

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

**В.Н. КАПШАЙ, Ю.А. ГРИШЕЧКИН**

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ И  
СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ,  
СОДЕРЖАЩИХ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ  
И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ**

Практическое руководство

для студентов специальностей

1 – 31 04 01 02 «Физика (производственная деятельность)»,

1 – 31 04 08 «Компьютерная физика»

Гомель, 2017



# Оглавление

|                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Введение</b> .....                                                                                                         | 4  |
| <b>Тема1.</b> Современные проблемы теории релятивистских составных систем частиц .....                                        | 6  |
| 1.1 Составные системы частиц и методы их описания в квантовой теории поля .....                                               | 6  |
| 1.2 Квазипотенциальный подход в КТП .....                                                                                     | 8  |
| 1.3 Обзор основных результатов точного решения квазипотенциальных уравнений .....                                             | 10 |
| 1.4 Дельта-потенциалы и их применение в физике .....                                                                          | 14 |
| 1.5 Интегральная форма двухчастичных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении .....                          | 16 |
| <b>Тема 2.</b> Релятивистские двухчастичные уравнения для $s$ -состояний с потенциалом « $\delta$ -сфера» .....               | 21 |
| 2.1 Случай состояний рассеяния .....                                                                                          | 21 |
| 2.2 Случай связанных состояний .....                                                                                          | 23 |
| 2.3 Нерелятивистский предел .....                                                                                             | 25 |
| <b>Тема 3.</b> Релятивистские двухчастичные одномерные уравнения с потенциалом « $n$ -ая производная $\delta$ -функции» ..... | 26 |
| 3.1 Нахождение ВФ состояний рассеяния .....                                                                                   | 26 |
| 3.2 Свойства коэффициентов отражения и прохождения .....                                                                      | 31 |
| <b>Тема 4.</b> Релятивистские двухчастичные одномерные уравнения с нелинейным $\delta$ -потенциалом .....                     | 36 |
| 4.1 Нелинейный $\delta$ -потенциал .....                                                                                      | 36 |
| 4.2 Случай состояний рассеяния .....                                                                                          | 36 |
| 4.3 Случай связанных состояний .....                                                                                          | 39 |
| 4.4 Нерелятивистский предел .....                                                                                             | 41 |
| <b>Заключение</b> .....                                                                                                       | 43 |
| <b>Перечень условных обозначений</b> .....                                                                                    | 44 |
| <b>Литература</b> .....                                                                                                       | 45 |

Часть 2. Численное решение задач о связанных состояниях и состояниях рассеяния для потенциалов однобозонного обмена и их суперпозиций.

## Введение

Квантовая теория поля (КТП) является одним из основных инструментов в современной физике элементарных частиц [1, 2]. Большая часть экспериментов в этой области физики является экспериментами по рассеянию. Поэтому основной задачей КТП является теоретическое определение величин, характеризующих процессы рассеяния – амплитуд и сечений. Однако, не менее важной и в то же время более сложной частью КТП является теория связанных состояний, в которой большой интерес представляют двухчастичные системы (мезоны, позитроний и др.).

В настоящее время в КТП существует несколько ковариантных подходов к решению задач с участием релятивистских составных систем. Например, формализм, основанный на четырёхмерном уравнении Бете-Солпитера. Однако в этом подходе затруднена физическая интерпретация относительного времени. С целью устранения этого недостатка А.А. Логуновым и А.Н. Тавхелидзе был предложен подход, основанный на получении трёхмерных уравнений с помощью процедуры приравнивания времён у квантовополевой функции Грина (ФГ) составной системы  $N$  частиц. Другой вариант трёхмерных релятивистских уравнений был предложен В.Г. Кадышевским на основе гамильтоновой формулировки КТП. В обоих вариантах трёхмерные ковариантные уравнения были сформулированы в импульсном представлении (ИП). Отличительной особенностью подхода Кадышевского является то, что 4-импульсы всех частиц системы, лежат на массовых поверхностях. Это позволило ввести релятивистское конфигурационное представление (РКП) [3], в котором двухчастичные уравнения могут быть сформулированы в дифференциально-разностной и в интегральной форме.

Трёхмерный ковариантный подход нашёл широкое применение в физике элементарных частиц – для описания и связанных состояний, и состояний рассеяния. Он использовался для исследования двухчастичных систем в квантовой электродинамике (позитроний, атом водорода), а в последующем и для кварк-антикварковых систем, что потребовало развития методов конструирования квазипотенциалов (релятивистских потенциалов). Использование перехода в РКП дало и другую возможность: рассматривать феноменологические потенциалы с поведением в РКП, аналогичным поведению квантовомеханических потенциалов в координатном пространстве.

В подходе Логунова-Тавхелидзе квазипотенциалы определяются с помощью ковариантных двухвременных ФГ, что приводит к громоздким выражениям. Дополнительную проблему составляет их зависимость от полной энергии системы. Поэтому, хотя потенциалы для различных

систем и были найдены, интегральные уравнения с ними, до недавнего времени фактически не решались. Между тем, знание вида волновых функций (ВФ) позволяет определять такие физические характеристики, как форм-факторы, магнитные моменты, поляризуемости, фазы рассеяния и др. Это означает, что проблема нахождения релятивистских ВФ двухчастичных систем является весьма актуальной.

Приступая к изучению этой проблемы, нельзя обойти вниманием феноменологические потенциалы, широко используемые в нерелятивистской теории. При этом в первую очередь нужно выбирать потенциалы, которые могут быть полезны при анализе более сложных взаимодействий. Так, применение  $\delta$ -потенциалов позволило найти большой класс точно решаемых задач квантовой механики. С их помощью оказалось удобным исследовать различные вопросы – как прикладные, так и тонкие теоретические. Немалое число работ посвящено изучению одномерных  $\delta$ -потенциалов. Будучи точно решаемыми, эти модели позволяют проверять и иллюстрировать различные методы квантовой механики. Интенсивно  $\delta$ -потенциалы используются при описании движения частиц в периодических структурах. Аналогичные задачи могут быть рассмотрены для радиальных уравнений Шрёдингера и Дирака. Это приводит к потенциалу « $\delta$ -сфера», отличному от нуля только на сферической поверхности. В последнее время также проводится исследование нелинейного уравнения Шрёдингера с  $\delta$ -взаимодействием.

В квазипотенциальном подходе  $\delta$ -потенциалы долгое время не привлекали должного внимания, поскольку решение разностных парциальных уравнений с  $\delta$ -потенциалами представляет сложную проблему. Но с нахождением явного вида интегральных квазипотенциальных уравнений в РКП стала ясна возможность изучения таких потенциалов. Первые решения ковариантных двухчастичных интегральных уравнений в РКП с  $\delta$ -потенциалами рассматривались в одномерном случае.

**Целью первой части данного практического руководства является:**

1) изложение основных результатов по нахождению точных решений релятивистских интегральных уравнений квазипотенциального типа, предназначенных для описания состояний рассеяния и связанных состояний систем двух частиц в одномерном и в трёхмерном сферически-симметричном случаях для потенциалов, представленных  $\delta$ -функцией и производными  $\delta$ -функции;

2) определение на основании полученных решений физических величин, характеризующих двухчастичные системы – амплитуд рассеяния, фазовых сдвигов, спектров связанных состояний и др.

# **1. Современные проблемы теории релятивистских составных систем частиц**

## **1.1 Составные системы частиц и методы их описания в квантовой теории поля**

Долгое время основной проблемой КТП считалась проблема нахождения дифференциальных и полных сечений упругих и неупругих процессов столкновения элементарных частиц. С течением времени стало ясно, что важна и другая проблема теории систем взаимодействующих элементарных частиц – построение теории их связанных состояний [4].

Мощными стимулами к развитию теории связанных состояний стало открытие новых релятивистских систем, состоящих из более элементарных объектов. Открытие лэмбовского сдвига сверхтонкой структуры спектра атома водорода привело к осознанию того факта, что атом водорода является системой, для описания которой требуется привлечение КТП [5]. Ещё больше оснований считать квантовополевой системой позитроний – связанное состояние электрона и позитрона [4], который может распадаться на  $\gamma$ -кванты. Для его описания требуется привлечение теории, в которой возможны процессы рождения и уничтожения частиц. В рамках КТП следует описывать и релятивистские эффекты, наблюдаемые в сложных атомах.

Экспериментальное открытие теоретически предсказанной кварковой структуры адронов стимулировало развитие теории связанных состояний систем двух частиц (мезоны) и систем трёх частиц (барионы). С открытием новых типов кварков ( $c$ ,  $b$ ,  $t$ ) существенно обогатились сведения о мезонах: были обнаружены  $J/\psi$ -мезон,  $D$ -мезоны и др.

Развитие квантовой хромодинамики и открытие векторных калибровочных бозонов существенно способствовали повышению статуса теории связанных состояний. В целях анализа результатов экспериментальных исследований процессов столкновения адронов с лептонами, которые в рамках КТП описываются с использованием форм-факторов и структурных функций [6], из теории связанных состояний требуется информация о поведении этих функций. Говоря о современном состоянии физики составных кварк-антикварковых систем, нельзя не отметить недавнее экспериментальное обнаружение объектов, которые считаются возможными кандидатами на роль связанных систем, состоящих из четырёх и даже из пяти кварков.

Особый интерес представляет система, состоящая из двух электронов и двух позитронов – молекула позитрония. После её недавнего

экспериментального открытия, которое рассматривается как начало квантовополевой молекулярной физики, перед физиками-теоретиками поставлено сразу множество задач об описании состояний таких молекул. Отметим, что уже достаточно развита релятивистская молекулярная физика, основанная на использовании уравнения Дирака [7].

Чтобы описывать свойства уже открытых и предсказываемых составных объектов, необходимо развитие адекватной теории составных систем, в которой допускается не только образование связанных состояний, но и возможность процессов, сопровождающихся уничтожением и рождением новых частиц. Таким образом, непрерывное развитие методов КТП – главного инструмента описания релятивистских составных систем – обусловлено потребностями экспериментальной и теоретической физики.

Попытки создать единую теорию связанных состояний и состояний рассеяния предпринимались на всех этапах развития КТП. Были предложены различные подходы, в рамках каждого из которых решается только часть проблем. Так, ещё в 1934 году В.А. Фок впервые осуществил процедуру усечения уравнений, используемых для описания взаимодействующих полей, по числу частиц. Этот метод в последующем получил развитие в работах И.Е. Тамма и С.М. Данкова. Преимущества этого метода состоят в возможности формулировать граничные условия для волновых функций, их вероятностной интерпретации, возможности работать вне рамок теории возмущений. Недостаток этого метода заключается в невозможности перенормировки уравнений.

Существенный вклад в теорию составных систем внесли Бете и Солпитер, которые применили формализм фейнмановских диаграмм для описания состояний рассеяния и связанных состояний системы двух частиц. При этом входящая в уравнение этого подхода ВФ оказывается зависящей от относительных пространственных координат и от относительного времени. В последующие годы было выполнено всестороннее исследование уравнения Бете-Солпитера [8]. Несмотря на ковариантность и универсальность этого уравнения, были обнаружены принципиальные трудности. Так, невозможна вероятностная интерпретация ВФ, никак не находит своего объяснения зависимость ВФ от относительного времени двух частиц, необъяснимо и существование решений с отрицательной нормой, которые не имеют нерелятивистского предела и поэтому не удовлетворяют принципу соответствия.

Именно четырёхмерный характер основных трудностей подхода Бете и Солпитера привёл к попыткам их преодоления путём редукции уравнений к трёхмерной форме. Например, сам Солпитер предложил модель «мгновенного приближения», в которой просто отбрасывается

зависимость от относительного времени в ядре уравнения. Даже в отсутствие ковариантности и в пренебрежении эффектами запаздывания такая модель имеет определённые достоинства: получаемые решения имеют нерелятивистский предел и удовлетворяют принципу соответствия, ядро взаимодействия локально. Однако, пренебрежение эффектами запаздывания существенно влияет на значения физических величин.

Подход Бете-Солпитера вплоть до настоящего времени используется как инструмент для описания составных релятивистских систем. Он находит применение при описании нуклон-нуклонных взаимодействий, в спектроскопии мезонов, при описании процессов распада мезонов и связанных состояний лептонов, а также в других задачах. Однако, наличие вышеотмеченных недостатков этого подхода стимулировало развитие и других методов описания (в рамках одного подхода) связанных состояний и состояний рассеяния релятивистских частиц.

## **1.2 Квазипотенциальный подход в КТП**

С целью преодоления трудностей подхода Бете-Солпитера в работе А.А. Логунова и А.Н. Тавхелидзе [9] был предложен подход, основанный на приравнивании времён у четырёхмерных. По образному выражению А. Эддингтона «протон сегодня и электрон вчера не образуют атома водорода». Чтобы получить уравнения для таких функций, потребовалось также приравнять начальные и конечные времена у квантовопольевых ФГ. В результате такой процедуры удаётся избежать проблемы формулировки граничных условий по относительному времени и сохранить ковариантность уравнений. Разумеется, приравнивание времён осуществляется в некоторой системе отсчёта. Чаще всего времена приравниваются в системе центра масс.

Трёхмерные уравнения квазипотенциального подхода являются интегральными. Ядро этих уравнений, называемое квазипотенциалом, является обобщением нерелятивистского квантовомеханического потенциала. Однако, такой релятивистский оператор взаимодействия является нелокальным, комплексным и зависит от полной энергии системы, что отражает эффект запаздывания.

Несмотря на трёхмерность, квазипотенциальный подход является ковариантным. Явно ковариантное определение двухвременных ФГ и строящихся на их основе операторов взаимодействия было дано в работе [10]. При этом, такая «ковариантная трёхмерность» обусловила получение условия нормировки для волновых функций связанных состояний, что приводит к возможности их вероятностной интерпретации.

