30 УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Ток смещения. Физический смысл уравнений Максвелла. ***Система уравнений Максвелла*** является обобщением уравнений электро- и магнитостатики, она основана на анализе экспериментальных фактов и имеет следующий вид:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{30.1}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{30.2}$$

$$div\vec{B} = 0, \tag{30.3}$$

$$div\vec{D} = \rho, \tag{30.4}$$

где все уравнения записаны в дифференциальной форме;

$\vec{j}$ - плотность свободных токов;

ρ - объёмная плотность свободных зарядов.

Уравнение (30.1) показывает, что магнитное поле порождается как электрическими токами, так и изменяющимся во времени электрическим полем ***(токами смещения)***. Уравнение (30.1) ***называется законом полного тока в обобщённом виде.***

Слагаемое в правой части уравнения (30.1)

$$\vec{j}_{см.} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{30.5}$$

называется ***объёмной плотностью тока смещения.***

Производная вектора смещения (30.5), как и объёмная плотность тока проводимости, имеет размерность $\text{А}/\text{м}^2$. Опыт показывает, что ток смещения, как и ток проводимости, является причиной возникновения магнитного поля. Это обстоятельство даёт основание называть производную вектора индукции (30.5) «плотностью тока».

Уравнение (30.2) выражает ***закон электромагнитной индукции Фарадея*** и утверждает, что электрическое поле создаётся изменяющимся во времени магнитным полем. Это электрическое поле называется индукционным и является вихревым. Знак минус в уравнении (30.2) позволяет определить направление индукционного поля в соответствии с правилом Ленца.

Уравнение (30.3) свидетельствует об отсутствии в природе магнитных зарядов и отражает ***вихревой характер магнитного поля***.

Уравнение (30.4) показывает, что электрическое поле порождается также электрическими зарядами (а не только изменяющимся во времени магнитным полем) и выражает ***закон Кулона*** в дифференциальной форме. Это электрическое поле, в отличие от вихревого индукционного поля, является потенциальным.

Из уравнений Максвелла следует, что изменяющееся с течением времени электрическое поле создает магнитное поле. Аналогично изменение во времени магнитного поля приводит к возникновению электрического поля. Таким образом, электрическое и магнитное поля взаимно превращаются и являются неразрывно связанными друг с другом. Таким образом, возникает ***электромагнитное поле,*** содержащее в общем случае и электрическое, и магнитное поля.

Материальные уравнения. Уравнения Максвелла называются полевыми и характеризуют прежде всего свойства электромагнитного поля. Для описания свойств поля в некоторой среде необходимо уравнения Максвелла дополнить ***материальными уравнениями (или уравнениями связи)***, которые в простейшем случае имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \ \vec{j} = \sigma\vec{E}\ , \qquad (30.6)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ и $\mu = \mu_0\mu_r$ - диэлектрическая и магнитная проницаемость; σ - проводимость среды.

Третье соотношение в (30.6) является ***законом Ома*** в дифференциальной форме.

Чтобы найти электромагнитное поле в конкретном случае, например, в кристалле, волноводе, внутри либо снаружи любого искусственного устройства или естественного объекта, необходимо решить уравнения Максвелла совместно с материальными уравнениями и учесть граничные условия для векторов электрического и магнитного поля (см. разделы 6 и 23). Полученное таким способом решение уравнений Максвелла является единственным и описывает поле в рассматриваемом случае.

Электромагнитные волны. Из уравнений Максвелла следует возможность существования ***электромагнитных волн***, то есть переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Распространение электромагнитных волн в вакууме является прямым экспериментальным подтверждением существования тока смещения (30.5). В вакууме отсутствует вещество и отдельные заряжённые частицы, поэтому магнитное поле не может создаваться токами проводимости. Однако в электромагнитной волне присутствуют как электрическое, так и магнитное поле, эти поля взаимно преобразуются, что обеспечивает распространение волны в пространстве. Отсюда можно сделать вывод, что причиной возникновения магнитного поля в вакууме является переменное электрическое поле, то есть ток смещения.

Чтобы описать распространение электромагнитного поля в вакууме в отсутствие зарядов и токов, необходимо использовать уравнения Максвелла и материальные уравнения при следующих условиях: $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Тогда можно получить уравнение для вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{30.7}$$

Такому же уравнению удовлетворяет и вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$. Из этих уравнений следует, что если векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются с течением времени, то они обязательно изменяются и в пространстве. Уравнение (30.7) является типичным примером ***волнового уравнения***, и любая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну. Чтобы найти скорость этой волны, необходимо извлечь квадратный корень из величины, обратной коэффициенту при второй производной по времени. Значит, уравнение (30.7) и аналогичное уравнение для вектора $\vec{H}$ указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, скорость которых определяется формулой (18.11).

На основании сформулированной им системы уравнений Максвелл создал ***электромагнитную теорию света***, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны. Данная теория получила в дальнейшем полное подтверждение.

