриками***. При этом растяжение и сжатие кристалла должно производиться в определённых направлениях. Это явление было открыто в 1880 г. братьями Пьером и Жаком Кюри и получило название ***прямого пьезоэлектрического эффекта***.

Пьезоэлектриками могут быть только ионные кристаллы, однако не все ионные кристаллы являются пьезоэлектриками. К ионным кристаллам относятся кристаллы, в которых положительные и отрицательные ионы образуют две кристаллические решётки. Причиной пьезоэффекта является тот факт, что эти две кристаллические решётки под действием внешних сил деформируются по-разному. В результате происходит относительное смещение двух кристаллических решеток при деформации кристалла.

Допустим, что производится растяжение или сжатие пьезоэлектрической пластинки вдоль некоторой оси X, называемой ***пьезоэлектрической осью***. Тогда в пластинке возникает поляризованность, которая в широком интервале её изменения пропорциональна относительной деформации образца:

$$P_x = \beta \frac{\Delta d}{d}, \tag{8.1}$$

где P_x - проекция вектора поляризации на ось X;

d - толщина пластинки;

Δd - изменение толщины пластинки;

β - ***пьезоэлектрический коэффициент***, который может быть как положительным, так и отрицательным.

Единицей измерения пьезоэлектрического коэффициента является $\text{Кл}/\text{м}^2$. На гранях пластинки, перпендикулярных к оси X, возникают связанные заряды противоположного знака. Поверхностную плотность связанных зарядов можно определить с помощью формулы

$$\sigma_{связ.} = P_x. \tag{8.2}$$

При получении соотношения (8.2) мы использовали формулы (5.14), (5.15) и учли, что пьезоэлектрическая пластинка находится в воздухе, поляризованностью которого можно пренебречь.

По величине разности потенциалов, возникающей на противоположных гранях пластинки, можно судить о величине деформации и приложенных силах. Поэтому пьезоэлектрики находят широкое применение на практике в качестве датчиков для измерения быстропеременных давлений.

Отметим, что пьезоэлектрический эффект может возникать не только при сжатии и растяжении кристалла, но и при деформации сдвига.

В пьезоэлектриках возможен также ***обратный пьезоэлектрический эффект,*** состоящий в деформации кристалла под действием электрического поля. На использовании этого эффекта основано действие многих устройств, в частности, кварцевых излучателей ультразвука. Частота ультразвука, широко используемого в технике, биологии и медицине, принадлежит диапазону от $2\cdot10^4$ Гц до 10^9 Гц.

Примерами пьезоэлектриков являются кварц, турмалин, сегнетова соль, титанат бария, хлорат натрия, цинковая обманка, винная кислота, тростниковый сахар и многие другие ионные кристаллы.

Обратный пьезоэлектрический эффект не следует путать с ***электрострикцией***. При обратном пьезоэффекте деформация кристалла линейно зависит от электрического поля и изменяет знак при изменении направления поля на противоположное. При электрострикции деформация образца пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля и поэтому не зависит от направления поля. Пьезоэффект возможен только в кристаллах, и притом только некоторых кристаллографических классов, не обладающих центром симметрии. Электрострикция наблюдается во всех диэлектриках – твёрдых, жидких и газообразных.

9 ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим точечную частицу с электрическим зарядом q, которая находится во внешнем электростатическом поле, потенциал которого в точке нахождения частицы равен φ. При этом потенциал поля на бесконечном удалении от рассматриваемой точки равен нулю, то есть выполняется условие нормировки потенциала (3.6). ***Потенциальная энергия*** такой заряженной частицы в электростатическом поле может быть вычислена с помощью формулы (3.7) и имеет вид

$$W = q\varphi \ . \tag{9.1}$$

Эта энергия равна работе, совершаемой полем при удалении частицы на бесконечность, где потенциал поля равен нулю.

Если рассмотреть систему точечных частиц с зарядами q_i, то можно применить к каждому заряду формулу (9.1), а потенциал поля в точке расположения этого заряда записать в виде (3.11). В результате суммирования по всем зарядам получим, что ***энергия взаимодействия заряженных частиц*** в системе равна

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{9.2}$$

где r_{ij} - расстояние между частицами с зарядами q_i и q_j, суммирование производится по всем частицам.

Соотношение (9.2) можно представить также следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i \ , \tag{9.3}$$

где φ_i - потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда q_i остальными зарядами.

Формулу (9.3) не следует путать с выражением для ***энергии системы электрических зарядов во внешнем электрическом поле***

$$W = \sum_i q_i\varphi_i^{(внуш.)}, \tag{9.4}$$

где $\varphi_i^{(внеш.)}$ - потенциал ***внешнего*** поля в точке нахождения заряда q_i.

Как мы видим, выражения (9.3) и (9.4) отличаются коэффициентом ½.

При непрерывном распределении заряда в пространстве с объемной плотностью ρ выражение (9.3) для энергии взаимодействия зарядов можно преобразовать и получить полную энергию взаимодействия зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\int_{(V)} \varphi\rho dV, \tag{9.5}$$

где φ и ρ - потенциал и плотность заряда внутри физически малого объема dV, интегрирование производится по всей области (V), в которой распределен электрический заряд.