Трёхмерные релятивистские уравнения оказалось возможным получить и другим методом. Так, В.Г. Кадышевский на основе развитой им шпурионной диаграммной техники разработал квазипотенциальный подход для системы двух спинорных частиц [3]. Основное отличие этой техники от фейнмановской состоит в том, что импульсы всех частиц лежат на массовой поверхности. Существуют и другие варианты редукции четырёхмерных уравнений к трёхмерному виду [11].

Важнейшей проблемой всех этих подходов является нахождение явного вида квазипотенциалов (релятивистских потенциалов). Способ их построения на основе причинной квантовополевой ФГ, был указан ещё в работе [9]. Процедуры построения потенциалов полностью определяются лагранжианом, который соответствует рассматриваемой теории взаимодействующих частиц. Однако, эта процедура, простая в принципе, оказывается сложной технически. Поэтому для построения явного вида потенциалов долгое время использовались другие методы, например, построение квазипотенциала на основе фейнмановской амплитуды рассеяния, которая считается заданной. Однако, такая амплитуда известна только для состояний рассеяния и только на энергетической поверхности. Способ выхода за энергетическую поверхность был ясен и в подходе Логанова-Тавхелидзе и в подходе Кадышевского. В последнем, по причине принадлежности 4-импульсов всех частиц массовому гиперboloиду, оказалось, что квазипотенциалы, продолженные за энергетическую поверхность, локальны в импульсном пространстве Лобачевского, реализованном на верхней полке гиперболоида  $p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$ . Метод шпурионных диаграмм Кадышевского много раз был использован для нахождения вида квазипотенциалов.

В подходе Логанова-Тавхелидзе на основе двухвременной причинной ФГ квазипотенциал автоматически однозначно определяется и вне энергетической поверхности. Впервые это было сделано для системы двух скалярных частиц. В дальнейшем этот метод был применен и для систем, содержащих скалярные и спинорные частицы. Полученные при этом потенциалы, вообще говоря, не являются локальными в импульсном пространстве Лобачевского.

Поскольку все квантовополевые способы построения потенциалов приводят к сложному виду получаемых при этом уравнений, были предложены процедуры, упрощающие сами уравнения. При этом, как отмечалось выше, существование различных трёхмерных вариантов подхода является внутренним свойством теории, в которой необходимым является выполнение требования двухчастичной унитарности. В результате реализации таких процедур в литературе появились уравнения,

которые называют модифицированными уравнениями Логунова-Тавхелидзе и Кадышевского.

Другая возможность упрощения сложных уравнений обеспечивается активным использованием модельных потенциалов. Такие релятивистские операторы взаимодействия или следуют из более простой теории поля, или определяются феноменологически, при этом вопрос, следуют ли они из какой-либо теории поля, остаётся невыясненным. Отметим здесь широкое использование так называемых гладких квазипотенциалов для описания упругого рассеяния адронов, а также широкое применение «запирающих» потенциалов для описания спектров адронов, несмотря на то, что запирание кварков на основе теории поля пока не доказано.

### 1.3 Обзор основных результатов точного решения квазипотенциальных уравнений

Ещё одна возможность упрощения анализа сложных релятивистских уравнений связана с переходом в другое представление посредством правильно выбранного интегрального преобразования. Несмотря на то, что релятивистские квазипотенциальные уравнения являются аналогами нерелятивистских уравнений Шрёдингера и Липпмана-Швингера, находить их решения (особенно точные) – весьма непростая задача. При этом хорошо известно, что уравнение Шрёдингера для связанных состояний и состояний рассеяния в подавляющем большинстве случаев решают в координатном представлении, а волновые функции в ИП находят, выполняя преобразование Фурье полученных решений. Однако, Фурье-анализ релятивистских уравнений не только не упрощает, но даже усложняет задачу, так как уравнения становятся интегро-дифференциальными. Нерелятивистское импульсное пространство является плоским евклидовым пространством, группой движения которого является группа Галилея. В релятивистской теории 4-импульсы частиц принадлежат массовой поверхности – верхней полке гиперболоида  $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ . Тем самым трёхмерное импульсное пространство перестаёт быть плоским, оно становится пространством Лобачевского, группой движения которого является группа Лоренца.

В работе [3] было предложено вместо преобразования Фурье использовать его релятивистское обобщение – разложение всех входящих в уравнения величин по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца, имеющим вид ( $\mathbf{r} = r \mathbf{n}$ )

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left( \frac{E_p - \mathbf{p} \mathbf{n}}{m} \right)^{-1 - imr}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{p}$  – трёхмерный импульс,

$m$  – масса каждой частицы системы,

$E_p$  – величина, определённая как  $E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ ,

$r$  – групповой параметр, рассматриваемый как относительная релятивистская координата в системе центра масс [3].

Функции (1.1) соответствуют плоским волнам в РКП; в нерелятивистском пределе (при  $m \rightarrow \infty$ ) они обращаются в функцию  $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор в обычном координатном пространстве.

Таким образом, фактически была введена концепция релятивистского конфигурационного представления. При этом оказалось, что уравнения в РКП являются дифференциально-разностными.

После разделения переменных (ВФ, описывающие угловые зависимости, оказываются сферическими гармониками) парциальные радиальные уравнения оказываются разностными. В итоге в теории имеются две возможности для поиска релятивистских ВФ: решать интегральные уравнения в ИП и/или решать разностные уравнения в РКП.

Предполагая аналогию с квантовой механикой, где большая часть ВФ была найдена как решения дифференциальных уравнений в координатном пространстве, вначале все авторы уделяли внимание разностным уравнениям в РКП. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков и их соавторы нашли точные решения разностных уравнений для случаев традиционных квантовомеханических потенциалов (прямоугольная потенциальная яма и кулоновский потенциал  $V(r) = -e^2/r$ ), но определяемых уже в РКП [3]. Аналогично дифференциальным уравнениям, разностные уравнения с некоторыми степенными потенциалами могут быть решены с помощью метода, основанного на использовании интегрального преобразования типа преобразования Лапласа, в котором контур интегрирования выбирается специальным образом (контур может быть как замкнутым, так и незамкнутым).

Метод авторов работы [12], которые предложили использовать для нахождения решений разностных уравнений интегральное преобразование Лапласа с фиксированным контуром интегрирования (вещественная положительная полуось), оказался применим даже к большему числу потенциалов. Применение этого метода к радиальным квазипотенциальным уравнениям с кулоновским потенциалом приводит к дифференциальным уравнениям первого порядка с нулевым начальным условием, которые, однако, не имеют ненулевых классических решений. В соответствии с теорией обобщённых функций искать такие решения уравнений следует в виде линейных комбинаций  $\delta$ -функций и её производных. Коэффициенты, содержащиеся в таких линейных

комбинациях, удовлетворяют алгебраическим системам однородных уравнений, которые имеют решения только при некоторых значениях полной энергии двухчастичной системы. Так в этом методе возникает условие квантования. Однако, при решении этих систем в каждой особой точке возникает произвольная константа  $A_k$  и число этих констант бесконечно. Это является следствием того факта, что решения разностных квазипотенциальных уравнений определяются «с точностью до  $i/m$ -периодических функций», имеющих вид  $C(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \exp(-2\pi k m r)$ . Этот метод был применен также при получении решений уравнений с потенциалами, которые в РКП имеют экзотический с точки зрения квантовой механики вид  $r^{-1} \text{th}(\pi r m / 2)$  и  $r^{-1} \text{cth}(\pi r m)$ , но которые по происхождению являются суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена в ИП. Однако, ни этот ни другие известные к настоящему времени методы не могут дать рецепта нахождения « $i/m$ -периодических множителей» – ВФ при решении разностных уравнений остаются неопределёнными. Поэтому предпринимались попытки найти решения исходных интегральных уравнений в ИП.

Квазипотенциалы вида  $(r^2 \pm a^2)^{-1}$  допускают сведение интегральных уравнений к дифференциальным непосредственно в ИП. Возникающие таким образом задачи Штурма-Лиувилля, в том числе и в случае ненулевых значений орбитального момента, были исследованы аналитически и численно.

Точные решения интегрального модифицированного уравнения Логанова-Тавхелидзе в сферически-симметричном случае были найдены для квазипотенциала, представленного в ИП как геометрическое обобщение нерелятивистского кулоновского потенциала путём замены евклидовой геометрии ИП на геометрию Лобачевского. С другой стороны, этот квазипотенциал является простой суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена. Отметим, что эти решения являются однозначно определёнными, поскольку константа (одна для каждой ВФ) может быть определена из условия нормировки. Заметим, однако, что такое «геометрическое» обобщение нерелятивистской кулоновской задачи – не единственно возможное.

В связи с бурным исследованием проблемы конфайнмента в кварковых моделях элементарных частиц в квазипотенциальном подходе рассматривались и потенциалы осцилляторного и линейного типа. Такие «запирающие» потенциалы имеют в ИП сингулярное поведение  $V \sim \nabla_p^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$  и  $V \sim (\mathbf{p} - \mathbf{k})^{-4}$ . Поэтому некоторые авторы изучали такие потенциалы в РКП. Тем не менее, были рассмотрены методы решения

релятивистских задач с сингулярными потенциалами непосредственно в импульсном представлении. Хотя интегральные уравнения в ИП оказываются более «надёжным» средством нахождения релятивистских ВФ, чем разностные уравнения в РКП, сам факт возможности записи двухчастичных уравнений в РКП стимулировал исследования которые привели к методу интегро-дифференциальных уравнений в  $x$ -пространстве, основанном на применении специального интегрального преобразования Канторовича-Лебедева. Учитывая свойства решений, получаемых в РКП посредством преобразования Лапласа с фиксированным контуром, была построена аналогичная схема нахождения решений в ИП.

**Отметим здесь особую ценность точно решаемых задач:**

- на их основе могут быть изучены общие свойства решений квазипотенциальных уравнений;
- на основе точных ВФ могут быть аналитически вычислены характеристики двухчастичных систем (амплитуды рассеяния, константы распада, структурные функции и т.д.);
- точные решения могут быть хорошей основой при нахождении приближённых аналитических решений по теории возмущений;
- точные решения могут быть полезны при нахождении численных решений – они являются надёжным средством проверки точности метода.

Два последних обстоятельства особенно важны, так как большинство задач теории квазипотенциального подхода не допускает точных решений и использование приближённых или численных методов становится единственным средством их исследования.

Так как сингулярное и гиперсингулярное поведение как трёхмерных, так и парциальных операторов взаимодействия осложняло решение задач, всегда вызывала интерес разработка альтернативного метода нахождения релятивистских ВФ, свободного также и от неоднозначности решений разностных уравнений. Такой метод был создан в виде метода интегральных парциальных уравнений в РКП.

Метод интегральных уравнений в РКП основан на нахождении вида свободных ФГ в этом представлении. Для разных модификаций уравнений – как для связанных состояний, так и для состояний рассеяния – ФГ были вычислены. Таким образом, с формулировкой интегральных уравнений в РКП открылась новая возможность исследования релятивистских двухчастичных систем. Они могут быть использованы для нахождения аналитических решений. Так, например, для решения интегральных уравнений был предложен аналог метода Фробениуса, использовавшегося ранее только для нахождения решений дифференциальных уравнений.

## 1.4 Дельта-потенциалы и их применение в физике

О том, что эта новая интегральная форма уравнений даёт новые возможности, ярче всего, пожалуй, говорит случай потенциалов, задаваемых в РКП с помощью  $\delta$ -функций. Проблема решения разностных квазипотенциальных уравнений с  $\delta$ -потенциалами сложна настолько, что даже не рассматривалась. Вместе с тем, хорошо известно, что в нерелятивистской квантовой механике  $\delta$ -потенциалы давно вошли в учебники наряду с более важными, но и более сложными потенциалами типа кулоновского, осцилляторного и другими.

Дельта-потенциалы нашли широкое применение в разных задачах молекулярной, атомной и ядерной физики [13]. Суперпозиция и ряд  $\delta$ -потенциалов были использованы в физике твёрдого тела и в оптике. Впервые в качестве потенциала в уравнении Шрёдингера  $\delta$ -функцию использовал Э. Ферми. Применение  $\delta$ -потенциалов в квантовой механике привело к появлению обширного класса точно решаемых задач. Полученные решения были использованы для решения прикладных и тонких теоретических вопросов, а также для проверки и иллюстрации методов квантовой механики. Много внимания  $\delta$ -потенциалам было уделено в связи с решением задач квантовой механики о прохождении и отражении нерелятивистской частицы, движущейся в области, которую можно моделировать системой  $\delta$ -потенциалов. Дельта-потенциалы привлекают внимание и в связи с изучением короткодействующих взаимодействий – например, недавно были проведены исследования нуклон-нуклонных взаимодействия на основании решения уравнения Шрёдингера с суперпозицией  $\delta$ -потенциалов.

Релятивистские точно решаемые модели на основе  $\delta$ -потенциалов также были рассмотрены. Например, были найдены решения одномерного уравнения Дирака. Дифференциальная форма уравнений Шрёдингера и Дирака привела к возможности формулировки одномерных задач с  $\delta$ -потенциалами в виде задач с граничными условиями. Дельта-потенциалы были рассмотрены также в случае парциальных уравнений Шрёдингера и Дирака. При этом, поскольку такие потенциалы отличны от нуля только на поверхности сферы, то их можно называть потенциалами типа « $\delta$ -сферы». Суперпозиции или ряды  $\delta$ -потенциалов активно используются при описании движения релятивистской и нерелятивистской частицы в периодических структурах, например, в модели Кронига-Пенни и в модели Тамма.