<u>Свойства электромагнитных волн</u>. Волновое уравнение, аналогичное уравнению (30.7), можно получить также для электромагнитного поля в однородной изотропной среде в отсутствие свободных зарядов и токов. Из этого уравнения следует, что ***скорость электромагнитных волн*** в такой среде равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \tag{30.8}$$

где ε_r и μ_r - относительная диэлектрическая и относительная магнитная проницаемости среды.

Основные свойства электромагнитных волн можно наглядно изучить на примере ***плоской монохроматической волны,*** для которой векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от одной координаты и от времени. Выбрав ось z вдоль направления распространения плоской волны, можно записать:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kz), \tag{30.9}$$

где $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ - постоянные, называемые амплитудами волн;

величина k называется ***волновым числом***;

ω - циклическая частота волны;

$\varphi = \omega t - kz$ - фаза волны.

Если выбрать постоянную координату z, то из формул (30.9) следуют синусоидальные функции времени, описывающие гармонические колебания с циклической частотой ω. С другой стороны, для фиксированного момента времени t получаем синусоидальное изменение электромагнитного поля в пространстве.

Рассматривая перемещение в пространстве произвольно выбранной точки волны, которой соответствует некоторое постоянное значение фазы φ, например, максимума волны, можно определить скорость распространения волны. Из формул (30.9) следует, что скорость волны равна

$$v = \frac{\omega}{k}. \tag{30.10}$$

Используя соотношения (30.8) и (30.10), получаем выражение для волнового числа

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}. \tag{30.11}$$

Расстояние между двумя точками, в которых колебания отличаются по фазе на 2π, например, между соседними максимумами, называется ***длиной волны*** λ**.** Она равна расстоянию, на которое распространяется волна за время одного периода колебаний T, следовательно, справедливы соотношения

$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{k}. \tag{30.12}$$

Длина волны равна периоду изменения электромагнитного поля (30.9) в пространстве.

Поверхность, во всех точках которой фаза колебаний одинакова, называется ***фронтом волны***. Для электромагнитной волны (30.9) фронт представляет собой плоскость, перпендикулярную оси z. Введя в рассмотрение единичный вектор $\vec{n}$, ортогональный волновому фронту и направленный в сторону распространения волны, можно определить ***волновой вектор***,

$$\vec{k} = k\vec{n}, \qquad (30.13)$$

модуль которого равен волновому числу.

С целью упрощения математических преобразований, например, при вычислении ротора и дивергенции поля, векторы напряжённости электрического и магнитного полей (30.9) можно записать в комплексной форме

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \qquad (30.14)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый в произвольную точку пространства, в которой рассматриваются электромагнитные колебания.

Значения напряжённости электрического и магнитного полей (30.9) можно получить, выделяя только действительные части в выражениях (30.14). Подобным образом мы уже поступали в разделе 28 при изучении переменного тока.

Аналогично (30.14), можно представить в комплексном виде также векторы индукции $\vec{D}$ и $\vec{B}$. Дифференцируя поля по пространственным координатам и по времени, получаем:

$$rot\vec{E} = \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right] = -i\left[\vec{k}\vec{E}\right], \quad div\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B} = -i\vec{k}\vec{B}, \quad \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = i\omega\vec{D}. \qquad (30.15)$$

Используя соотношения (30.15), уравнения Максвелла (30.1) – (30.4) для плоских монохроматических волн в отсутствие свободных токов и зарядов можно записать в виде

$$\left[\vec{k}\vec{E}\right] = \omega\vec{B}, \quad \left[\vec{k}\vec{H}\right] = -\omega\vec{D}, \qquad (30.16)$$

$$\vec{k}\vec{B} = 0, \quad \vec{k}\vec{D} = 0. \qquad (30.17)$$

Из формул (30.16) следует, что векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ (а также векторы $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$) ***взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему***.

На основании соотношений (30.16) можно также сделать вывод, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (а также $\vec{D}$ и $\vec{H}$) всегда имеют ***одинаковые фазы колебаний.***

Формулы (30.16) можно записать в скалярном виде с учётом соотношения (30.10):

$$E = vB, \quad H = vD. \qquad (30.18)$$

Используя материальные уравнения (30.6) и перемножая выражения (30.18), получаем следующее соотношение для электромагнитного поля в однородной изотропной среде в отсутствие свободных зарядов и токов:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \mu_0 \mu_r H^2 . \tag{30.19}$$

Для такой среды векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ являются взаимно перпендикулярными и образуют правовинтовую систему (см. рис.58).