Энергия непрерывно распределенного заряда во внешнем электрическом поле определяется выражением

$$W = \int_{(V)} \varphi^{(внеш.)}\rho dV, \tag{9.6}$$

где $\varphi^{(внеш.)}$ - потенциал ***внешнего*** электрического поля.

Соотношения (9.5) и (9.6) также отличаются коэффициентом ½.

С помощью формул (3.5), (5.23) и теоремы Остроградского–Гаусса (2.7) выражение (9.5) можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2}\int_{(V)} \vec{E}\vec{D} dV, \tag{9.7}$$

где интегрирование производится по всей области (V), в которой существует электрическое поле.

Выражения (9.5) и (9.7) дают одинаковые численные значения для энергии взаимодействия зарядов W, но физическое содержание этих формул различно. Согласно (9.5), энергия взаимодействия является локализованной на зарядах, которые рассматриваются как носители энергии, и $dW \neq 0$ только в тех областях (dV), где $\rho \neq 0$. В соответствии с (9.7) носителем энергии является электрическое поле, и мы можем ввести в рассмотрение ***объемную плотность энергии электрического поля***

$$w = \frac{dW}{dV}, \tag{9.8}$$

где dV - некоторый физически малый объем пространства;

dW - энергия электростатического поля в этом объеме.

Из соотношения (9.8) следует, что объемная плотность энергии поля измеряется в единицах $Дж/м^3$.

Согласно (9.7) и (9.8), энергия распределена по всему пространству, где есть электрическое поле, с объемной плотностью

$$w=\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}. \tag{9.9}$$

Поскольку индукция $\vec{D}$ и напряженность $\vec{E}$ электрического поля связаны соотношением (5.17), формулу (9.9) можно преобразовать следующим образом:

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2. \tag{9.10}$$

Так как для диэлектриков, помещенных в электростатические поля, выполняются неравенства (5.7) и (5.19), то относительная диэлектрическая проницаемость принимает только положительные значения. Следовательно, объемная плотность энергии электростатического поля (9.10) всегда является положительной величиной.

Таким образом, возможны ***два равноправных варианта рассмотрения энергии в электростатике:*** энергия принадлежит заряженным частицам либо электрическому полю. В обоих случаях численное значение энергии одинаково. Такой двойственный подход к рассмотрению энергии обусловлен тем обстоятельством, что понятия электрического заряда и электрического поля неразрывно связаны друг с другом. Поле создается заряженными частицами и проявляет себя действием на другие заряженные частицы.

Если электрические заряды распределены не только по объему, но и по некоторой поверхности (S), то полная энергия взаимодействия зарядов равна

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{(V)}\varphi\rho dV+\frac{1}{2}\int\limits_{(S)}\varphi\sigma dS, \tag{9.11}$$

где σ - поверхностная плотность электрического заряда (2.12).

Для заряженных проводников в электрическом поле необходимо учесть два следующих обстоятельства: а) заряды могут скапливаться только на поверхности проводника, при этом $\rho=0$; б) внутри проводника электрическое поле отсутствует, следовательно, для всех точек проводника $\varphi=const$. Таким образом, из формулы (9.11) можно получить выражение для ***энергии заряжённого проводника***

$$W=\frac{1}{2}\varphi\int\limits_{(S)}\sigma dS=\frac{1}{2}\varphi q, \tag{9.12}$$

где φ - потенциал проводника;

q - заряд проводника.

Тогда формула для ***энергии системы заряженных проводников*** принимает вид

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i \,, \qquad (9.13)$$

где φ_i - потенциал i-го проводника;

q_i - его заряд, суммирование производится по всем проводникам.

Энергия конденсатора соответственно равна

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \,, \qquad (9.14)$$

где q - заряд на положительной обкладке конденсатора;

U - напряжение на конденсаторе;

C - емкость конденсатора.

Используя соотношения (3.8), и (6.5), энергию конденсатора (9.14) можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2}DEV \,, \qquad (9.15)$$

где $V = Sd$ - объём конденсатора;

S - площадь обкладки;

d - расстояние между обкладками конденсатора.

Согласно (9.15), энергию конденсатора можно считать распределенной по объёму конденсатора с объёмной плотностью (9.9).

Энергия диполя, помещенного в электрическое поле, складывается из энергий его зарядов в этом поле и определяется выражением

$$W = -\vec{p}\vec{E} \,, \qquad (9.16)$$

где $\vec{p}$ - вектор электрического дипольного момента (5.1).

Из формулы (9.16) следует, что энергия диполя во внешнем электрическом поле может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от взаимной ориентации векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$. Если записать скалярное произведение векторов в (9.16) в явном виде, получим соотношение

$$W = -pE\cos\alpha\,, \qquad (9.17)$$

где α - угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

Минимум энергии диполя во внешнем электрическом поле достигается при ориентации дипольного момента $\vec{p}$ параллельно напряженности $\vec{E}$, то есть в случае $\alpha = 0$. При этом момент сил (5.5), действующий на диполь, обращается в нуль, и диполь находится в ***состоянии устойчивого равновесия***. Если векторы $\vec{p}$ и $\vec{E}$ направлены противоположно друг другу, то $\alpha = \pi$, и энергия диполя во внешнем поле является максимальной. В этом случае диполь находится в состоянии неустойчивого равновесия.