Следует отметить особо, что нелинейные  $\delta$ -потенциалы также были исследованы. Уравнение Шрёдингера с нелинейным  $\delta$ -потенциалом может быть использовано для моделирования распространения волны в

линейной среде, содержащей узкую полосу нелинейного материала. Как хорошо известно, нелинейные уравнения могут появляться даже в рамках линейной квантовой механики, если рассматривать задачу взаимодействия  $N$  тел в приближении среднего поля. В таком приближении ВФ удовлетворяет уравнению типа Шрёдингера, в котором взаимодействие содержит ВФ  $N$  частиц (например, приближение Хартри-Фока).

В случае релятивистских уравнений, основанных на КТП, появление нелинейных взаимодействий, зависящих от ВФ в известном смысле естественно, так как фундаментальные уравнения теории квантовых взаимодействующих полей являются нелинейными. Поиск и анализ решений уравнений в РКП, для которых характерны отмеченные особенности, представляет актуальную задачу, варианты которой рассмотрены в четвёртой теме настоящего руководства.

Здесь приведены лишь немногие результаты исследования и применения  $\delta$ -потенциалов и ссылки на соответствующие работы. Научная литература по этой проблеме весьма обширна, но, несмотря на это, проблема использования  $\delta$ -потенциалов в теоретической физике не потеряла своей актуальности и практической значимости.

Вышесказанным подтверждается необходимость исследований состояний квантовополевых систем в случае взаимодействий, которые можно моделировать  $\delta$ -потенциалами, и в квазипотенциальном подходе; при этом, как уже было сказано, оптимальным является использование интегральных уравнений в РКП. Такие исследования были начаты в одномерном случае. Были получены точные решения квазипотенциальных уравнений для  $\delta$ -потенциала и суперпозиции двух  $\delta$ -потенциалов в случае связанных состояний и состояний рассеяния. В результате анализа полученных в этих работах коэффициентов отражения была доказана возможность эффекта полного отражения, который не имеет аналогов в нерелятивистской теории. Решения соответствующих трёхмерных задач рассмотрены в настоящем руководстве и представляются ещё более важными и интересными.

Трёхмерные квазипотенциальные уравнения с потенциалами  $\delta(r - r_0)$  и их суперпозициями нужно исследовать как в случае связанных состояний, так и в случае состояний рассеяния, для которых особенно важно нахождение таких физических величин как амплитуды рассеяния.

Следует отметить, что релятивистские  $\delta$ -потенциалы, задаваемые в РКП, отличаются от нерелятивистских  $\delta$ -потенциалов, заданных в координатном представлении, более слабой сингулярностью. С учётом этого обстоятельства в релятивистском подходе удаётся рассмотреть потенциалы, содержащие производные  $\delta$ -функции, в то время как в нерелятивистской теории рассмотрение производных  $\delta$ -функции в

качестве потенциалов сопряжено с трудностями. Рассмотрение же потенциалов типа «производная  $\delta$ -функции» в РКП не связано с принципиальными трудностями. Фактически, это связано с модификацией кинетического члена и функций Грина в импульсном представлении при больших значениях быстроты (или при малых значениях канонически сопряжённой ей релятивистской координаты).

## 1.5 Интегральная форма двухчастичных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении

Трёхмерные релятивистские уравнения квазипотенциального типа для ВФ  $\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{k})$ , описывающих состояния рассеяния системы двух частиц с одинаковой массой  $m$  в ИП имеют вид [3, 9]

$$\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - G_{(j)}(E_q, p) \int V(E_q, \mathbf{p}, \mathbf{k}) \psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (1.2)$$

где индекс  $j$  соответствует одному из четырёх типов релятивистских двухчастичных уравнений:

$j = 1$  – уравнению Логунова-Тавхелидзе,

$j = 2$  – уравнению Кадышевского,

$j = 3$  – модифицированному уравнению Логунова-Тавхелидзе,

$j = 4$  – модифицированному уравнению Кадышевского,

$G_{(j)}(E_q, p)$  – функция Грина  $j$ -го уравнения;

$2E_q$  – энергия двухчастичной системы в системе центра масс;

$V(E_q, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  – квазипотенциал, в наиболее общем случае зависящий от энергии двухчастичной системы и от спиновых переменных.

Содержащиеся в (1.2) ФГ имеют следующий вид [3, 9]:

$$G_{(1)}(E_q, p) = \frac{1}{E_p^2 - E_q^2 - i0} \frac{m}{E_p}; \quad G_{(2)}(E_q, p) = \frac{1}{2E_p - 2E_q - i0} \frac{m}{E_p^2}; \quad (1.3)$$

$$G_{(3)}(E_q, p) = \frac{1}{E_p^2 - E_q^2 - i0}; \quad G_{(4)}(E_q, p) = \frac{1}{2E_p - 2E_q - i0} \frac{1}{E_p}.$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе все четыре релятивистские ФГ обращаются в ФГ уравнения Шрёдингера [14, 15]:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_{(j)}(E_q, p) = G_{(0)}(q, p) = \frac{1}{p^2 - q^2 - i0}. \quad (1.4)$$

Разложение в уравнениях (1.2) величин  $\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  и  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  в ряды по полиномам Лежандра  $P_l(\mathbf{qp}/qr)$ , а величины  $V(E_q, \mathbf{p}, \mathbf{k})$  в ряд по полиномам  $P_l(\mathbf{pk}/pk)$  приводит к парциальным двухчастичным уравнениям, которые для  $s$ -состояний рассеяния имеют форму

$$\psi_{(j)}(q, p) = \frac{\pi}{2} \frac{E_q}{m} \delta(p - q) - \frac{2}{\pi} m E_p G_{(j)}(E_q, p) \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(E_q, p, k) \psi_{(j)}(q, k). \quad (1.5)$$

В случае связанных состояний уравнения (1.5) преобразуются к однородной форме, а величина  $q$  становится мнимой ( $q = i\kappa$ ):

$$\psi_{(j)}(i\kappa, p) = \frac{-2}{\pi} m E_p G_{(j)}(E_q, p) \int_0^\infty \frac{dk}{E_k} V(E_q, p, k) \psi_{(j)}(i\kappa, k), \quad (1.6)$$

где  $2E_q = 2\sqrt{m^2 + (i\kappa)^2}$  – энергия связанного состояния ( $0 < 2E_q \leq 2m$ ).

Как было сказано в параграфе 1.3, наряду с ИП двухчастичные уравнения могут быть сформулированы в РКП путём разложения всех величин, содержащихся в уравнениях в ИП по функциям (1.1). Например, преобразование ВФ в РКП и обратное преобразование имеет вид [3]

$$\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}, \quad (1.7)$$

$$\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.8)$$

соответственно. После преобразования в РКП интегральные уравнения для релятивистских волновых функций имеют следующий вид [3]:

$$\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \xi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) + \int G_{(j)}(E_q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.9)$$

Мы рассматриваем только локальные в РКП, сферически симметричные, независящие от спина потенциалы  $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$ . Разложение функций  $\psi_{(j)}(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ ,  $\xi(\mathbf{q}, \mathbf{r})$  в ряд по полиномам Лежандра  $P_l(\mathbf{qr}/qr)$ , а функций  $G_{(j)}(E_q, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в ряд по полиномам  $P_l(\mathbf{rr}'/rr')$  даёт уравнения для парциальных ВФ, которые в случае  $s$ -состояний имеют вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q m r) + \int_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r') dr', \quad (1.10)$$

где  $\chi_q \geq 0$  – быстрота, связанная с энергией для состояний рассеяния как  $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$ .

Парциальные функции Грина в РКП  $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$  связаны с ФГ в импульсном представлении следующим образом:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\chi' m r) G_{(j)}(m \operatorname{ch} \chi_q, k) E_k \sin(\chi' m r') d\chi'. \quad (1.11)$$

Подстановка выражений (1.3) при конкретных значениях  $j$  в (1.11) и последующее вычисление интегралов приводит к следующим ФГ:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (1.12)$$

где

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(1)}} \frac{\operatorname{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\operatorname{sh}(\pi mr/2)}, \quad (1.13)$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{K_q^{(2)}} \frac{\operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\operatorname{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(3)}} \frac{\operatorname{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)}, \quad G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(4)}} \frac{\operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\operatorname{sh}(\pi mr)}.$$

В формулах (1.13) использованы обозначения

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \operatorname{sh} 2\chi_q; \quad K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \operatorname{sh} \chi_q. \quad (1.14)$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики ФГ (1.12) при  $r \rightarrow \infty$ :

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \frac{-2}{K_q^{(j)}} \sin(\chi_q m r') \exp(i\chi_q m r). \quad (1.15)$$

Как и в случае уравнений в ИП, для связанных состояний уравнения (1.10) модифицируются к однородному виду, а быстрота становится мнимой ( $\chi_q = iw_q$ , где  $0 \leq w_q < \pi/2$ ,  $2E_q = 2m \cos w_q$ ):

$$\Psi_{(j)}(iw_q, r) = \int_0^\infty G_{(j)}(iw_q, r, r') V(r') \Psi_{(j)}(iw_q, r') dr'. \quad (1.16)$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе все функции Грина (1.12) преобразуются в функцию Грина трёхмерного уравнения Шрёдингера для  $s$ -волн в координатном представлении [14, 15]:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \chi_q \rightarrow 0}} G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(0)}(q, r, r') = \frac{-1}{q} \begin{cases} \sin(qr') \exp(iqr), & r' < r; \\ \sin(qr) \exp(iqr'), & r' > r. \end{cases} \quad (1.17)$$

Нерелятивистский предел уравнений (1.10), (1.16) даёт уравнение Шрёдингера соответственно для состояний рассеяния

$$\Psi_{(0)}(q, r) = \sin(qr) + \int_0^\infty G_{(0)}(q, r, r') V(r') \Psi_{(0)}(q, r') dr' \quad (1.18)$$

и для связанных состояний

$$\psi_{(0)}(ik, r) = \int_0^{\infty} G_{(0)}(ik, r, r') V(r') \psi_{(0)}(ik, r') dr'. \quad (1.19)$$

Одномерные задачи квантовой теории, которые сами по себе имеют приложения, часто используются как простой пример для более глубокого понимания трёхмерных задач. В частности, рассмотрение одномерной задачи помогает лучше понять переход от ИП к РКП. В случае только одного пространственного измерения преобразование в РКП реализуется посредством разложения по более простым, чем (1.1) функциям

$$\xi(p, \rho) = \left( \frac{E_p - p}{m} \right)^{-imp} = \exp(i\chi_p m \rho), \quad (1.20)$$

где  $\rho$  – координата в одномерном РКП.

Преобразование волновых функций относительного движения двух частиц из ИП в РКП имеет следующую форму:

$$\psi(q, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\chi_p m \rho) \psi(q, \rho) \frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\chi_p m \rho) \tilde{\psi}(q, \rho) m \frac{d\chi_p}{2\pi}, \quad (1.21)$$

где  $\tilde{\psi}(q, \rho) = \text{ch } \chi_p \psi(q, \rho)$ .

Обратное преобразование очевидно. Одномерные уравнения для состояний рассеяния и связанных состояний в РКП имеют вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{(j)}(\chi_q, \rho - \rho') V(\rho') \psi_{(j)}(\chi_q, \rho') d\rho', \quad (1.22)$$

$$\psi_{(j)}(iw_q, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{(j)}(iw_q, \rho - \rho') V(\rho') \psi_{(j)}(iw_q, \rho') d\rho', \quad (1.23)$$

соответственно. Одномерные ФГ в уравнениях (1.22) и (1.23) связаны с функциями Грина в ИП посредством интегрального преобразования

$$G_{(j)}(\chi_q, \rho - \rho') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{(j)}(m \text{ch } \chi_q, m \text{sh } \chi) E_k \exp(i\chi m [\rho - \rho']) d\chi \quad (1.24)$$

и для каждого из рассматриваемых уравнений имеют форму (1.13).

## Выводы по теме 1

В данной теме были рассмотрены основные подходы, используемые при изучении связанных состояний и состояний рассеяния составных систем частиц в КТП, указаны основные преимущества квазипотенциального подхода перед другими, представлен обзор

литературы об основных методах точного решения квазипотенциальных уравнений в ИП и в РКП, предложенных разными авторами. Приведены двухчастичные уравнения квазипотенциального типа в ИП для состояний рассеяния и связанных состояний. Посредством интегрального преобразования, которое в случае  $s$ -волн аналогично преобразованию Фурье, эти уравнения были сформулированы в интегральной форме в РКП, которое, фактически, является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики.

## **Вопросы для самоконтроля по теме 1**

1. В чём состоят основные преимущества квазипотенциального подхода для описания составных систем частиц перед подходом Бете-Солпитера?
2. В чём состоит основное отличие квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе от квазипотенциального подхода Кадышевского?
3. В какой форме могут быть сформулированы уравнения квазипотенциального типа в РКП?
4. При решении каких физических задач используются  $\delta$ -потенциалы?
5. Получите четыре функции Грина в РКП (1.12), используя интегральное преобразование (1.11). Убедитесь, что в нерелятивистском пределе эти функции преобразуются в выражение (1.17).

## 2. Релятивистские двухчастичные уравнения для $s$ -состояний с потенциалом « $\delta$ -сфера»

### 2.1 Случай состояний рассеяния

Рассмотрим решения релятивистских уравнений для состояний рассеяния (1.10) в случае потенциала « $\delta$ -сфера»

$$V(r) = V_0 \delta(r - a), \quad (2.1)$$

где  $V_0$  и  $a > 0$  – вещественные константы.