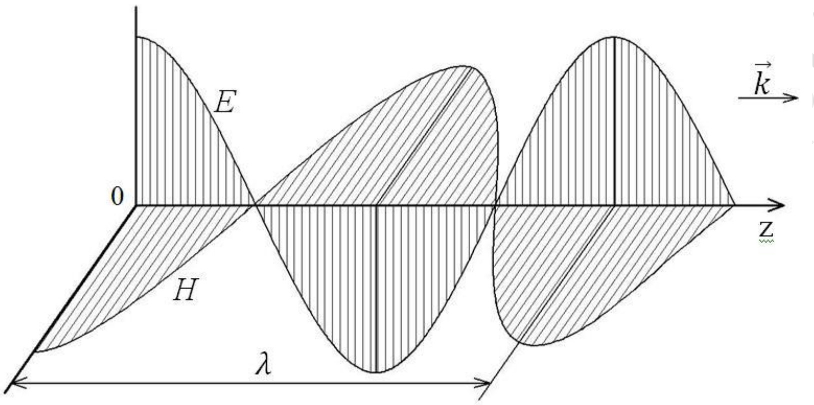

Рисунок 58 – Распределение электрического и магнитного полей в плоской монохроматической волне

Формула (30.19) справедлива для полей, рассматриваемых в произвольный момент времени, она верна и для амплитуд полей.

Для волны, распространяющейся в вакууме, на основании соотношения (30.19) можем записать:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377(\text{Ом}), \tag{30.20}$$

где величина $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$, измеряемая в омах, называется ***волновым импедансом свободного пространства.***

31 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как следует из уравнений Максвелла, электромагнитное поле состоит из электрического и магнитного полей, которые неразрывно связаны и способны превращаться друг в друга. Поскольку электромагнитное поле является материальным объектом, оно обладает энергией. Можно доказать, что формулы (9.9) и (27.8), полученные в электро- и магнитостатике, остаются справедливыми и для переменных полей. Поэтому формулу для объёмной плотности энергии электромагнитного поля можно получить путём сложения плотности энергии электрического и магнитного полей (9.9) и (27.8):

$$w = w_{эл.} + w_{м.}. \tag{31.1}$$

Объёмная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}\right). \tag{31.2}$$

Используя уравнения связи (30.6), получаем:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2). \tag{31.3}$$

Для плоской электромагнитной волны выполняется соотношение (30.19). Следовательно, объёмные плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени одинаковы: $w_{эл.} = w_{м.}$.

При распространении электромагнитной волны имеет место перенос энергии в пространстве, характеризуемый ***вектором Умова – Пойнтинга***

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right], \tag{31.4}$$

ориентация которого совпадает с направлением переноса энергии. Модуль вектора Умова - Пойнтинга численно равен энергии электромагнитного поля, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии. Поэтому вектор Умова - Пойнтинга называется ***вектором плотности потока энергии***. Для однородной изотропной среды в отсутствие свободных зарядов и токов векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ являются взаимно перпендикулярными и образуют правовинтовую систему. Поэтому для такой среды вектор Умова – Пойнтинга совпадает по направлению с волновым вектором $\vec{k}$.

Используя выражения (30.18) и (30.19), можно показать, что модуль вектора Умова – Пойнтинга связан с объёмной плотностью энергии электромагнитного поля соотношением

$$S = EH = wv, \tag{31.5}$$

где v - скорость распространения волны.

Электромагнитное поле может совершать работу по перемещению заряжённых частиц в пространстве. Объемная плотность мощности, то есть работа, совершаемая полем в единицу времени в единичном объеме пространства, равна

$$Q = \vec{E}\vec{j}, \tag{31.6}$$

где $\vec{j}$ - плотность тока.

Используя выражения (31.2), (31.4), (31.6), можно получить ***закон сохранения энергии электромагнитного поля***

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint\limits_{(\Sigma)} \vec{S}d\vec{\sigma} - P, \tag{31.7}$$

где

$$W = \int\limits_{(V)} wdV \tag{31.8}$$

- полная энергия электромагнитного поля в пределах области (V);

$$P = \int\limits_{(V)} QdV \tag{31.9}$$

- полная мощность, развиваемая полем при перемещении заряжённых частиц в области (V).

Первое слагаемое в правой части соотношения (31.7) описывает полный поток энергии через поверхность (Σ), ограничивающую область (V). Закон сохранения энергии (31.7) показывает, что энергия электромагнитного поля в любой области (V) может измениться либо в результате переноса энергии через границу области, либо в результате совершения полем работы при перемещении заряжённых частиц в этой области. Знаки минус в правой части соотношения (31.7) показывают, что при переносе энергии наружу через границу области, а также при ускорении зарядов полем энергия электромагнитного поля в области (V) уменьшается.

Закон сохранения энергии электромагнитного поля можно записать также в дифференциальной форме

$$div\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -Q\,. \qquad (31.10)$$

Формула (31.10) справедлива для любого физически малого объема пространства, то есть она представлена в локальном виде.