С помощью формулы (9.16), так же как и на основании формулы (5.5), можно объяснить механизм поляризации полярных диэлектриков и сегнетоэлектриков. В этих веществах, как было показано в разделах 5 и 7, под действием внешнего электрического поля, при увеличении его напряжённости, происходит постепенное выстраивание дипольных моментов всех атомов и молекул, либо доменов целиком, вдоль направления вектора напряжённости $\vec{E}$.

Сила, действующая на диполь со стороны электрического поля, может быть записана в виде

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\vec{\nabla}\right)\vec{E}\,, \qquad (9.18)$$

где $\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ - символический векторный дифференциальный оператор "набла";

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты системы координат.

Например, x - компонента силы, действующей на диполь, равна

$$F_x = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right)E_x\,, \qquad (9.19)$$

где E_x - проекция напряженности электрического поля на ось x.

Формулы (9.18) и (9.19) упрощаются, если электрический диполь ориентирован вдоль вектора напряжённости электрического поля, то есть имеет минимальную энергию в соответствии с формулой (9.17). Выбирая ось x вдоль вектора $\vec{E}$ в точке расположения диполя, получаем, что сила, действующая на диполь, имеет только x- составляющую, которая равна

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\,. \qquad (9.20)$$

Как показывают формулы (9.18) - (9.20), ***сила действует на диполь только в неоднородном поле***, то есть в поле, напряженность которого изменяется в пространстве. Если же поле однородно, то сила, действующая на диполь, равна нулю, т.к. к полюсам диполя приложены равные по величине и противоположные по направлению силы. Сила, действующая на диполь в неоднородном поле, направлена в область более сильного поля. Поэтому диполь втягивается в область более сильного поля.

Воздействие неоднородного электрического поля испытывает не только отдельный диполь, но и диэлектрик, поскольку он поляризуется в электрическом поле. С помощью формулы (9.18) можно показать, что ***объемная плотность силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле,*** равна

$$\vec{f} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)grad\left(E^2\right), \tag{9.21}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ - полная диэлектрическая проницаемость среды.

На любой физически малый объем диэлектрика dV действует сила

$$d\vec{F} = \vec{f}dV\,. \tag{9.22}$$

Эта сила направлена в сторону самого быстрого возрастания модуля напряженности электрического поля в пространстве, то есть в область более сильного поля. Следовательно, диэлектрик, подобно отдельному диполю, втягивается в область более сильного поля.

Электрический диполь не только испытывает воздействие внешних электрических полей в соответствии с формулами (5.4) и (9.18), но и сам создает электрическое поле в окружающем пространстве. ***Потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого диполем***, можно записать в виде

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}, \tag{9.23}$$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3\vec{r}\left(\vec{p}\vec{r}\right)}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right\}, \tag{9.24}$$

где $\vec{r}$ - вектор, проведенный от диполя в точку пространства, где определяется электрическое поле.

Модуль вектора напряжённости электрического поля (9.24), создаваемого диполем, можно представить следующим образом:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}\,, \tag{9.25}$$

где ϑ - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Из формул (9.23) - (9.25) следует, что на больших расстояниях от диполя

$$\varphi_p \sim \frac{1}{r^2}\,;\; E_p \sim \frac{1}{r^3}\,. \tag{9.26}$$

Это значит, что электрическое поле, создаваемое диполем, убывает с увеличением расстояния быстрее, чем поле точечного заряда. Это обстоятельство объясняется тем, что заряды диполя, имеющие противоположные знаки, создают в окружающем пространстве электрические поля, которые частично компенсируют друг друга, и результирующее поле уменьшается быстрее.

Ранее мы рассматривали электрическое взаимодействие только между заряженными телами. Из формул (9.16), (9.18), (9.23), (9.24) следует, что ***участвовать в электрическом взаимодействии могут также нейтральные системы***, если положительно и отрицательно заряженные частицы в них взаимно смещены, вследствие чего система обладает электрическим дипольным моментом.

В качестве примера можно привести ***процесс электролитической диссоциации***. Электролитами называются растворы солей, кислот или щелочей в воде. Молекулы воды являются полярными, то есть они обладают электрическими дипольными моментами. Следовательно, эти молекулы создают электрическое поле в окружающем пространстве, хотя и являются электрически нейтральными. Под действием поля молекул воды молекулы растворенного вещества (соли, кислоты или щелочи) втягиваются в область более сильного поля, то есть приближаются к молекулам воды. Затем под действием электростатических сил молекулы растворенного вещества могут распадаться на ионы, то есть диссоциировать. В результате в растворе возникают свободные носители заряда, то есть электролит становится проводником тока.