Потенциал (2.1) локализован на поверхности сферы конечного радиуса  $a > 0$  (на « $\delta$ -сфере»). ВФ для потенциала (2.1) приведём в форме

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + V_0 A_{(j)}^{-1}(\chi_q) \sin(\chi_q ma) G_{(j)}(\chi_q, r, a); \quad (2.2)$$

$$A_{(j)}(\chi_q) = 1 - V_0 G_{(j)}(\chi_q, a, a).$$

Учитывая (1.15), асимптотики ВФ (2.2) при  $r \rightarrow \infty$  можно представить как

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \sin(\chi_q mr) + q f_{(j)}(\chi_q) \exp(i\chi_q ma), \quad (2.3)$$

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 \sin^2(\chi_q ma)}{q K_q^{(j)} A_{(j)}(\chi_q)}, \quad (2.4)$$

где  $q = msh\chi_q$  – релятивистский импульс,

$f_{(j)}(\chi_q)$  – релятивистская амплитуда рассеяния, которая определена так же, как и в нерелятивистской теории – в виде коэффициента при рассеянной волне в асимптотике ВФ, разделенного на импульс [14, 15] (релятивистская рассеянная волна имеет вид  $\exp(i\chi_q mr)$  [3]).

Амплитуды рассеяния, соответствующие четырём вариантам ФГ (1.13), могут быть представлены формулами

$$f_{(1)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1} \sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(1)} + V_0 \left[ \sin(2\chi_q ma) \operatorname{cth}(\pi ma) - 2\chi_q / \pi + 2i \sin^2(\chi_q ma) \right]}; \quad (2.5)$$

$$f_{(2)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1} \sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(2)} + V_0 \left[ \sin(2\chi_q ma) \operatorname{cth}(2\pi ma) - \frac{\chi_q}{\pi} - \frac{\operatorname{sh} \chi_q \operatorname{sh}^2 \frac{\pi ma}{2}}{\operatorname{ch} \pi ma} + 2i \sin^2(\chi_q ma) \right]};$$

$$f_{(3)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1} \sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(3)} + V_0 \left[ \sin(2\chi_q ma) \operatorname{th}(\pi ma) + 2i \sin^2(\chi_q ma) \right]};$$

$$f_{(4)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1} \sin^2(\chi_q m a)}{K_q^{(4)} + V_0 \left[ \sin(2\chi_q m a) \operatorname{cth}(2\pi m a) - \chi_q / \pi + 2i \sin^2(\chi_q m a) \right]}.$$

Некоторые результаты численных расчётов амплитуд рассеяния (2.4), выполненных для  $j=1$  и  $j=3$ , будут приведены позже, после рассмотрения другой важной величины – фазового сдвига.

Зная амплитуду рассеяния  $f_{(j)}(\chi_q)$ , можно получить информацию о рассеянии частиц. Например, парциальное сечение рассеяния  $s$ -волны  $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$  и парциальная  $S$ -матрица  $S_{(j)}(\chi_q)$  соответственно выражаются через амплитуду рассеяния  $f_{(j)}(\chi_q)$  соотношениями

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi |f_{(j)}(\chi_q)|^2; \quad S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iq f_{(j)}(\chi_q). \quad (2.7)$$

Амплитуды рассеяния (2.6) удовлетворяют условию унитарности [3], имеющему вид, аналогичный нерелятивистскому соотношению [14, 15]:

$$\operatorname{Im} f_{(j)}(\chi_q) = q |f_{(j)}(\chi_q)|^2. \quad (2.8)$$

Из формул (2.4) следует, что условие (2.8) эквивалентно свойству ФГ

$$\operatorname{Im} G_{(j)}(\chi_q, a, b) = -2 \sin(\chi_q m a) \sin(\chi_q m b) / K_q^{(j)}. \quad (2.9)$$

Парциальные  $S$ -матрицы могут быть представлены в форме

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 - \frac{4iV_0 \sin^2(\chi_q m a)}{K_q^{(j)} A_{(j)}(\chi_q)} = \frac{(A_{(j)}(\chi_q))^*}{A_{(j)}(\chi_q)}, \quad (2.10)$$

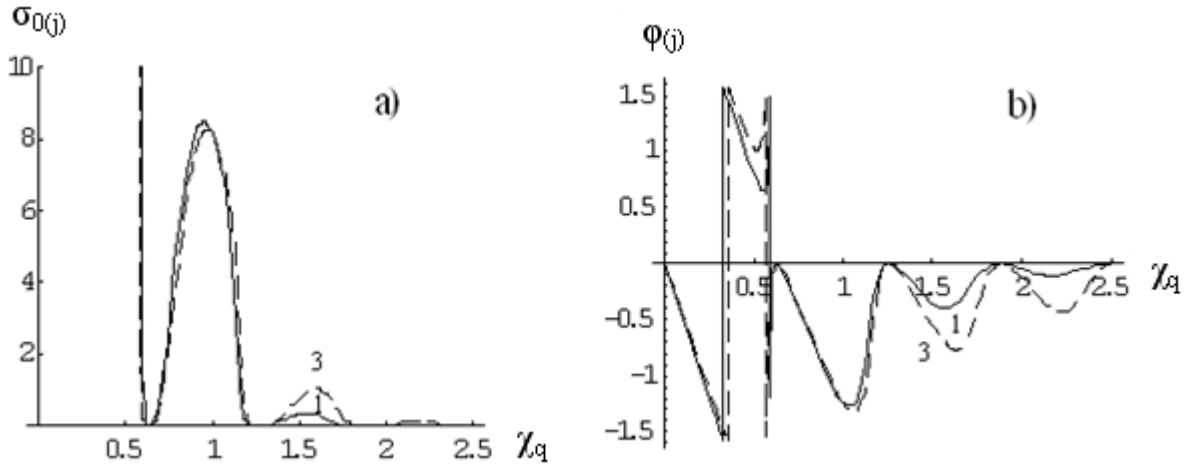
из которых унитарность  $S$ -матрицы очевидна. Унитарность  $S$ -матрицы учитывается в следующем представлении

$$S_{(j)}(\chi_q) = \exp(2i\phi_{(j)}(\chi_q)), \quad (2.11)$$

на основе которого определяется фазовый сдвиг  $\phi_{(j)}(\chi_q)$ . Фазовые сдвиги могут быть найдены из выражений:

$$\operatorname{tg}(2\phi_{(j)}(\chi_q)) = \frac{-4V_0 [1 - V_0 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a, a)] \sin^2(\chi_q m a)}{K_q^{(j)} \left[ (1 - V_0 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a, a))^2 - (2V_0 \sin^2(\chi_q m a) / K_q^{(j)})^2 \right]}. \quad (2.12)$$

На рисунке 2.1 приведены результаты численных расчётов сечений рассеяния и фазовых сдвигов (номер кривой равен индексу уравнения  $j$ ).



a – сечения рассеяния; b – фазовые сдвиги

Рисунок 2.1 – Сечения рассеяния и соответствующие им фазовые сдвиги для  $\delta$ -потенциала как функции быстроты, рассчитанные при  $m=1$ ,  $a=5$ ,  $V_0=2$

Как видно на рисунке 2.1a),  $\sigma_{0(j)}(\chi_q) \rightarrow 0$  при  $\chi_q \rightarrow \infty$ , что естественно. Видно также, что сечения рассеяния могут быть равны нулю при некоторых конечных значениях быстроты. В нерелятивистской теории аналогичный эффект обращения в ноль сечения рассеяния при конечных значениях импульса известен как эффект Рамзауэра [14, 15]. Сечения (2.7) равны нулю, если выполняется одинаковое для всех уравнений условие

$$\chi_q m a = \pi n, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

Из этого условия следует, что число нулей каждой амплитуды рассеяния бесконечно, и они отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии.

## 2.2 Случай связанных состояний

Найдём теперь решения уравнений для связанных состояний (1.16), в случае потенциала (2.1). ВФ связанных состояний имеют вид

$$\psi_{(j)}(i w_q, r) = V_0 G_{(j)}(i w_q, r, a) \psi_{(j)}(i w_q, a). \quad (2.14)$$

Отличные от нуля величины  $\psi_{(j)}(i w_q, a)$  существуют, только если выполняются следующие условия:

$$V_{0(j)} = [G_{(j)}(i w_q, a, a)]^{-1} = [G_{(j)}(i w_q, 0) - G_{(j)}(i w_q, 2a)]^{-1}, \quad (2.15)$$

которые являются условиями квантования для величины  $w_q$  (по сути условиями квантования энергии  $2E_q = 2m \cos w_q$ ). В выражениях (2.15) параметр потенциала  $V_0$  представлен как функция энергетического

параметра  $w_q$ . Разумеется, было бы удобнее, чтобы величина  $w_q$  (или  $E_q$ ) была функцией  $V_0$ , но в рассматриваемом случае это невозможно. Для всех четырёх уравнений условия (2.15) имеют следующий вид:

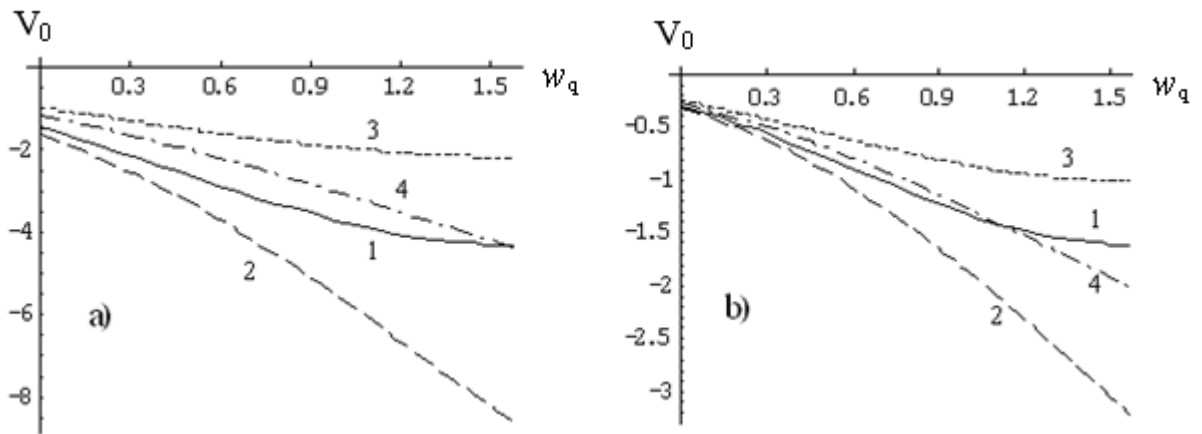
$$V_{0(1)} = \frac{\pi m \sin 2w_q}{2w_q + \pi [2\text{sh}^2(w_q ma) - \text{sh}(2w_q ma) \text{cth}(\pi ma)]}; \quad (2.16)$$

$$V_{0(2)} = \frac{\pi m \sin 2w_q}{w_q + \pi \left[ \frac{\text{sh}^2(\pi ma/2) \sin w_q}{\text{ch}(\pi ma)} + 2\text{sh}^2(w_q ma) - \text{sh}(2w_q ma) \text{cth}(2\pi ma) \right]};$$

$$V_{0(3)} = \frac{2m \sin w_q}{2\text{sh}^2(w_q ma) - \text{th}(\pi ma) \text{sh}(2w_q ma)};$$

$$V_{0(4)} = \frac{2\pi m \sin w_q}{w_q + \pi [2\text{sh}^2(w_q ma) - \text{sh}(w_q ma) \text{cth}(2\pi ma)]}.$$

Из выражений (2.16) следует, что связанные состояния могут существовать только, если  $V_0 < 0$ . На рисунке 2.2 представлены результаты численных расчётов зависимостей  $V_0(w_q)$  заданных формулами (2.16). На рисунке видно, что при моделировании взаимодействия  $\delta$ -потенциалом может существовать только один энергетический уровень (одно значение  $w_q$  при фиксированных остальных параметрах).



а – условия квантования при  $m=1$ ,  $a=1$ ;  
б – условия квантования при  $m=0,5$ ,  $a=2$

Рисунок 2.2 – Условия квантования энергии связанных состояний для  $\delta$ -потенциала

Неизвестные величины  $\psi_{(j)}(iw_q, a)$  в ВФ (2.14) могут быть определены из условия нормировки, которое было выбрано в нерелятивистской форме.

## 2.3 Нерелятивистский предел

Определим теперь нерелятивистский предел полученных для потенциала « $\delta$ -сфера» результатов. В этом пределе полученные волновые функции (2.2), амплитуды рассеяния (2.5) и условия квантования (2.16) имеют одинаковый для всех рассматриваемых уравнений вид

$$\lim_{\substack{\chi_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} \psi_{(j)}(\chi_q, r) = \psi_{(0)}(q, r) = \sin(qr) + \frac{V_0 \sin(qa) G_{(0)}(q, r, a)}{q + V_0 \sin(qa) \exp(iqa)}, \quad (2.17)$$

$$\lim_{\substack{\chi_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} f_{(j)}(\chi_q) = f_{(0)}(q) = \frac{-V_0 \sin^2(qa)}{q[q + V_0 \sin(qa) \exp(iqa)]}, \quad (2.18)$$

$$\lim_{\substack{w_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} V_{0(j)}(w_q) = V_{0(0)}(\kappa) = \frac{-2\kappa}{1 - \exp(-\kappa a)}. \quad (2.19)$$

Выражения (2.17) – (2.19) совпадают с результатами, полученными на основании решения уравнения Шрёдингера [16].