32 ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Изучение электромагнитных явлений сыграло важную роль при возникновении и обосновании специальной или частной теорий относительности, созданной в 1904-1907 гг. Г.Лоренцем, А.Пуанкаре, А.Эйнштейном и Г.Минковским. В 1905 г. А.Эйнштейн сформулировал ***основные постулаты (то есть исходные положения) специальной теории относительности***, согласно которым «... не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя... Для всех систем координат, в которых выполняются уравнения механики, должны быть справедливы те же самые законы электродинамики и оптики. В пустоте свет всегда распространяется с определенной скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела». Таким образом:

1) физические законы не зависят от выбора инерциальных систем отсчёта, поэтому все явления природы происходят одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета;

2) скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета, то есть не зависит от скорости движения источника и приемника света.

Первому постулату предшествовал механический принцип относительности Галилея, согласно которому законы механики одинаковы для всех инерциальных систем отсчета. Поэтому все механические процессы и явления происходят одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета. В конце XIX - начале XX столетий было установлено, что принцип относительности справедлив не только для механических, но и для всех других явлений природы: тепловых, электромагнитных, химических, биологических. Такое обобщенное понимание принципа относительности и позволило сформулировать первый постулат теорий относительности. При этом важную роль сыграло рассмотрение электромагнитных явлений.

Второй постулат теории относительности также непосредственно касается электромагнетизма, поскольку свет представляет собой электромагнитные волны, то есть колебания электромагнитного поля. Скорость света в вакууме равна $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с и является фундаментальной физической постоянной. В международной системе единиц СИ скорость света удовлетворяет соотношению (18.11). Величины, входящие в формулу (18.11), относятся к фундаментальным физическим константам и характеризуют свойства вакуума. Отметим, что электрическая постоянная и магнитная постоянная входят в соотношение (18.11) симметричным образом. Скорость света рассматривается в физике как максимально возможная скорость передачи материального воздействия тел на другие тела.

Из теории относительности следует, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой векторы электромагнитного поля преобразуются по следующему закону:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (32.1)$$

Здесь $\beta = \frac{v}{c}$, штрихованные величины относятся к системе K', движущейся относительно системы K со скоростью $\vec{v}$, причем вектор $\vec{v}$ направлен вдоль оси OX (рисунок 47).

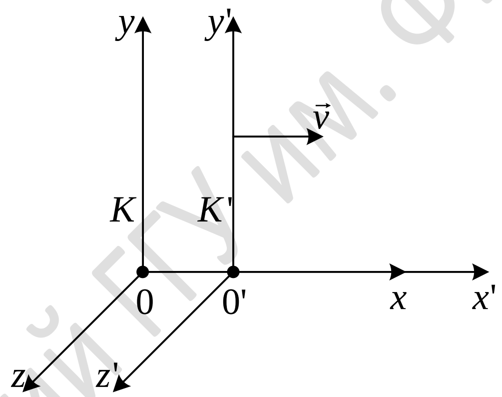

Рисунок 59 - Относительное движение систем отсчёта K и K'

Формулы (32.1) можно представить также в векторном виде:

$$\vec{E}_{пар} = \vec{E}'_{пар}, \qquad \vec{B}_{пар} = \vec{B}'_{пар},$$

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp - [\vec{v}\vec{B}']}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \vec{B}_\perp = \frac{\vec{B}'_\perp + [\vec{v}\vec{E}']/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (32.2)$$

где индексами *пар* и $\perp$ обозначены компоненты полей, параллельные и перпендикулярные к вектору $\vec{v}$.

Уравнения (32.1) или (32.2) показывают, что каждый из векторов $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ зависит как от $\vec{E}$, так и от $\vec{B}$. Эта взаимосвязь доказывает единую природу электрического и магнитного полей. Каждое из них в отдельности не имеет абсолютного смысла: об электрическом и магнитном полях можно говорить только с обязательным указанием системы отсчёта, в которой эти поля рассматриваются.

Ранее вывод о неразрывности электрического и магнитного полей был сделан на основании уравнений Максвелла (30.1) – (30.4). Эти поля вместе образуют физический объект, который мы называем электромагнитным полем. Теперь мы видим, что такой же вывод можно сделать в рамках специальной теории относительности, в частности, на основании законов преобразования полей (32.1).

Из формул преобразования полей (32.1) следует, что магнетизм имеет релятивистскую природу. Пусть в системе K' заряжённые частицы покоятся, тогда $\vec{B}'=0$, $\vec{E}'\neq 0$, то есть эти частицы создают только электрическое поле в системе K'. В соответствии с формулами преобразования полей (32.1) получаем $\vec{B}\neq 0$, $\vec{E}\neq 0$, то есть наблюдатель, находящийся в системе K, зарегистрирует магнитное поле движущихся заряжённых частиц. Таким образом, магнетизм имеет релятивистскую природу, то есть причина существования магнитного поля - относительное движение заряжённых частиц и наблюдателя. Релятивистская природа магнетизма является следствием отсутствия в природе магнитных зарядов.

Согласно (32.1), векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, характеризующие электромагнитное поле, зависят от системы отсчёта. В то же время существуют ***инварианты электромагнитного поля***, то есть количественные характеристики поля, которые не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой:

$$Inv_1=\vec{E}\vec{B}, \qquad Inv_2=E^2-c^2B^2. \tag{32.3}$$

Независимость этих величин от системы отсчёта следует из формул преобразования полей (32.1).