Таким образом, электрический дипольный момент $\vec{p}$ (5.1), (5.2) является ***важнейшей характеристикой электрически нейтральной системы***. Зная дипольный момент системы $\vec{p}$, можно вычислить силу (9.18) и момент силы (5.4), действующие на систему со стороны внешнего поля, а также поле (9.23), (9.24), создаваемое самой системой в окружающем пространстве. Следовательно, дипольный момент позволяет описать взаимодействие электрически нейтральной системы с другими телами.

10 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЗАКОН ОМА

Электрическим током называется упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц в пространстве. В связи с этим свободные заряды принято называть также ***носителями тока***. Направленное движение заряженных частиц приводит к переносу электрического заряда через некоторую поверхность, например, через сечение проводника.

Например, в металлах электроны проводимости совершают хаотическое тепловое движение, сталкиваясь с ионами, образующими кристаллическую решётку металла. Эти соударения приводят к установлению теплового равновесия между электронами и кристаллической решёткой. При помещении металла во внешнее электрическое поле электроны начинают дополнительно совершать упорядоченное движение, направление которого противоположно направлению вектора напряжённости электрического поля. Таким образом, возникает электрический ток.

Для характеристики тока вводится ***вектор плотности тока***, который определяется следующим образом:

$$\vec{j} = \frac{1}{\Delta V}\sum_i q_i \vec{v}_i \, , \tag{10.1}$$

где q_i - заряд i-ой частицы, $\vec{v}_i$- скорость её упорядоченного движения, суммирование производится по всем частицам, находящимся внутри физически малого объема ΔV .

Введя среднюю скорость упорядоченного движения заряженных частиц $\langle\vec{v}\rangle$, можно записать

$$\vec{j} = qN\langle\vec{v}\rangle = \rho\langle\vec{v}\rangle \, , \tag{10.2}$$

где q - заряд частицы;

N - концентрация свободных носителей заряда;

$\rho = qN$ - объемная плотность электрического заряда свободных частиц.

При получении соотношения (10.2) использовано предположение, что все свободные частицы имеют одинаковый заряд q .

Из формулы (10.2) следует, что направление вектора плотности тока совпадает с направлением упорядоченного движения положительно заряженных частиц. Если же свободные частицы заряжены отрицательно, как электроны проводимости в металлах, то вектор плотности тока направлен противоположно скорости упорядоченного движения свободных зарядов.

Силой тока через некоторую поверхность (S) называется отношение заряда dq, прошедшего через эту поверхность за промежуток времени dt, к длительности этого отрезка времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{10.3}$$

Единицей измерения силы тока является ампер [А]. В международной системе единиц СИ один ампер определяется через величину силы взаимодействия двух параллельных очень длинных проводников с током, находящихся на расстоянии один метр друг от друга. Согласно (10.3), единица измерения заряда может быть определена следующим образом: $1\text{Кл} = 1\text{А} \cdot 1\text{с}$.

Сила тока выражается через плотность тока следующим образом:

$$I = \int\limits_{(S)} \vec{j} d\vec{S}. \tag{10.4}$$

Здесь (S) - поверхность произвольной формы, сквозь которую проходит электрический ток, например, сечение проводника, $d\vec{S}$ - вектор, характеризующий элемент поверхности (S).

Из соотношения (10.4) следует, что плотность тока измеряется в единицах $\text{А}/\text{м}^2$.

Формула (10.4) учитывает возможность изменения плотности тока в зависимости от координаты в пределах выбранной поверхности (S). Если вектор плотности тока $\vec{j}$ является постоянным на всей поверхности (S) и направлен ортогонально этой поверхности, то соотношение (10.4) принимает вид

$$I = jS, \tag{10.5}$$

где S - площадь рассматриваемой поверхности, например, поперечного сечения проводника.

Закон сохранения электрического заряда - один из фундаментальных законов природы, он следует из опытных фактов. Во–первых, заряд любой частицы является инвариантным, то есть не зависит от скорости движения частицы (см. раздел 1). Доказательством инвариантности заряда является электрическая нейтральность атомов. Во–вторых, суммарный электрический заряд системы частиц не изменяется при любых взаимопревращениях частиц. Следовательно, электрический заряд замкнутой системы частиц остается постоянным. Электрический заряд является свойством частицы и отдельно от своих носителей существовать не может. В то же время электрический заряд является в некотором смысле самостоятельной величиной, поскольку не изменяется при взаимопревращениях частиц. В соответствии с законом сохранения электрического заряда изменение заряда в некоторой области (V) может произойти только в результате движения заряженных частиц через замкнутую поверхность (S), ограничивающую область. Изменение суммарного заряда Q в области (V) можно характеризовать производной

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV , \tag{10.6}$$

где ρ - объёмная плотность электрического заряда.

Поскольку заряд переносится через поверхность (S), ограничивающую область (V), мы можем характеризовать это движение частиц силой тока

$$I = \oint_{(S)} \vec{j} d\vec{S} , \tag{10.7}$$

при этом положительная нормаль, как и ранее, направлена наружу относительно области (V).

Используя соотношения (10.3), (10.6) и (10.7), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = -\oint_{(S)} \vec{j} d\vec{S} . \tag{10.8}$$

Здесь знак «минус» учитывает, что при движении положительно заряженных частиц наружу сила тока является положительной величиной, в то время как заряд внутри области уменьшается.