## Выводы по теме 2

В этой теме получены точные решения парциальных уравнений для  $s$ -состояний (состояний рассеяния и связанных состояний) при моделировании взаимодействия  $\delta$ -потенциалом. На основании найденных ВФ состояний рассеяния получены амплитуды рассеяния. Произведен анализ амплитуд рассеяния и условий квантования энергии связанных состояний, в результате которого доказано условие унитарности амплитуд рассеяния и условия обращения амплитуд в нуль. Нерелятивистский предел полученных выражений даёт одинаковые результаты, которые совпадают с соответствующими результатами, найденными при решении уравнения Шрёдингера.

## Вопросы для самоконтроля по теме 2

1. Почему потенциал (2.1) называется « $\delta$ -сфера»?
2. Получите выражение для релятивистских амплитуд (2.4).
3. Докажите эквивалентность равенств (2.8) и (2.9).
4. Используя общее выражение (2.15), получите условия квантования энергии для конкретных значений  $j$  (2.16).

### 3. Релятивистские двухчастичные одномерные уравнения с потенциалом « $n$ -ая производная $\delta$ -функции»

#### 3.1 Нахождение ВФ состояний рассеяния

Рассмотрим решения одномерных уравнений для состояний рассеяния (1.22) с потенциалами вида

$$V(\rho) = V_n \delta^{(n)}(\rho), \quad (3.1)$$

где  $V_n$  – вещественная постоянная ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Подставив (3.1) в уравнения и используя правила интегрирования выражений, содержащих  $n$ -ую производную  $\delta$ -функции, получим

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + (-1)^n V_n \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \rho'} \right)^n (G_{(j)}(\chi_q, \rho - \rho') \psi_{(j)}(\chi_q, \rho')) \right]_{\rho'=0}, \quad (3.2)$$

из которых с учётом формулы для производной  $n$ -го порядка от произведения двух функций следуют формулы

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_n \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s G_{(j)}^{(n-s)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(s)}(\chi_q, 0), \quad (3.3)$$

где  $C_n^s = \frac{n!}{s!(n-s)!}$  – биномиальные коэффициенты.

Для определения величин  $\psi_{(j)}^{(s)}(\chi_q, 0)$  необходимо найти производные функций (3.3) до  $n$ -го порядка включительно, взять эти  $n+1$  формул при  $\rho=0$  и решить возникающую при этом алгебраическую систему уравнений относительно  $\psi_{(j)}^{(s)}(\chi_q, 0)$ . Осуществление этой процедуры возможно благодаря свойству бесконечной дифференцируемости всех релятивистских ФГ (1.13) в точке  $\rho=0$ . Нерелятивистская ФГ уравнения Шрёдингера  $g_{(0)}(q, x) = -i \exp(iq|x|)/2q$  этим свойством не обладает.

Асимптотики ФГ (1.13) и их производных при  $\rho \rightarrow \pm\infty$  имеют вид:

$$G_{(j)}^{(s)}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty} \cong \frac{-i(\pm i\chi_q m)^s}{K_q^{(j)}} \exp(\pm i\chi_q m \rho). \quad (3.4)$$

Используя (3.4) легко найти асимптотики для ВФ (3.3) при  $\rho \rightarrow \pm\infty$ :

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty} \cong \exp(i\chi_q m \rho) + B_{(j)}^{\pm} \exp(\pm i\chi_q m \rho), \quad (3.5)$$

где введены обозначения

$$B_{(j)}^{\pm} = \frac{i}{K_q^{(j)}} V_n \sum_{s=0}^n (-1)^{s+1} C_n^s (\pm i \chi_q m)^{n-s} \psi_{(j)}^{(s)}(\chi_q, 0). \quad (3.6)$$

Коэффициенты отражения  $R_j$  и прохождения  $D_j$  определяются через амплитудные коэффициенты  $B_{(j)}^{\pm}$  следующим образом:

$$R_j = |B_{(j)}^{-}|^2; \quad D_j = |B_{(j)}^{+} + 1|^2. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь решения уравнений (1.22), полученные при некоторых первых значениях  $n$ .

При  $n=1$  имеем

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i \chi_q m \rho) + V_1 \{ \psi_{(j)}(\chi_q, 0) G_{(j)}^{(1)}(\chi_q, \rho) - \psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0) G_{(j)}(\chi_q, \rho) \}. \quad (3.8)$$

Подставив, затем, найденные указанным выше образом значения  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$  и  $\psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0)$  в выражения

$$B_{(j)}^{\pm} = \frac{V_1}{K_q^{(j)}} \{ i \psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0) \pm \chi_q m \psi_{(j)}(\chi_q, 0) \}, \quad (3.9)$$

получим:

$$B_{(j)}^{+} = i V_1^2 \frac{G_{(j)}^{(2)} - (\chi_q m)^2 G_{(j)}^{(0)}}{K_q^{(j)} (1 + V_1^2 G_{(j)}^{(0)} G_{(j)}^{(2)})}, \quad B_{(j)}^{-} = V_1 \frac{i V_1 (G_{(j)}^{(2)} + (\chi_q m)^2 G_{(j)}^{(0)}) - 2 \chi_q m}{K_q^{(j)} (1 + V_1^2 G_{(j)}^{(0)} G_{(j)}^{(2)})}. \quad (3.10)$$

где  $G_{(j)}^{(n)} = G_{(j)}^{(n)}(\chi_q, 0)$ .

После нахождения констант  $G_{(j)}^{(0)}$ ,  $G_{(j)}^{(2)}$  для каждого  $j$ , получим явные выражения для коэффициентов прохождения и отражения. Коэффициенты  $D_j$ , соответствующие всем четырём функциям Грина, имеют вид

$$D_1 = \frac{(3\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q - V_1^2 \chi_q^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2))^2}{(3\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - 4\chi_q^2))^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (8\chi_q^2 - \pi^2)^2}, \quad (3.11)$$

$$D_2 = \frac{d_-^2}{d_+^2 + d^2}, \quad D_3 = \frac{(4\text{sh}^2 \chi_q - V_1^2 \chi_q^2)^2}{(4\text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2)^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2},$$

$$D_4 = \frac{(12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q - V_1^2 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2))^2}{(12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2))^2 + 4V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (2\chi_q^2 - \pi^2)^2},$$

где

$$d_{\pm} = 48\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 [(2\chi_q + \pi \text{sh} \chi_q)(8\chi_q(2\pi^2 - \chi_q^2) - 3\pi^3 \text{sh} \chi_q) \pm 48\pi^2 \chi_q^2],$$

$$d = 6\pi^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2) \text{sh} \chi_q + 32\pi \chi_q (2\chi_q^2 - \pi^2).$$

Соответствующие выражения для коэффициентов отражения:

$$R_1 = V_1^2 \frac{36\pi^4 \chi_q^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2)^2}{\left[ 3\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - 4\chi_q^2) \right]^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (8\chi_q^2 - \pi^2)^2}, \quad (3.12)$$

$$R_2 = \frac{r_1^2 + r_-^2}{r_2^2 + r_+^2}, \quad R_3 = V_1^2 \frac{16\chi_q^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \pi^2 \chi_q^2}{\left[ 4\operatorname{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2 \right]^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2},$$

$$R_4 = V_1^2 \frac{144\pi^4 \chi_q^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q + 4V_1^2 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2)^2}{\left[ 12\pi^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2) \right]^2 + 4V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (2\chi_q^2 - \pi^2)^2},$$

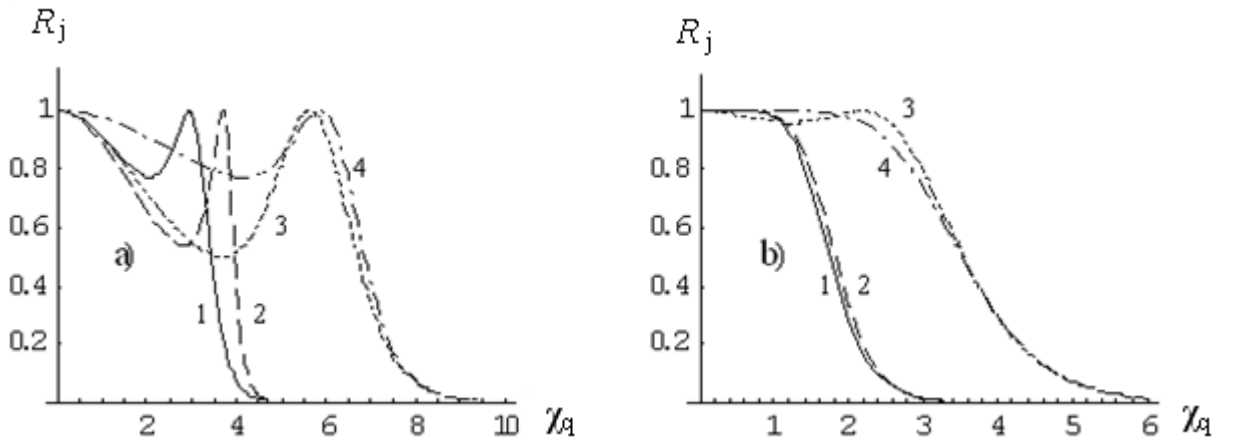
где

$$r_1 = 384V_1\pi^2\chi_q \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch}^2 \chi_q, \quad r_2 = 192\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q \operatorname{ch}^2 \chi_q +$$

$$+ V_1^2 \left[ 64\chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2) \operatorname{ch}^2 \chi_q + 4\pi\chi_q (5\pi^2 - 4\chi_q^2) \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch} \chi_q - 3\pi^4 \operatorname{sh}^2 2\chi_q \right],$$

$$r_{\pm} = 4V_1^2 \pi \operatorname{ch} \chi_q \left[ 3\pi(4\chi_q^2 \pm \pi^2) \operatorname{sh} 2\chi_q + 16\chi_q (3\chi_q^2 \pm (\chi_q^2 - 2\pi^2)) \operatorname{ch} \chi_q \right].$$

Результаты численных расчётов приведенных в (3.12) коэффициентов отражения, показаны на рисунке 3.1 (номер кривой равен индексу уравнения). Отметим, что во всех численных расчётах мы полагали  $m=1$ .



а – коэффициенты отражения при  $V_1 = 50$ ;

б – коэффициенты отражения при  $V_1 = 4$

Рисунок 3.1 – Коэффициенты отражения для потенциала  $\delta^{(1)}$  как функции быстроты

Рассмотрим теперь случай, когда  $n=2$ . Для потенциала «вторая производная  $\delta$ -функции» формула (3.3) принимает вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_2 \left\{ G_{(j)}^{(2)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}(\chi_q, 0) - \right. \quad (3.13)$$

$$-2G_{(j)}^{(1)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0) + G_{(j)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(2)}(\chi_q, 0) \}.$$

После нахождения констант  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$ ,  $\psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0)$ ,  $\psi_{(j)}^{(2)}(\chi_q, 0)$  и их подстановки в формулы для амплитуд  $B_{(j)}^\pm$ , получим

$$B_{(j)}^\pm = \frac{iV_2}{K_q^{(j)} \Delta_{(j)}} \left[ (\chi_q m)^2 \Delta_{1(j)} \pm 2i\chi_q m \Delta_{2(j)} - \Delta_{3(j)} \right], \quad (3.14)$$

где детерминанты, возникающие при решении системы уравнений относительно  $\psi_{(j)}^{(s)}(\chi_q, 0)$ , таковы:

$$\Delta_{(j)} = (1 + 2V_2 G_{(j)}^{(2)}) (V_2^2 G_{(j)} G_{(j)}^{(4)} - (1 - V_2 G_{(j)}^{(2)})^2); \quad (3.15)$$

$$\Delta_{1(j)} = (1 + 2V_2 G_{(j)}^{(2)}) (V_2 (G_{(j)}^{(2)} + (\chi_q m)^2 G_{(j)}) - 1);$$

$$\Delta_{2(j)} = i\chi_q m (V_2^2 G_{(j)} G_{(j)}^{(4)} - (1 - V_2 G_{(j)}^{(2)})^2);$$

$$\Delta_{3(j)} = (1 + 2V_2 G_{(j)}^{(2)}) ((\chi_q m)^2 (1 - V_2 G_{(j)}^{(2)}) - V_2 G_{(j)}^{(4)}).$$

Выражения для амплитуд, коэффициентов  $R_j$  и  $D_j$ , полученные для конкретных ФГ, имеют громоздкий вид. Поэтому приведём только одно выражение для коэффициента отражения в случае  $j = 3$ :

$$R_3 = \frac{f_1^2}{f_2^2 + f_3^2}, \quad (3.16)$$

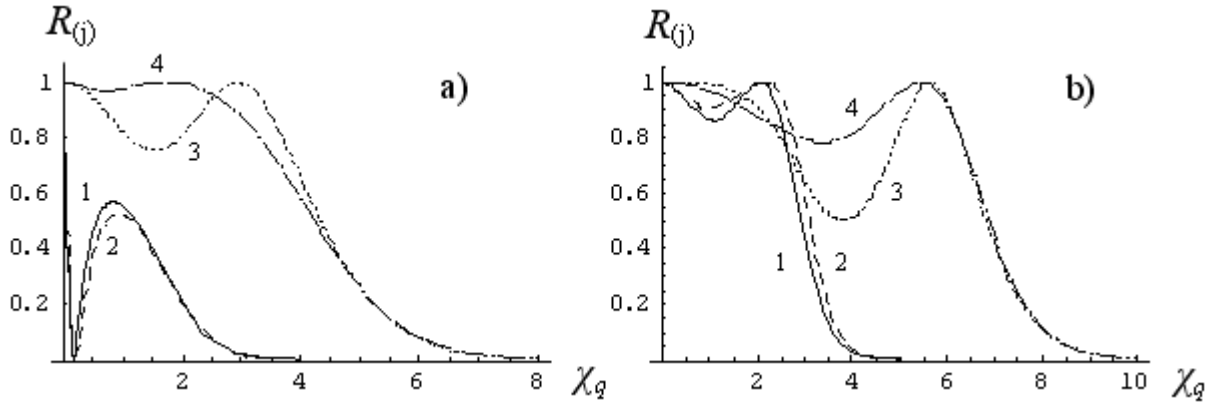
где

$$f_1 = 8mV_2 \chi_q^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q + m^2 V_2^2 \pi^3 \chi_q \operatorname{sh} \chi_q + m^3 V_2^3 \pi^2 \chi_q^2 (\chi_q^2 + \pi^2),$$

$$f_2 = 4 \operatorname{sh}^3 \chi_q + m^2 V_2^2 \chi_q^2 (4\chi_q^2 - 3\pi^2) \operatorname{sh} \chi_q + 2m^3 V_2^3 \pi^3 \chi_q^3,$$

$$f_3 = m^2 V_2^2 \pi \chi_q (\pi^2 + 8\chi_q^2) \operatorname{sh} \chi_q + m^3 V_2^3 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 - \chi_q^2).$$

На рисунке 3.2 проиллюстрирована зависимость всех коэффициентов отражения от быстроты, рассчитанная для разных уравнений. Как и ранее, номер кривой соответствует индексу уравнения  $j$ .