33 СКИН–ЭФФЕКТ

Постоянный ток, проходящий внутри цилиндрического проводника с постоянным сечением, распределён равномерно в пределах поперечного сечения проводника, то есть плотность тока является постоянной величиной. У переменного тока происходит перераспределение плотности тока по поперечному сечению проводника. В результате ток сосредоточивается преимущественно в поверхностном слое проводника. Можно показать, что причиной скин-эффекта является возникновение вихревого электрического поля электромагнитной индукции. ***Скин–эффект*** можно качественно характеризовать как концентрацию переменного тока вблизи поверхности проводника.

Можно ввести в рассмотрение ***толщину скин-слоя*** как расстояние от поверхности проводника до точки внутри проводника, в которой плотность тока уменьшилась в e раз по сравнению с током на поверхности проводника. Если толщина скин-слоя значительно уступает размерам сечения проводника, то она удовлетворяет приближённому соотношению

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}}, \qquad (35.1)$$

где Δ - толщина скин–слоя;

μ_0 - магнитная постоянная;

μ_r - относительная магнитная проницаемость вещества;

σ - удельная проводимость вещества;

ω - циклическая частота переменного тока.

Например, для тока с циклической частотой $\omega = 10^6 \text{рад/с}$, проходящего в медном проводнике, толщина скин–слоя равна $0{,}4\text{мм}$. Для тока с частотой $\nu = 50\text{Гц}$ скин–эффект проявляется очень слабо.

По мере увеличения частоты тока площадь эффективного сечения проводника уменьшается. Используя формулу (10.11), можно показать, что из-за скин-эффекта ***электрическое сопротивление проводника*** возрастает с увеличением частоты тока.

При возрастании частоты тока энергия магнитного поля, создаваемого током, уменьшается. Так происходит потому, что внутри проводника магнитное поле ослабло, ведь ток сосредоточился, в основном, вблизи поверхности проводника. При этом снаружи проводника магнитное поле не изменилось, поскольку во внешнем пространстве магнитное поле определяется полным током в проводнике и не зависит от распределения тока внутри проводника. С помощью формулы (27.4) можно показать, что по причине скин-эффекта ***индуктивность проводника*** уменьшается при увеличении частоты тока.

34 ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Напряжённость электрического поля точечного заряда можно определить с помощью закона Кулона (1.6). В общем случае, при непрерывном распределении заряда в пространстве, на основе (1.6) можно получить формулу

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \frac{\rho\vec{r}}{r^3} dV, \tag{34.1}$$

где ρ - объёмная плотность электрического заряда в произвольной области пространства (dV),

$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый от элементарного заряда $dq = \rho dV$ в точку наблюдения, в которой вычисляется электрическое поле,

(V) - область, в которой распределён электрический заряд.

Формула (34.1) применима в произвольном случае, и при вычислении напряжённости могут быть использованы как аналитические, так и численные методы интегрирования.

Особый интерес представляют ***случаи симметричного распределения заряда в пространстве***. Расположение зарядов может иметь, например, сферическую, аксиальную или планарную симметрию. В этих случаях напряжённость электрического поля можно вычислить с помощью электростатической теоремы Гаусса (2.2).

В качестве примера рассмотрим шар радиуса R, заряжённый однородно с объёмной плотностью заряда ρ (рисунок 60).

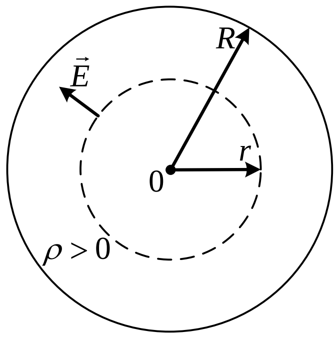

Рисунок 60 - Электрическое поле внутри однородно заряжённого шара радиуса R (заряд шара положительный)

Поместим начало координат в центр шара и введём в рассмотрение вспомогательную сферическую поверхность (S), имеющую радиус r. Этот радиус r равен расстоянию от центра шара до точки наблюдения, которая может находиться как внутри шара, так и снаружи его. Картина электрического поля также имеет сферическую симметрию, и силовые линии направлены радиальным образом относительно центра шара. Поток напряжённости электростатического поля через вспомогательную поверхность (S) равен

$$N = \pm 4\pi r^2 E\,. \tag{34.2}$$

Здесь знак плюс соответствует случаю, когда шар заряжен положительно, и силовые линии направлены от центра шара, совпадая по направлению с вектором нормали к вспомогательной сфере, направленной наружу. Если шар имеет отрицательный заряд, то силовые линии направлены к его центру, образуя угол π с вектором нормали к вспомогательной сфере. В этом случае поток (34.2) является отрицательным.