Соотношение (10.8) представляет собой закон сохранения электрического заряда в интегральной форме. Используя теорему Остроградского - Гаусса (2.7), это закон можно записать также в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 . \tag{10.9}$$

Уравнение (10.9) называется также ***уравнением непрерывности***.

В соотношении (10.9) используется символ частной производной по времени, поскольку область (V) и её граница (S) не изменяются с течением времени.

Закон Ома для участка цепи гласит: если состояние проводника остаётся неизменным (не изменяется его температура и т.д.), то сила тока I на участке цепи прямо пропорциональна приложенному напряжению U :

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (10.10)$$

где R - ***сопротивление участка цепи***, играющее роль коэффициента пропорциональности.

Единицей измерения сопротивления является ом (Ом).

В формуле (10.10) напряжение U, как и ранее, равно разности потенциалов $\Delta\varphi$ (см. раздел 3).

Для линейного однородного проводника круглого сечения сопротивление пропорционально его длине Δl и обратно пропорционально площади поперечного сечения S:

$$R = \rho \frac{\Delta l}{S}, \qquad (10.11)$$

где ρ - ***удельное сопротивление вещества***.

Удельное сопротивление вещества измеряется в единицах $\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Следует различать удельное сопротивление вещества и объёмную плотность электрического заряда, которые в электричестве традиционно имеют одинаковое обозначение ρ.

Характеристикой проводника является также его ***проводимость,*** которая связана с сопротивлением проводника обратной зависимостью

$$\Gamma = \frac{1}{R}. \qquad (10.12)$$

Единицей измерения проводимости в системе СИ является ***сименс*** (См). Согласно (10.10) $1\text{См} = 1\text{Ом}^{-1}$.

Закон Ома можно записать также ***в дифференциальной форме***:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \qquad (10.13)$$

Здесь σ - удельная проводимость вещества, то есть величина, обратная его удельному сопротивлению:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \qquad (10.14)$$

Закон Ома в дифференциальной форме показывает, что именно электрическое поле является причиной существования электрического тока в любом физически малом объеме проводника. Прохождение электрического тока внутри проводника свидетельствует, что в объёме проводника обязательно существует электрическое поле. Если электрический ток в проводнике отсутствует, то из закона Ома в дифференциальной форме (10.13) следует $\vec{E}=0$, то есть мы приходим к ранее рассмотренному случаю экранировки внешнего электрического поля проводником.

Опыт показывает, что снаружи проводника с током вблизи его поверхности вектор напряжённости электрического поля направлен под углом к поверхности проводника. Это значит, что вектор $\vec{E}$ имеет как тангенциальную составляющую, так и нормальную составляющую относительно поверхности. В соответствии с формулой (4.4) наличие нормальной составляющей поля означает существование поверхностных зарядов на проводнике. Именно свободные заряды, сосредоточенные на поверхности проводника, создают электрическое поле внутри проводника. Это поле, в свою очередь, обеспечивает существование тока внутри проводника.

11 СТОРОННИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩИЕ СИЛЫ. ЗАКОН ДЖОУЛЯ - ЛЕНЦА

Рассмотрим металлический образец произвольной формы, помещенный во внешнее электростатическое поле. Под действием поля электроны проводимости приходят в движение и перераспределяются по объёму проводника (см. раздел 4). Такое упорядоченное движение заряженных частиц наблюдается в металле только в течение очень короткого промежутка времени после включения внешнего электрического поля. Затем устанавливается равновесное распределение зарядов в пространстве, и электрический ток прекращается. Для поддержания постоянного электрического тока необходимо все время нарушать равновесное расположение зарядов и перемещать заряженные частицы в пространстве противоположно действию электростатических сил. Такая транспортировка заряженных частиц возможна только под действием некоторых сил, сторонних по отношению к электростатическому полю.

Под ***сторонней силой*** понимают силу не электростатического происхождения, которая отделяет положительно заряжённые частицы от отрицательно заряжённых. Любое устройство, в котором возникают сторонние силы, называется ***источником тока***. Источниками тока, например, являются гальванические элементы, аккумуляторы, термоэлементы. В результате действия сторонних сил положительные и отрицательные заряды концентрируются в различных частях источника тока, или, как говорят, на полюсах источника тока. Так как разноименные заряды притягиваются друг к другу, то их разделение и взаимное удаление возможно только под действием сил, которые ***не имеют электростатическую природу***. Поэтому сторонние силы могут быть, например, механическими, химическими, электромагнитными. Эти силы могут быть обусловлены, в частности, трением, химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде либо через границу двух различных веществ, электрическими полями, создаваемыми переменными магнитными полями и т.д.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещаемыми зарядами. Величина, численно равная ***работе сторонних сил,*** совершаемой при перемещении единичного положительного заряда, называется ***электродвижущей силой (э.д.с.)*** ε, действующей в цепи или на её участке:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \qquad (11.1)$$

В соответствии с (11.1), ***э.д.с. измеряется в вольтах***.