а – коэффициенты отражения при  $V_2 = -0,8$ ;

б – коэффициенты отражения при  $V_2 = -4$

Рисунок 3.2 – Зависимость коэффициентов отражения для потенциала  $\delta^{(2)}$  от быстроты

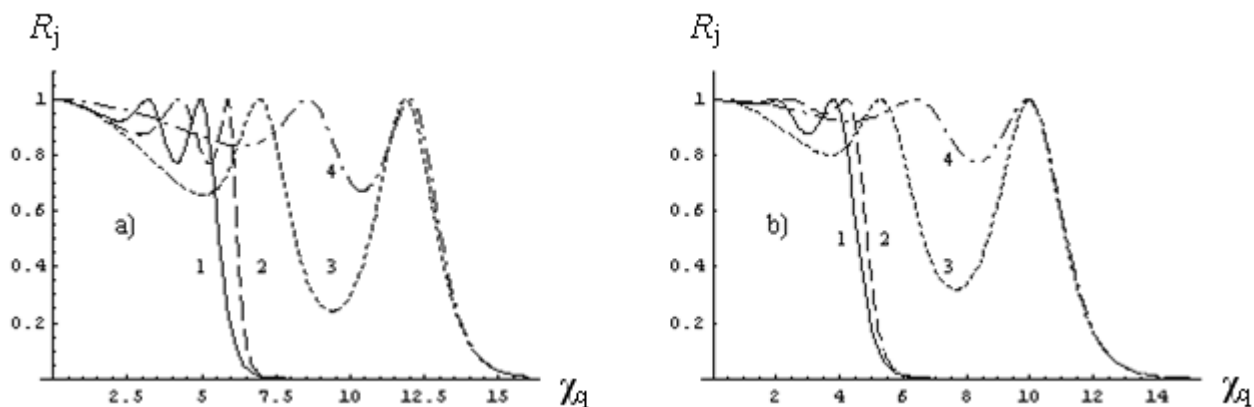
Рассмотрим теперь случай  $n=3$ . Формула (3.3) для этого потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_3 \{ G_{(j)}^{(3)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}(\chi_q, 0) - \\ - 3G_{(j)}^{(2)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0) + 3G_{(j)}^{(1)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(2)}(\chi_q, 0) - G_{(j)}(\chi_q, \rho) \psi_{(j)}^{(3)}(\chi_q, 0) \}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

а выражения для амплитуд (3.6)

$$\begin{aligned} B_{(j)}^{\pm} = \frac{iV_3}{K_q^{(j)}} \left[ \psi_{(j)}^{(3)}(\chi_q, 0) \mp 3i(\chi_q m) \psi_{(j)}^{(2)}(\chi_q, 0) - \right. \\ \left. - 3(\chi_q m)^2 \psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0) \pm i(\chi_q m)^3 \psi_{(j)}(\chi_q, 0) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

После нахождения вышеуказанным методом констант  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$ ,  $\psi_{(j)}^{(1)}(\chi_q, 0)$ ,  $\psi_{(j)}^{(2)}(\chi_q, 0)$ ,  $\psi_{(j)}^{(3)}(\chi_q, 0)$  и подстановки их в (3.6), получим формулы для амплитуд  $B_{(j)}^{\pm}$ . Явный вид этих формул и формул для коэффициентов отражения и прохождения мы не приводим в силу их громоздкости. О характере изменения соответствующих функций можно судить по рисунку 3.3, на которой приведены результаты численных расчётов коэффициентов отражения и, как и ранее, номер кривой соответствует индексу уравнения  $j$ .



a – коэффициенты отражения при  $V_3 = 20$ ;

b – коэффициенты отражения при  $V_3 = -5$

Рисунок 3.3 – Коэффициенты отражения для потенциала  $\delta^{(3)}$  как функции быстроты

В следующем подразделе произведем анализ полученных решений и установим особенности поведения коэффициентов отражения и прохождения при изменении быстроты относительного движения частиц.

## 3.2 Свойства коэффициентов отражения и прохождения

Можно показать, что для рассмотренных потенциалов (как и для потенциала  $V(\rho) = V_0\delta(\rho)$ ) коэффициенты  $D_j$  и  $R_j$  связаны друг с другом тождеством  $D_j + R_j = 1$ . Простой анализ показывает, что это тождество является следствием свойства производных ФГ (1.13):

$$\text{Im} G_{(j)}^{(2N)} = (-1)^{N+1} (\chi_q m)^{2N} / K_q^{(j)}. \quad (3.19)$$

Для потенциала (3.1) существенными оказываются свойства (3.19) при  $N = 0, 1, 2, \dots, n$ . Свойство (3.19) аналогично свойству (2.9) трёхмерных функций Грина, в силу которого обеспечивается унитарность амплитуд рассеяния в случае потенциала « $\delta$ -сфера».

На рисунках 3.1 – 3.3, демонстрирующих зависимости  $R_j(\chi_q)$ , и из выражений (3.12), (3.16) видно, что при  $\chi_q \rightarrow \infty$  во всех случаях  $R_j \rightarrow 0$ . Однако, как видно из графиков, обращение коэффициента отражения в ноль (полное прохождение) возможно и при конечных значениях быстроты налетающей частицы  $\chi_q$ . Аналогично, из графиков видно, что в пределе  $\chi_q \rightarrow 0$  во всех случаях коэффициент  $R_j \rightarrow 1$ . Однако обращение коэффициента  $R_j$  в единицу (полное отражение) возможно для всех рассмотренных  $n, j$  и при  $\chi_q \neq 0$ . Изучим теперь условия полного

прохождения и полного отражения более детально. Можно показать, что условия существования полного прохождения и полного отражения для рассмотренных здесь  $n$  и  $j$  выполняются при некотором соотношении между параметрами  $V_{n(j)}$ ,  $m$  и  $\chi_q$ . Например, в случае потенциала  $V(\rho) = V_2 \delta^{(2)}(\rho)$  для всех  $j$  условия полного прохождения имеют вид:

$$V_{2(1)} m = \frac{3\pi \operatorname{sh} 2\chi_q}{4\chi_q [(3\pi^2 + 4\chi_q^2)^2 \chi_q^2 + \pi^6]} \left[ 16\chi_q^4 - \pi^4 \pm \sqrt{\phi(\chi_q)} \right], \quad (3.20)$$

где  $\phi(\chi_q) = (\pi^4 - 16\chi_q^4)^2 - 160\chi_q^2[(3\pi^2 + 4\chi_q^2)^2 \chi_q^2 + \pi^6]$ ;

$$V_{2(2)} m = \frac{12\pi \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch} \chi_q}{\phi_2(\chi_q)} \left[ -\phi_1(\chi_q) \pm \sqrt{\phi_1(\chi_q)^2 - 640\chi_q^2 \phi_2(\chi_q)} \right],$$

где  $\phi_1(\chi_q) = 512\chi_q (\pi^4 - \chi_q^4) \operatorname{ch} \chi_q - 75\pi^5 \operatorname{sh} 2\chi_q + 120\pi\chi_q^2 (\pi^2 - 2\chi_q^2) \operatorname{sh} 2\chi_q$ ,

$\phi_2(\chi_q) = 45\pi^4 [(3\pi^2 - 4\chi_q^2)^2 - 4\pi^4] \operatorname{sh}^2 2\chi_q + 96\pi\chi_q [16\chi_q^2 (3\pi^2 + \chi_q^2)^2 - \pi^4 (41\pi^2 + 105\chi_q^2)] \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch} \chi_q + 4096\chi_q^2 [4\pi^6 + \chi_q^2 (3\pi^2 + \chi_q^2)^2] \operatorname{ch}^2 \chi_q$ ;

$$V_{2(3)} m = \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{2\pi\chi_q (\chi_q^2 + \pi^2)} \left[ -\pi^2 \pm \sqrt{\pi^4 - 32\chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2)} \right],$$

$$V_{2(4)} m = \frac{3\pi \operatorname{sh} \chi_q}{\chi_q [(3\pi^2 + \chi_q^2)^2 \chi_q^2 + 4\pi^6]} \left[ \chi_q^4 - \pi^4 \pm \sqrt{\phi(\chi_q)} \right],$$

где  $\phi(\chi_q) = (\pi^4 - \chi_q^4)^2 - 10\chi_q^2 [(3\pi^2 + \chi_q^2)^2 \chi_q^2 + 4\pi^6]$ .

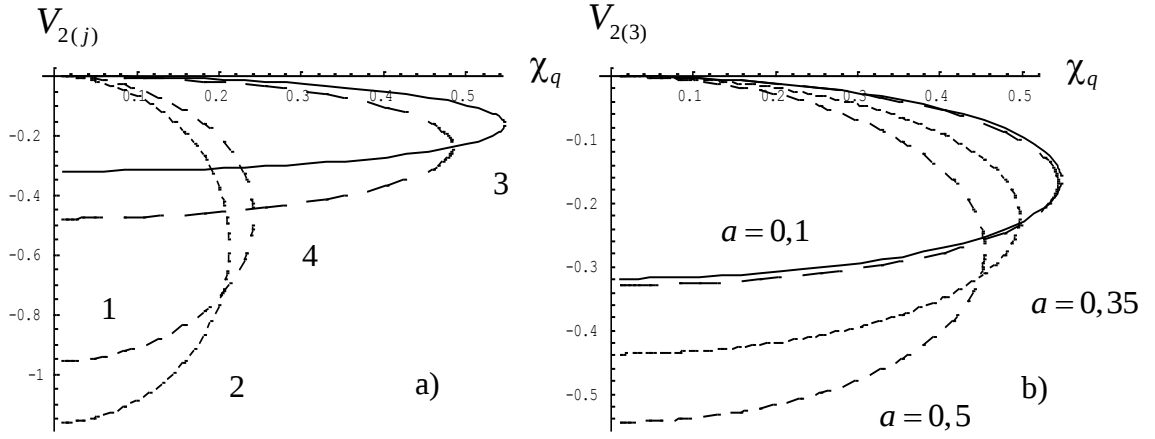
На рисунке 3.4а) изображены графики всех четырёх функций. На них видно, что полное прохождение возможно для ограниченного интервала значений  $\chi_q$ . При этом каждому  $\chi_q$  из этого интервала соответствует два значения параметра  $V_{2(j)} < 0$ .

Условия полного прохождения для модельного потенциала «вторая производная  $\delta$ -функции» аналогичны условиям полного прохождения для потенциала «суперпозиция трёх  $\delta$ -функций»:

$$V(\rho) = \frac{V_2}{a^2} [\delta(\rho + a) - 2\delta(\rho) + \delta(\rho - a)] \quad (3.21)$$

при малых  $a$ . Эта аналогия проиллюстрирована на рисунке 3.4 б).

Для потенциалов «первая и третья производная  $\delta$ -функции» условия, аналогичные (3.20), не выполняются, то есть полное прохождение невозможно.