При вычислении потока (34.2) учтено, что модуль вектора напряжённости электростатического поля E является одинаковым на всей вспомогательной сферической поверхности в силу симметричности распределения зарядов.

Если точка наблюдения находится внутри шара, то $r \le R$, и внутри вспомогательной сферы сосредоточен заряд

$$Q = \frac{4}{3}\rho\pi r^3. \tag{34.3}$$

Подставляя выражения (34.2) и (34.3) в электростатическую теорему Гаусса (2.2), получаем выражение для модуля напряжённости поля

$$E(r) = \pm\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,. \tag{34.4}$$

Здесь знак «плюс» выбирается при условии $\rho > 0$, знак «минус» - в противоположном случае.

Формула (34.4) показывает, что напряжённость электростатического поля возрастает прямо пропорционально расстоянию от центра шара, пока точка наблюдения находится внутри шара.

Во внешнем пространстве, при $r > R$, симметрия электростатического поля остаётся сферической, поэтому формула (34.2) является по-прежнему применимой. В этом случае внутри вспомогательной сферы находится весь электрический заряд шара

$$Q = \frac{4}{3}\rho\pi R^3\,. \tag{34.5}$$

Используя электростатическую теорему Гаусса (2.2) и выражения (34.2) и (34.5), получаем:

$$E(r) = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \tag{34.6}$$

где E - модуль напряжённости электростатического поля, правило выбора знаков остаётся таким же, как и в соотношении (34.4).

Из соотношения (34.6) следует, что снаружи шара напряжённость электростатического поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шара. Значит, во внешнем пространстве напряжённость поля шара имеет такую же зависимость от расстояния, как и в случае точечного заряда.

Применяя аналогичную методику, с помощью электростатической теоремы Гаусса можно вычислить поля плоскости, плоского слоя, нити, цилиндра и полой сферы, если эти тела заряжены однородно, то есть если плотность заряда не изменяется в пространстве.

Что касается ***магнитных полей***, то их силовая характеристика – индукция – может быть вычислена с помощью закона Био – Савара (18.8). Для произвольных токов из формулы (18.7) можно получить соотношение

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{(V)}\frac{\left[\vec{j}\vec{r}\right]}{r^3}dV, \tag{34.7}$$

где $\vec{j}$ - плотность электрического тока в произвольной области пространства (dV);

$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый от области (dV) в точку наблюдения, в которой вычисляется индукция магнитного поля;

(V) - область, в которой проходит электрический ток.

Если ток является линейным, то есть существует в тонком проводнике, то индукция магнитного поля равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{(L)}\frac{\left[Id\vec{l}\,\vec{r}\right]}{r^3}, \tag{34.8}$$

где I - сила электрического тока;

$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый от элемента контура $(d\vec{l})$ в точку наблюдения, в которой вычисляется индукция магнитного поля;

(L) - контур, в котором существует электрический ток.

Большое значение для практики имеют ***случаи симметричного распределения электрического тока в пространстве***. Симметрия прохождения токов может быть, например, сферической, аксиальной или планарной. В этих случаях индукция магнитного поля может быть вычислена с помощью закона полного тока (19.1).

Для примера определим магнитное поле бесконечно длинного цилиндра с круговым сечением радиуса R, внутри которого проходит однородный ток с плотностью $\vec{j}$ (рисунок 61).

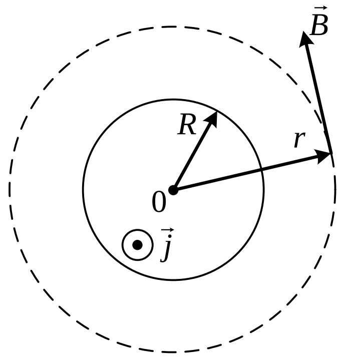

Рисунок 61 - Магнитное поле снаружи бесконечно длинного цилиндра радиуса R (постоянный ток внутри цилиндра направлен к наблюдателю)

Точка наблюдения, в которой необходимо вычислить поле, может находиться либо внутри цилиндра с током, либо снаружи его. Проведём через точку наблюдения вспомогательный контур (L), симметрия которого соответствует симметрии распределения тока. В данном случае таким контуром является окружность радиуса r, центр которой лежит на оси цилиндра. Радиус окружности r равен расстоянию от оси цилиндра до точки наблюдения. Поскольку распределение тока имеет аксиальную симметрию, линии индукции магнитного поля имеют вид концентрических окружностей, центр которых лежит на оси проводника. Циркуляция вектора индукции магнитного поля по вспомогательной окружности равна

$$C = 2\pi r B, \qquad (34.9)$$

где направление обхода вспомогательного контура образует с направлением тока в проводнике правовинтовую систему.

При вычислении циркуляции (34.9) принято во внимание, что модуль вектора индукции магнитного поля B является одинаковым на всей вспомогательной окружности по причине симметричности распределения тока в цилиндрическом проводнике.