Поскольку сторонние силы действуют только внутри источника тока и не действуют на участках цепи, внешних по отношению к источнику, то можно сделать вывод, что ***э.д.с. источника численно равна работе, совершаемой сторонними силами*** при перемещении единичного положительного заряда между полюсами внутри источника тока:

$$\varepsilon = \int_1^2 \vec{E}_{стор.} d\vec{l} \ , \qquad (11.2)$$

где точка 1 находится на отрицательном полюсе, а точка 2 – на положительном полюсе источника тока;

$\vec{E}_{стор.}$ - ***напряжённость поля сторонних сил***, то есть отношение сторонней силы $\vec{F}_{стор.}$, действующей на частицу, к величине её заряда q:

$$\vec{E}_{стор.} = \frac{\vec{F}_{стор.}}{q} \ . \qquad (11.3)$$

Формулу (11.2) можно обобщить на случай замкнутой цепи (например, если цепь содержит несколько источников тока):

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{стор.} d\vec{l} \ . \qquad (11.4)$$

Согласно (11.4), э.д.с. численно равна работе сторонних сил, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда по замкнутой цепи.

Помимо сторонних сил, на заряд действуют силы электростатического поля, имеющего напряжённость $\vec{E}$. Следовательно, результирующая сила $\vec{F}$, действующая на заряд q в любой точке цепи, может быть записана в виде

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{стор.}) \ . \qquad (11.5)$$

Участок цепи, содержащий источник тока, называется ***неоднородным*** (рисунок 15).

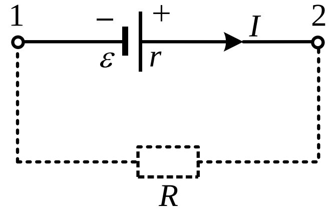


Рисунок 15 - Неоднородный участок цепи, содержащий источник тока

Работа, совершаемая суммарной силой $\vec{F}$ над зарядом q на участке цепи $1-2$, с учётом соотношений (3.7) и (11.2), равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon, \tag{11.6}$$

где φ_1 и φ_2 - значения скалярного потенциала электростатического поля на границах участка.

Величина, численно равная суммарной работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется ***падением напряжения*** или просто ***напряжением*** U на данном участке цепи.

Используя (11.6), получаем, что напряжение на неоднородном участке цепи определяется выражением

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon. \tag{11.7}$$

Таким образом, для неоднородного участка цепи ***электрическое напряжение не равно разности потенциалов.*** Это результат действия на данном участке цепи сторонней силы, которая имеет не электростатическую природу.

Опыт показывает, что закон Ома (10.10) выполняется также для неоднородного участка цепи, содержащего источник тока, если использовать обобщённое понятие напряжения (11.7). При этом сам источник тока представляет для тока определённое сопротивление, которое принято называть ***внутренним сопротивлением источника***. Поэтому ***закон Ома для неоднородного участка цепи*** имеет следующий вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}, \tag{11.8}$$

где I - сила тока;

r - внутреннее сопротивление источника тока.

При использовании соотношения (11.8) подразумевается следующее правило выбора знаков: ток считается положительным, если он направлен от точки 1 к точке 2; э.д.с. берётся со знаком «плюс», если, двигаясь от точки 1 к точке 2, мы проходим источник тока от отрицательного полюса к положительному.

Если неоднородный участок цепи $1-2$ будет дополнительно содержать некоторый резистор R_1, то необходимо учесть полное сопротивление участка, то есть в знаменатель соотношения (11.8) следует добавить слагаемое R_1.

Применяя соотношение (11.8) ко всей цепи, показанной на рис. 15, и полагая $\varphi_1 = \varphi_2$, получаем ***закон Ома для замкнутой цепи:***

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{11.9}$$

где R - сопротивление цепи, внешней по отношению к источнику тока.

Используя закон Ома для замкнутой цепи (11.9), можно вычислить напряжение на полюсах источника тока

$$U = \varepsilon - Ir. \tag{11.10}$$

Согласно соотношению (11.10), при постоянной э.д.с. напряжение на полюсах источника тока тем выше, чем меньше его внутреннее сопротивление.

Рассматривая часть цепи, изображённую на рис.15 штриховой линией, получаем, что выполняется неравенство $\varphi_2 > \varphi_1$. Это означает, что на неоднородном участке цепи ток проходит от точки с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом. Такое направление тока объясняется тем, что свободные носители заряда движутся под действием сторонних, то есть не электростатических сил.

В предельном случае, когда цепь, показанная на рис.15, разомкнута, $R \to \infty$. Тогда из формулы (11.9) следует, что $I \to 0$, и из соотношения (11.8) получаем $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$. Значит, ***электродвижущую силу источника можно определить как разность потенциалов между полюсами источника тока в разомкнутой цепи.***

Во многих практически важных случаях приходится рассматривать сложные электрические цепи, содержащие несколько источников тока, точки разветвления цепи и несколько замкнутых контуров. Для расчета таких разветвлённых цепей используются ***правила Кирхгофа***, на основании которых составляется система уравнений. В результате решения этой системы уравнений можно найти силы тока для разветвлённой цепи любой сложности.