а – потенциал типа «вторая производная  $\delta$ -функции»;  
 б – потенциал типа «суперпозиция трёх  $\delta$ -функций» при некоторых значениях  $a$  и «вторая производная  $\delta$ -функций» (сплошная линия) для  $j = 3$

Рисунок 3.4 – Условие полного прохождения для потенциалов разного вида

Определим теперь условия равенства коэффициента отражения единице. Нетрудно показать, что равенство  $R_j = 1$  приводит к алгебраическому уравнению  $(n+1)$ -ой степени относительно безразмерного параметра  $(m^{n-1}V_n)$

$$a_{n+1}^{(n,j)}(m^{n-1}V_n)^{n+1} + a_n^{(n,j)}(m^{n-1}V_n)^n + \dots + a_1^{(n,j)}(m^{n-1}V_n) + a_0^{(n,j)} = 0, \quad (3.22)$$

в котором коэффициенты  $a_0^{(n,j)}, \dots, a_{n+1}^{(n,j)}$  зависят от вида потенциала и уравнения. Вещественные решения этого уравнения, представленные как функции быстроты, и будут условиями полного отражения. Для потенциала «производная  $\delta$ -функции» эти условия имеют вид

$$V_{1(1)}^2 = \frac{3\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q}{\chi_q^2[\pi^2 + 4\chi_q^2]}, \quad V_{1(3)}^2 = \frac{4\text{sh}^2 \chi_q}{\chi_q^2}, \quad V_{1(4)}^2 = \frac{12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q}{\chi_q^2[\pi^2 + \chi_q^2]}, \quad (3.23)$$

$$V_{1(2)}^2 = \frac{48\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q}{16\chi_q^2(\pi^2 + \chi_q^2) + 3\pi^4 \text{sh}^2 2\chi_q + 2\pi\chi_q(4\chi_q^2 - 5\pi^2)\text{sh} \chi_q}.$$

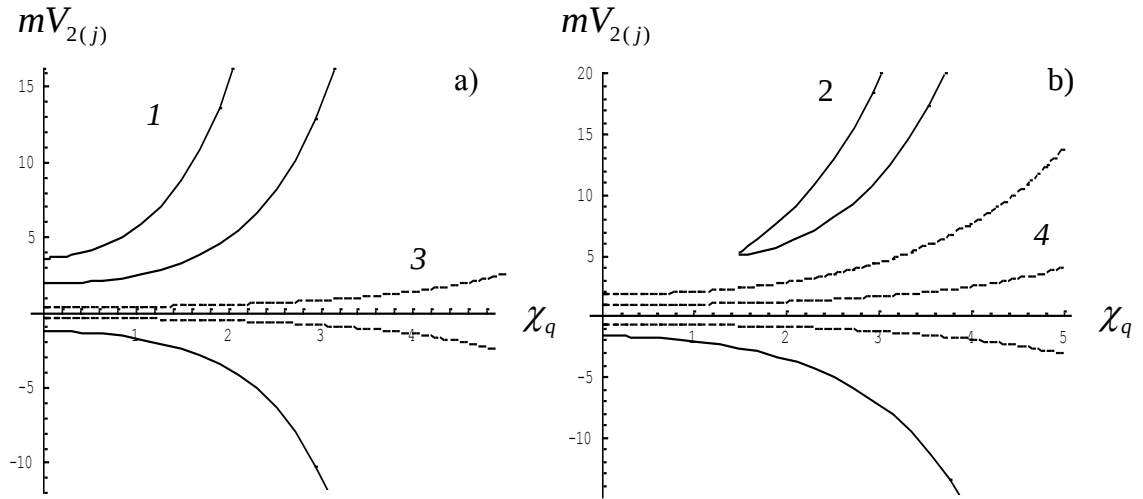
Как следует из (3.23), обращение коэффициента отражения в единицу возможно при двух отличающихся знаком величинах  $V_1$  для каждого  $\chi_q$ .

Условия, аналогичные (3.23), выполняются и для потенциалов «вторая и третья производная  $\delta$ -функции», однако, в виду их громоздкости приведём здесь лишь формулы для случая  $j = 3$ :

$$mV_{2(3)} = \frac{\pm 2\text{sh} \chi_q}{\chi_q \sqrt{3\pi^2 + 4\chi_q^2}}, \quad (3.24)$$

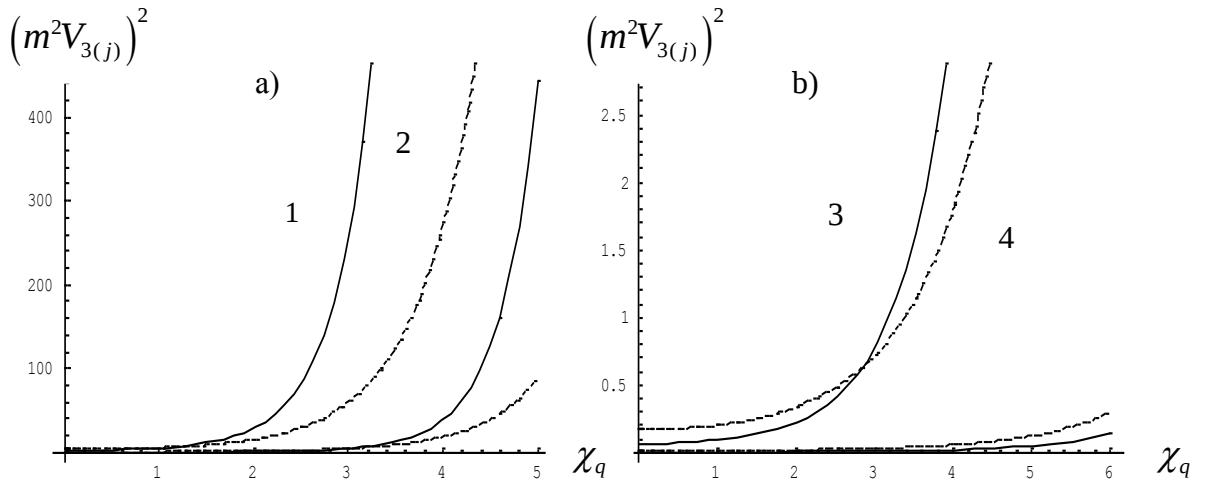
$$(m^2 V_{3(3)})^2 = \frac{\left(3\pi^2 + 4\chi_q^2 \pm \sqrt{21\pi^4 + 36\pi^2\chi_q^2 + 16\chi_q^4}\right)^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q}{9\pi^4 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2)^2}.$$

На рисунках 3.5 и 3.6 соответственно приведены графики функций  $mV_{2(j)}$  и  $(mV_{3(j)})^2$ , полученных для всех четырёх видов уравнений.



а – для уравнений  $j=1$  (сплошная линия) и  $j=3$  (пунктирная линия);  
 б – для уравнений  $j=2$  (сплошная линия) и  $j=4$  (пунктирная линия)

Рисунок 3.5 – Условия полного отражения для потенциала  
 «вторая производная  $\delta$ -функции»



а – для уравнений  $j=1$  (сплошная линия) и  $j=2$  (пунктирная линия);  
 б – для уравнений  $j=3$  (сплошная линия) и  $j=4$  (пунктирная линия)

Рисунок 3.6 – Условия полного отражения для потенциала  
 «третья производная  $\delta$ -функции»

Как видно на рисунках (3.6), (3.7) и как следует из выражений, для фиксированного значения  $\chi_q$  полное отражение наблюдается при  $n+1$  значении  $V_n$ . Однако в случае, когда  $n=2$ ,  $j=3$ , для каждого значения  $\chi_q$ , выполняется равенство  $R_j=1$  только при двух значениях  $V_2$ . Это объясняется тем, что в уравнении (3.22), которое в данном случае является кубическим, коэффициент  $a_3^{(2,3)}$  равен нулю. Следовательно, кубическое уравнение обращается в квадратное, имеющее два вещественных, противоположных по знаку корня  $mV_2$ . Обращение коэффициента  $a_3^{(2,3)}$  в нуль обусловлено свойством функции Грина  $G_{(3)}(\chi_q, \rho)$  в точке  $\rho=0$

$$4\text{sh}^2 \chi_q \left( \left( \text{Re} G_{(3)}^{(2)} \right)^3 - \text{Re} G_{(3)} \text{Re} G_{(3)}^{(2)} \text{Re} G_{(3)}^{(4)} \right) + \\ + \chi_q^2 \text{Re} G_{(3)}^{(4)} + 2m^2 \chi_q^4 \text{Re} G_{(3)}^{(2)} + m^4 \chi_q^6 \text{Re} G_{(3)} = 0. \quad (3.25)$$

Явление полного отражения от потенциала (3.1) аналогично полному отражению от потенциала  $\delta(\rho)$  и не имеет нерелятивистских аналогов.

### Выводы по теме 3

Получены точные решения релятивистских двухчастичных одномерных уравнений для состояний рассеяния в случае потенциалов « $n$ -ая производная  $\delta$ -функции». На основании найденных волновых функций вычислены коэффициенты отражения и прохождения и произведен анализ полученных выражений: найдены условия равенства единице суммы коэффициентов отражения и прохождения, условия полного отражения и полного прохождения.

### Вопросы для самоконтроля по теме 3

1. По какому правилу нужно интегрировать функции, содержащие  $n$ -ую производную  $\delta$ -функции?
2. Получите выражения (3.2) и (3.3).
3. Докажите асимптотические выражения для функций Грина (3.4).
4. Покажите, что сумма коэффициентов прохождения и отражения (3.11) и (3.12) равна единице.
5. Докажите эквивалентность тождеств  $D_j + R_j = 1$  и (3.19).

## 4. Релятивистские двухчастичные одномерные уравнения с нелинейным $\delta$ -потенциалом

### 4.1 Нелинейный $\delta$ -потенциал

Найдём решения одномерных двухчастичных уравнений (1.22), (1.23) с потенциалом, пропорциональным квадрату модуля волновой функции

$$V(\rho) = |\psi_{(j)}(\chi_q, \rho)|^2 U(\rho). \quad (4.1)$$

Уравнения (1.22) и (1.23) после подстановки в них (4.1) можно представить в виде нелинейных

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho' G_{(j)}(\chi_q, \rho - \rho') U(\rho') |\psi_{(j)}(\chi_q, \rho')|^2 \psi_{(j)}(\chi_q, \rho'), \quad (4.2)$$

$$\psi_{(j)}(i w_q, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho' G_{(j)}(i w_q, \rho - \rho') U(\rho') \psi_{(j)}^3(i w_q, \rho'). \quad (4.3)$$

Без потери общности будем считать  $\psi_{(j)}(i w_q, \rho)$  для связанных состояний вещественной, положительно определённой функцией

Рассмотрим решение уравнений (4.2) и (4.3) предполагая, что

$$U(\rho) = \lambda \delta(\rho), \quad (4.4)$$

где  $\lambda$  – постоянная величина.

При этом выделим в две отдельные задачи поиск и анализ решений для состояний рассеяния и связанных состояний.

### 4.2 Случай состояний рассеяния

Решения уравнений (4.2) для (4.4) имеют вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + \lambda |\psi_{(j)}(\chi_q, 0)|^2 \psi_{(j)}(\chi_q, 0) G_{(j)}(\chi_q, \rho), \quad (4.5)$$

где  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$  – неизвестные величины.

Для нахождения  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$  возьмём (4.5) в точке  $\rho = 0$  и представим их как

$$\psi_{(j)}(\chi_q, 0) = A_j + i B_j. \quad (4.6)$$

С учётом (4.6) выделим мнимую и действительную части равенства (4.5) при  $\rho = 0$ , примем во внимание соотношение  $G_{(j)}(\chi_q, 0) = (\xi_j - i\eta_j)/K_q^{(j)}$  и получим систему двух уравнений относительно неизвестных  $A_j$  и  $B_j$ :

$$\begin{cases} A_j = 1 + \frac{\lambda}{K_q^{(j)}}(A_j^2 + B_j^2)(\xi_j A_j + \eta_j B_j); \\ B_j = \frac{\lambda}{K_q^{(j)}}(A_j^2 + B_j^2)(\xi_j B_j - \eta_j A_j). \end{cases} \quad (4.7)$$

Из системы (4.7) легко получить уравнение для величины  $X_j = A_j^2 + B_j^2$ :

$$\frac{\lambda^2(\xi_j^2 + \eta_j^2)}{(K_q^{(j)})^2} X_j^3 - \frac{2\lambda\xi_j}{K_q^{(j)}} X_j^2 + X_j - 1 = 0. \quad (4.8)$$

Кубическое уравнение (4.8) для всех  $j$  имеет единственное вещественное решение, которое мы приведём в виде

$$X_{(j)} = \sqrt[3]{-\frac{h_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_j}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{h_j}{2} - \sqrt{\left(\frac{h_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_j}{3}\right)^3}} + \frac{2\xi_j K_q^{(j)}}{3\lambda(\xi_j^2 + \eta_j^2)}, \quad (4.9)$$

где введены обозначения

$$h_j = \frac{2\xi_j (K_q^{(j)})^3 (\xi_j^2 + 9\eta_j^2)}{27\lambda^3 (\xi_j^2 + \eta_j^2)^3} - \frac{(K_q^{(j)})^2}{\lambda^2 (\xi_j^2 + \eta_j^2)^2}; \quad f_j = \frac{(3\eta_j^2 - \xi_j^2)(K_q^{(j)})^2}{3\lambda^2 (\xi_j^2 + \eta_j^2)^2}. \quad (4.10)$$

Функции  $A_j$  и  $B_j$  выражаются через  $X_j$  посредством равенств

$$A_j = X_j - \frac{\lambda}{K_q^{(j)}} \xi_j X_j^2, \quad B_j = -\frac{\lambda}{K_q^{(j)}} \eta_j X_j^2. \quad (4.11)$$

Волновые функции (4.5) с учётом (3.4) имеют следующие асимптотики

$$\psi_{(j)}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \pm\infty} \cong \exp(i\chi_q m \rho) + C_j \exp(\pm i\chi_q m \rho), \quad (4.12)$$

где амплитуды  $C_j$  с учётом введенных обозначений имеет вид

$$C_j = \frac{\lambda X_j^2}{K_q^{(j)}} \left( i \left[ \frac{\lambda \xi_j X_j}{K_q^{(j)}} - 1 \right] - \frac{\lambda \eta_j X_j}{K_q^{(j)}} \right). \quad (4.13)$$

Введём коэффициенты прохождения  $D_j$  и отражения  $R_j$ , выраженные через  $C_j$  посредством равенств, аналогичных (3.7):

$$D_j = |1 + C_j|^2; \quad R_j = |C_j|^2. \quad (4.14)$$

Для конкретных  $j$  формулы для  $D_j$  и  $R_j$  имеют довольно громоздкий вид, поэтому мы приведём здесь эти коэффициенты лишь в случае  $j = 3$ :

$$R_3 = \frac{\lambda^2 X_3^4}{(K_q^{(3)})^2} \left( 1 + \frac{\lambda^2 X_3^2}{(K_q^{(3)})^2} \right), \quad D_3 = \frac{\lambda^2 X_3^4}{(K_q^{(3)})^2} + \left( 1 - \frac{\lambda^2 X_3^2}{(K_q^{(3)})^2} \right)^2, \quad (4.15)$$

где введено обозначение

$$X_{(3)} = \sqrt[3]{\frac{2m^2 \text{sh}^2 \chi_q}{\lambda^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{16m^2 \text{sh}^2 \chi_q}{27\lambda^2}} \right)} + \sqrt[3]{\frac{2m^2 \text{sh}^2 \chi_q}{\lambda^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{16m^2 \text{sh}^2 \chi_q}{27\lambda^2}} \right)}.$$

На рисунке 4.1 проиллюстрированы результаты численного расчета коэффициентов прохождения и отражения для каждого  $j$  при некоторых значениях  $m$  и  $\lambda$  (номер кривой на рисунках равен индексу  $j$ ).