Для точки наблюдения, лежащей внутри цилиндра, выполняется неравенство $r \le R$, и вспомогательная окружность охватывает ток

$$I = \pi r^2 j\,. \tag{34.10}$$

Используя закон полного тока (19.1) и выражения (34.9) и (34.10), получаем

$$B = \frac{\mu_0 r j}{2}\,. \tag{34.11}$$

Формула (34.11) показывает, что индукция магнитного поля связана линейной зависимостью с расстоянием от центра проводника, пока точка наблюдения находится внутри проводника.

Во внешней области относительно цилиндра, при $r > R$, магнитное поле сохраняет осевую симметрию, поэтому формула (34.9) остаётся попрежнему верной. В этом случае внутри вспомогательной окружности проходит весь электрический ток

$$I = \pi R^2 j\,. \tag{34.12}$$

Подставляя выражения (34.9) и (34.12) в закон полного тока (19.1), получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,. \tag{34.13}$$

Из выражения (34.13) следует, что снаружи цилиндрического проводника индукция магнитного поля имеет обратную зависимость от расстояния до оси цилиндра. Значит, во внешней области индукция поля цилиндра имеет такую же зависимость от расстояния, как и в случае линейного тока, то есть очень тонкого проводника (формула 18.5).

Действуя аналогичным образом, с помощью закона полного тока можно определить также магнитные поля в других симметричных случаях, например, для однородного тока, проходящего по плоской поверхности, внутри плоского слоя, по нити и внутри стенок полого цилиндра. Можно вычислить также магнитное поле внутри тороида. Во всех случаях необходимым условием является постоянство плотности тока в пространстве.

35 КИРАЛЬНЫЕ СРЕДЫ. МЕТАМАТЕРИАЛЫ[1]

Уравнения Максвелла являются универсальными, они применимы для электромагнитных полей в любых средах. В то же время материальные уравнения могут изменяться в зависимости от рассматриваемого вещества. Например, существуют так называемые ***киральные среды,*** молекулы которых не являются зеркально симметричными. Простейшей моделью киральной молекулы является спиралевидная цепочка атомов. Для киральных веществ материальные уравнения отличаются от обычных уравнений (30.6) и имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \alpha \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad (35.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad (35.2)$$

где α - параметр киральности вещества, не имеющий размерности в системе СИ.

Уравнения (35.1) и (35.2) показывают, что в киральных средах возможны магнитоэлектрические явления, то есть переменное магнитное поле может индуцировать в молекулах вещества электрические дипольные моменты. В свою очередь переменное электрическое поле способно создавать в молекулах вещества магнитные моменты. Чтобы понять возможность возникновения магнитоэлектрических эффектов, достаточно рассмотреть движение электронов в молекулах по спиральным траекториям. Любое колебание электрона вблизи положения равновесия приводит не только к смещению электрического заряда, но и к возникновению кругового тока, поскольку электрон движется по спирали. Следовательно, в киральных молекулах электрические дипольные моменты неразрывно связаны с магнитными моментами.

Основным свойством киральных сред является способность поворачивать плоскость поляризации электромагнитной волны, это явление рассматривается при изучении оптики.

С помощью современных технологий можно создать искусственные материалы с особыми электромагнитными свойствами, или ***метаматериалы***. Этот термин возник в начале 21 столетия и происходит от греческого слова $\mu\varepsilon\tau\alpha$, что означает «вне, выше, за пределами». Такое название объясняется тем обстоятельством, что свойства метаматериалов нельзя получить при использовании обыкновенных материалов.

[1] Данный раздел содержит материал повышенной сложности и предназначен для факультативного изучения.

В обычных материалах мы не можем изменять свойства отдельных атомов и расстояния между ними. Новые возможности открываются в метаматериалах, где элементами структуры являются микрорезонаторы. Мы можем изменять форму и размеры элементов, а также расстояние между ними, и тем самым управлять свойствами метаматериала. При этом должно выполняться соотношение $d < \lambda$, где d - характерный период расположения элементов, λ - длина волны электромагнитного поля.

Элементами метаматериалов могут быть, например, проводники спиральной или Ω- образной формы. Особый интерес вызывают к себе спирали, имеющие, в рамках электродинамики, оптимальную форму. В этом случае для искусственного материала выполняются соотношения:

$$\varepsilon_r = \mu_r, \tag{35.3}$$

$$\varepsilon_r = 1 \pm \alpha, \tag{35.4}$$

где «плюс» соответствует правовинтовым спиралям, «минус» - левовинтовым спиралям.

Формула (35.3) означает, что метаматериал обладает одинаково значимыми диэлектрическими и магнитными свойствами.

При создании метаматериалов могут быть использованы также ***резонаторы на основе расщеплённых колец*** (*split ring resonators*). Принципиальная схема такого резонатора показана на рисунке 62 (патент США «Left handed composite media: United States Patent, US 6,791,432 B2 / D. Smith, S. Schultz, N. Kroll, R.A. Shelby.- Sep. 14, 2004»).