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в любой точке разветвления цепи (узле) равна нулю, суммирование производится по всем токам для данного узла цепи, причем входящие в узел токи берутся с одним знаком, а выходящие - с противоположным:

$$\sum_k (\pm) I_k = 0, \tag{11.11}$$

где I_k - некоторый входящий или выходящий ток для данного узла цепи.

Например, для узла C в схеме, показанной на рисунке 16, это правило имеет вид:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \qquad (11.12)$$

Данное правило Кирхгофа является условием стационарности токов. В противном случае потенциал рассматриваемого узла изменялся бы с течением времени, и это привело бы к изменению токов в цепи.

Второе правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на сопротивления этих участков равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре:

$$\sum_k (\pm) I_k R_k = \sum_m (\pm) \varepsilon_m . \qquad (11.13)$$

Здесь I_k и R_k - сила тока и сопротивление для некоторого участка замкнутой цепи, ε_m - значение э.д.с. в этой же цепи.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для замкнутой цепи. Направление обхода замкнутого контура и направление токов на всех участках цепи выбирают произвольным образом. Сила тока записывается со знаком "+", если его направление совпадает с направлением обхода замкнутого контура, и со знаком "-" в противоположном случае. Значение э.д.с. записывается со знаком "+", если при обходе замкнутого контура движение внутри источника осуществляется от его отрицательного полюса к положительному, то есть совпадает по направлению с внутренним током источника.

Для нахождения всех неизвестных токов необходимо решить систему независимых уравнений, в которой число уравнений должно быть равно числу неизвестных токов. В результате решения системы уравнений могут быть получены отрицательные значения силы тока. Это означает, что на рассматриваемом участке цепи реальный ток проходит в противоположном направлении относительно выбранного направления.

Например, в цепи, показанной на рисунке 16, можно выделить три замкнутых контура, для которых второе правило Кирхгофа имеет вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 r_2, \\ &\varepsilon_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_1 r_1, \\ &\varepsilon_2 = I_3 R_3 + I_2 r_2. \end{aligned} \qquad (11.14)$$

Здесь первое уравнение записано для контура $ABCD$, второе уравнение – для контура $ABEF$, третье уравнение – для контура $DCEF$. Данная система уравнений является линейно зависимой. Поэтому для вычисления неизвестных токов I_1, I_2, I_3 необходимо использовать любые два из этих трёх уравнений совместно с первым правилом Кирхгофа (11.12).

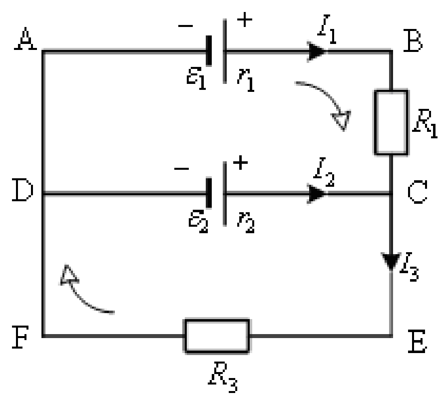


Рисунок 16 - Пример разветвлённой цепи постоянного тока

С помощью правил Кирхгофа можно рассчитать, например, э.д.с. и внутреннее сопротивление аккумуляторной батареи. Допустим, батарея состоит из нескольких источников постоянного напряжения, количество источников равно N, э.д.с. каждого источника равна ε, внутреннее сопротивление равно r, и источники соединены последовательно. Тогда общую э.д.с. и общее внутреннее сопротивление батареи можно вычислить следующим образом: $\varepsilon_{общ} = N\varepsilon,\ r_{общ} = Nr$. Если источники соединены в батарее параллельно, то $\varepsilon_{общ} = \varepsilon,\ r_{общ} = r/N$.

При прохождении электрического тока в цепи выделяется тепло. Этот процесс можно характеризовать с помощью понятия о ***тепловой мощности тока***

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \qquad (11.15)$$

где ΔQ - количество теплоты, выделяющееся на участке цепи за промежуток времени Δt.

Тепловое действие тока можно описать на основании ***закона Джоуля - Ленца***: тепловая мощность тока равна произведению силы тока I на электрическое напряжение U на этом участке:

$$P = IU. \qquad (11.16)$$

Используя закон Ома для участка цепи (10.10), выражение для тепловой мощности тока (11.16) можно представить в другой форме:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \qquad (11.17)$$

Для переменного тока тепловая мощность зависит от времени. Если ток изменяется сравнительно медленно, его называют квазистационарным. Условие квазистационарности будет сформулировано в разделе 30. В этом случае количество выделяющейся теплоты можно вычислить следующим образом:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt, \qquad (11.18)$$

где t_1 и t_2 - начальный и конечный моменты времени.

Для постоянного тока тепловая мощность не зависит от времени, и интеграл в выражении (11.18) следует заменить произведением мощности на длительность рассматриваемого промежутка времени.

Закон Джоуля – Ленца можно сформулировать также ***в дифференциальной форме.*** Для этого необходимо ввести в рассмотрение ***объёмную плотность тепловой мощности тока***, то есть количество теплоты, выделяемой в единицу времени в единичном объеме проводника

$$P_V = \frac{\Delta P}{\Delta V}, \qquad (11.19)$$

где ΔP - тепловая мощность, развиваемая током в физически малом объёме проводника ΔV.

Используя соотношение (11.16) и (11.19), получаем локальную формулировку закона Джоуля – Ленца:

$$P_V = jE. \qquad (11.20)$$

Учитывая закон Ома (10.11), закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме можно записать также следующим образом

$$P_V = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \qquad (11.21)$$

Для выяснения физического смысла формулы (11.20) введём в рассмотрение объёмную плотность силы, действующей со стороны электрического поля на свободные заряды

$$\vec{f}_V = qN\vec{E} = \rho\vec{E}\,, \tag{11.22}$$

где q - заряд свободной частицы;

N - концентрация свободных частиц;

$\rho = qN$ - объемная плотность электрического заряда свободных частиц.

Используя соотношения (10.2) и (11.22), формулу (11.20) можно записать в виде

$$P_V = f_V \langle v \rangle\,, \tag{11.23}$$

где $\langle v \rangle$ - средняя скорость упорядоченного движения заряженных частиц.

Согласно закону Джоуля - Ленца в дифференциальной форме (11.23), теплота, выделяющаяся в любом физически малом объеме проводника, равна работе электрического поля, совершаемой при направленном перемещении носителей тока в этом объёме.

Из закона сохранения энергии и соотношения (11.1) следует, что количество теплоты, выделяющееся в замкнутой цепи при прохождении заряда Δq, равно

$$\Delta Q = \varepsilon \Delta q\,. \tag{11.24}$$

Тогда для полной цепи, содержащей источник тока, тепловая мощность тока равна

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = I\varepsilon\,. \tag{11.25}$$

Используя формулу (11.9), получаем, что эта мощность складывается из двух составляющих: мощности, развиваемой током на участках цепи, внешних по отношению к источнику тока, и мощности, развиваемой током на самом источнике, то есть

$$P = I^2R + I^2r\,. \tag{11.26}$$

Выделение тепла при прохождении тока в замкнутой цепи свидетельствует, что э.д.с. не может иметь электростатическую природу в связи с потенциальностью электростатического поля. При перемещении зарядов по замкнутому контуру электростатическое поле не совершает работу; в то же время при прохождении тока в реальной цепи выделяется тепло за счет э.д.с.

В случае рассмотрения ***неоднородного участка цепи***, содержащего источник тока (см. рис.15), необходимо ***различать тепловую мощность тока и мощность электростатических сил.***

Мощность, развиваемая электростатическим полем на неоднородном участке цепи, в соответствии с формулами (3.7) и (10.3), равна

$$P_{эл}(r) = I(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \tag{11.27}$$

где r - внутреннее сопротивление источника тока.

Как было показано выше, выполняется неравенство $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$, поэтому мощность электростатических сил (11.27) на неоднородном участке цепи является отрицательной величиной: $P_{эл}(r) < 0$. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что носители тока движутся внутри источника противоположно электростатическим силам благодаря действию сторонних сил.

Используя закон Ома для неоднородного участка цепи (11.8), получаем

$$P_{эл}(r) = I^2 r - I\varepsilon\,. \tag{11.28}$$

Здесь положительное слагаемое в правой части описывает тепловую мощность тока, отрицательное слагаемое характеризует мощность, развиваемую электростатическими силами при их противодействии сторонним силам.

Постоянный ток может существовать только в замкнутой цепи. Поэтому, применяя закон Ома для полной цепи (11.9), соотношение (11.28) можно записать в виде

$$P_{эл}(r) = -I^2 R\,, \tag{11.29}$$

где R - сопротивление участка цепи, внешнего по отношению к источнику тока.

Внешний участок цепи является однородным, для него разность потенциалов равна напряжению. Поэтому мощность, развиваемая электростатическим полем на внешнем участке цепи, равна

$$P_{эл}(R) = I^2 R\,. \tag{11.30}$$

Из формул (11.29) и (11.30) следует, что

$$P_{эл}(r) + P_{эл}(R) = 0\,. \tag{11.31}$$

Мы пришли к уже известному нам заключению, что мощность, развиваемая электростатическим полем во всей замкнутой цепи, равна нулю. Такой вывод можно сделать также из потенциальности электростатического поля, которое не совершает работы при перемещении заряда по любому замкнутому контуру.

Сторонние силы действуют только внутри источника тока, поэтому на основании формул (11.25) и (11.31) можно записать

$$P_{cm} = P_{cm}(r) = I\varepsilon\,, \tag{11.32}$$

где P_{cm} - полная мощность, развиваемая сторонними силами во всей цепи;

$P_{cm}(r)$ - мощность, развиваемая сторонними силами внутри источника тока.

Согласно формуле (11.32), работа, совершаемая сторонними силами при перемещении носителей заряда внутри источника тока, равна количеству теплоты, выделяемой при прохождении тока во всей цепи. Это соответствует закону сохранения энергии.