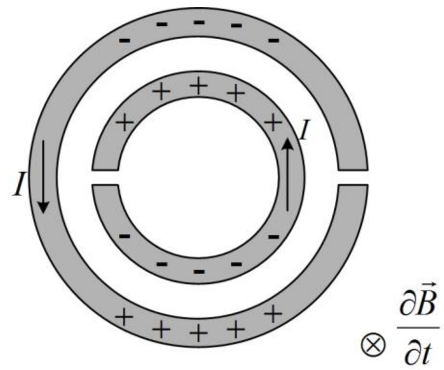

Рисунок 62 - Резонатор на основе расщеплённых колец

Допустим, что индукция внешнего магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости резонатора, от наблюдателя, и возрастает в данный момент времени. В соответствии с законом Фарадея, в каждом кольце возникает э.д.с. индукции, которая приводит к образованию индукционного тока. В результате в каждом кольце создаётся неоднородное распределение электрического заряда, пример которого показан на рисунке 62. В узком зазоре между кольцами образуется сильное электрическое поле. Благодаря близкому расположению колец резонатор может обладать значительной электроёмкостью. Ток смещения (30.5), возникающий в зазоре между кольцами, обеспечивает взаимодействие колец резонатора. Наиболее сильный ток в кольцах активируется при условии, что длина волны воздействующего электромагнитного поля λ_0 удовлетворяет приближённому соотношению

$$2\pi(R_1 + R_2) \approx \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (35.5)$$

где R_1 и R_2 - расстояния от оси резонатора до середины каждого кольца;

λ_0 - резонансная длина волны электромагнитного поля, связанная с резонансной частотой ω_0 (28.26) формулой (28.9).

Соотношение (35.5) показывает, что сила тока в кольцах максимальна, если суммарная длина двух колец приблизительна равна половине длины волны электромагнитного поля. Можно сказать, что токи проводимости в кольцах замыкаются током смещения, существующем в зазоре, и фактически образуют единый ток. Поэтому изменение электрического тока в резонаторе в целом аналогично механическим колебаниям струны, закреплённой на концах. Если на струне укладывается половина длины волны, то возбуждается главная мода колебаний, и звучит основной тон струны.

Из формулы (35.5) следует, что длина волны электромагнитного поля вблизи резонанса значительно превышает диаметр резонатора. Следовательно, по отношению к этому полю резонатор можно рассматривать как точечный излучатель. При этом на более высоких частотах, превышающих резонансную частоту, резонатор проявляет диамагнитные свойства.

Переменное внешнее магнитное поле приводит также к возникновению электрического дипольного момента между кольцами. Следовательно, в резонаторе возможны магнитоэлектрические эффекты, и свойства метаматериала, созданного на основе таких резонаторов, можно описать с помощью материальных уравнений (35.1) и (35.2).

Условие (35.3) означает, что относительная диэлектрическая проницаемость и относительная магнитная проницаемость метаматериала равны друг другу для некоторых частот электромагнитного поля. Можно показать, что в этом случае электромагнитные волны в рассматриваемом диапазоне частот не будут испытывать отражения от границы раздела воздух –

метаматериал. Поэтому метаматериал может быть использован при создании безотражательных покрытий.

Если метаматериал обладает сильными диамагнитными свойствами, то величины ε_r и μ_r могут одновременно принимать отрицательные значения для некоторых частот электромагнитного поля:

$$\varepsilon_r < 0, \qquad \mu_r < 0. \tag{35.6}$$

Впервые возможность существования таких сред была теоретически рассмотрена советским физиком В.Г.Веселаго в 1968 г.

В обычном материале векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ образуют правовинтовую систему, и вектор Умова – Пойнтинга $\vec{S}$ (31.4) совпадает по направлению с волновым вектором $\vec{k}$ (см. раздел 31). Из соотношений (30.16) и материальных уравнений (30.6) следует, что в метаматериалах при выполнении условий (35.6) векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ образуют левовинтовую систему. Поэтому в метаматериалах вектор Умова – Пойнтинга $\vec{S}$ (31.4) и волновой вектор $\vec{k}$ направлены противоположно.

Можно показать, что при этом в формуле (30.8) необходимо поставить знак минус, то есть скорость электромагнитной волны является отрицательной. В этом случае метаматериал может демонстрировать аномальное преломление электромагнитных волн, и угол преломления волны на границе раздела воздух – метаматериал является отрицательным. Другими словами, падающий и преломлённый лучи лежат по одну сторону от перпендикуляра к границе раздела двух сред, восстановленного в точку падения.

Изложенное выше поясняет, почему метаматериалы, для которых выполняется условие (35.6), называют дважды отрицательными средами, средами Веселаго, средами с отрицательным коэффициентом преломления, левосторонними или средами обратной волны.

Возможными приложениями метаматериалов являются также новые типы электромагнитных сенсоров, малогабаритные антенны и линзы со сверхвысоким разрешением.