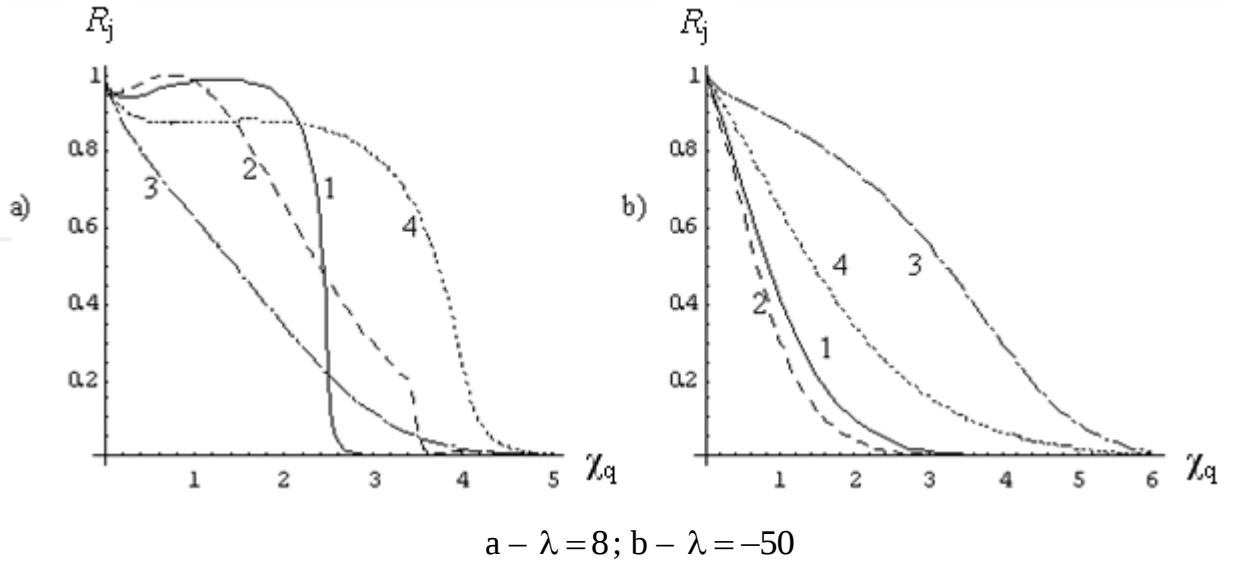


Рисунок 4.1 – Коэффициенты отражения, вычисленные при  $m = 1$

Обсудим некоторые свойства коэффициентов  $D_j$  и  $R_j$ . Можно показать, что коэффициенты удовлетворяют тождеству  $D_j + R_j = 1$ . Простой анализ показывает, что, как и в случае потенциала (3.1), это тождество выполняется в силу свойства ФГ (3.19). Как видно на рисунке 4.1, если  $\chi_q \rightarrow \infty$ , коэффициенты  $R_j$  стремятся к нулю; если же  $\chi_q \rightarrow 0$ , коэффициенты  $R_j$  стремятся к единице. Однако, как видно на том же рисунке, существуют и ненулевые значения  $\chi_q$ , при которых имеет место полное отражение ( $R_j = 1$ ). Условие возникновения полного отражения для всех  $j \neq 3$  имеет следующую форму:

$$\lambda_j = -K_q^{(j)} \eta_j / \xi_j^3. \quad (4.16)$$

Для  $j = 3$  полное отражение не наблюдается, что объясняется свойством ФГ модифицированного уравнения Логанова-Тавхелидзе

$$\xi_3 = \operatorname{Re} G_{(3)}(\chi_q, 0) = 0. \quad (4.17)$$

Для конкретных уравнений выражение (4.16) имеет вид

$$\lambda_1 = \frac{m\pi^3 \operatorname{sh} 2\chi_q}{8\chi_q^3}, \quad \lambda_2 = \frac{8m\pi^3 \operatorname{sh} 2\chi_q}{(2\chi_q + \pi \operatorname{sh} \chi_q)^3}, \quad \lambda_4 = \frac{2m\pi^3 \operatorname{sh} \chi_q}{\chi_q^3}. \quad (4.18)$$

Явление полного отражения от нелинейного  $\delta$ -потенциала аналогично полному отражению от потенциалов  $\delta(\rho)$ ,  $\delta^{(1)}(\rho)$  и не имеет нерелятивистских аналогов. Аналогично условиям полного отражения для рассмотренного здесь потенциала можно попытаться найти условия обращения коэффициента отражения в нуль при конечных значениях  $\chi_q$  (полное прохождение), однако, простой анализ показывает, что ни для каких  $j$  это явление не наблюдается.

### 4.3 Случай связанных состояний

Рассмотрим теперь случай связанных состояний. Решения уравнений (4.3) для выражения (4.4) имеют вид

$$\psi_{(j)}(i w_q, \rho) = \lambda \psi_{(j)}(i w_q, 0)^3 G_{(j)}(i w_q, \rho). \quad (4.19)$$

По аналогии с предыдущим случаем состояний рассеяния возьмём (4.19) в точке  $\rho = 0$  и, таким образом, получим алгебраическое уравнение относительно неизвестной величины  $\psi_{(j)}(\chi_q, 0)$

$$\psi_{(j)}(i w_q, 0) [\lambda G_{(j)}(i w_q, 0) \psi_{(j)}(i w_q, 0)^2 - 1] = 0. \quad (4.20)$$

Кроме  $\psi_{(j)}(i w_q, 0) = 0$ , уравнение (4.20) имеет решения

$$\psi_{(j)}(i w_q, 0) = \pm 1 / \sqrt{\lambda G_{(j)}(i w_q, 0)}. \quad (4.21)$$

С учётом (4.21) выражения (4.19) имеют следующую форму:

$$\psi_{(j)}(i w_q, \rho) = \frac{\pm \lambda}{(\lambda G_{(j)}(i w_q, 0))^{3/2}} G_{(j)}(i w_q, \rho), \quad (4.22)$$

где выбор знака определяется знаком параметра  $\lambda$ : знак плюс выбирается при положительном  $\lambda$ , знак минус – при отрицательном  $\lambda$ . Для конкретных  $j$  выражение (4.22) принимает следующий вид:

$$\psi_{(1)}(i w_q, \rho) = \frac{\mp \lambda}{m \sin 2 w_q} \left( \frac{-\pi m \sin 2 w_q}{\lambda (\pi - 2 w_q)} \right)^{3/2} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 - w_q) m \rho}{\operatorname{sh} \pi m \rho / 2}, \quad (4.23)$$

$$\psi_{(2)}(iw_q, \rho) = \pm \lambda \left( \frac{2\pi m \sin 2w_q}{\lambda(\pi \sin w_q - 2(\pi - w_q))} \right)^{3/2} \left[ \frac{(4m \cos w_q)^{-1}}{\operatorname{ch} \pi m \rho / 2} - \frac{1}{m \sin 2w_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi - w_q)m\rho}{\operatorname{sh} \pi m \rho} \right],$$

$$\psi_{(3)}(iw_q, \rho) = \frac{\mp \lambda}{2m \sin w_q} \left( \frac{-2m \sin w_q}{\lambda} \right)^{3/2} \frac{\operatorname{ch}(\pi/2 - w_q)m\rho}{\operatorname{ch} \pi m \rho / 2},$$

$$\psi_{(4)}(iw_q, \rho) = \frac{\mp \lambda}{2m \sin w_q} \left( \frac{-2\pi m \sin w_q}{\lambda(\pi - w_q)} \right)^{3/2} \frac{\operatorname{sh}(\pi - w_q)m\rho}{\operatorname{sh} \pi m \rho}.$$

Из выражений (4.23) видно, что условие вещественности волновых функций выполняется при  $\lambda < 0$ . На рисунке 4.2 изображены графики волновых функций при некоторых значениях параметров  $m$ ,  $\lambda$ ,  $w_q$  (номер кривой равен индексу  $j$ ).

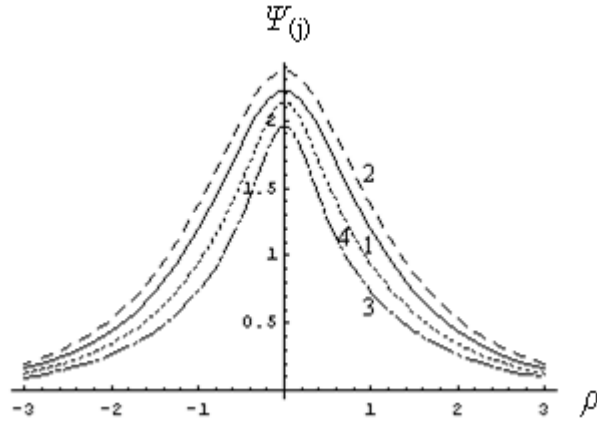


Рисунок 4.2 – Волновые функции при  $m = 2$ ,  $w_q = 0,5$ ,  $\lambda = -0,5$

Воспользовавшись условием нормировки волновых функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{(j)}^2(iw_q, \rho) d\rho = 1 \quad (4.24)$$

получим соотношения, связывающие быстроту  $w_q$ , массу  $m$  и параметр  $\lambda$ , являющиеся, по сути, условиями квантования энергии. Эти условия имеют следующий вид:

$$\lambda_{(1)} = \frac{-2\pi^2}{(\pi - 2w_q)^3} \left[ \sin 2w_q + (\pi - 2w_q) \cos 2w_q \right]; \quad (4.25)$$

$$\lambda_{(2)} = \frac{8\pi^2 \left[ \sin 2w_q (1 + \sin^2 w_q) + 2(\pi - w_q) \cos^2 w_q + 2(\pi \sin w_q - 2(\pi - w_q)) \sin^2 w_q \right]}{\left[ \pi \sin w_q - 2(\pi - w_q) \right]^3};$$

$$\lambda_{(3)} = \frac{-2}{\pi} \left[ \frac{\pi - 2w_q}{\cos w_q} + 2 \sin w_q \right]; \quad \lambda_{(4)} = \frac{-2\pi^2}{(\pi - w_q)^3} \left[ \sin w_q + (\pi - w_q) \cos w_q \right].$$

На рисунке 4.3 изображены графики зависимости функций (4.25) от величины  $w_q$  при  $m=1$ .

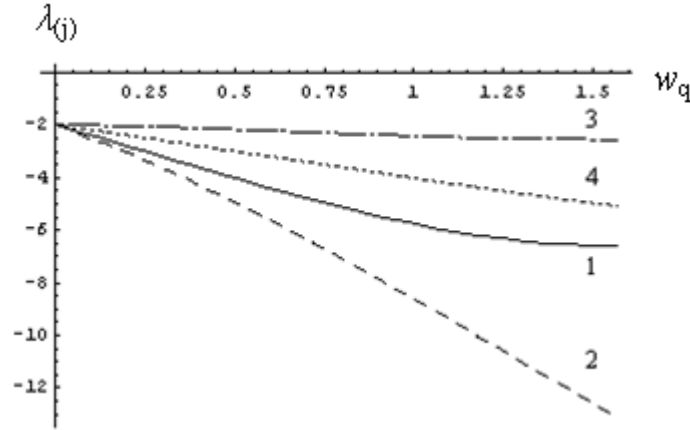


Рисунок 4.3 – Условия квантования величины  $w_q$

На рисунке видно, что для нелинейного  $\delta$ -потенциала может существовать не более одного связанного состояния.

## 4.4 Нерелятивистский предел

Рассмотрим теперь нерелятивистский предел полученных результатов ( $m \rightarrow \infty$ ,  $\chi_q \rightarrow 0$ , при этом  $q = m\chi_q$  — нерелятивистский импульс). Нерелятивистский предел функций Грина при  $\rho = 0$  имеет вид

$$\lim_{\substack{\chi_q \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} G_{(j)}(\chi_q, 0) = -i/(2q) \quad (4.26)$$

Отсюда получаем  $\xi_{(j)} = 0$  и  $\eta_{(j)} = -1$ , и уравнение (4.8) принимает вид

$$\frac{\lambda^2}{4q^2} X_{(0)}^3 + X_{(0)} - 1 = 0, \quad (4.27)$$

где введено обозначение  $X_{(0)}$  для нерелятивистского предела решения  $X_{(j)}$ . Уравнение (4.27) совпадает с уравнением, полученным при решении соответствующей нерелятивистской задачи с нелинейным  $\delta$ -потенциалом в координатном представлении.

## Выводы по теме 4

Найдены решения релятивистских двухчастичных одномерных уравнений для состояний рассеяния и связанных состояний в случае нелинейного  $\delta$ -потенциала и суперпозиции двух нелинейных  $\delta$ -потенциалов. В случае одного нелинейного  $\delta$ -потенциала на основании полученных точных ВФ состояний рассеяния найдены выражения для коэффициентов отражения и прохождения. Доказано равенство единице суммы коэффициентов отражения и прохождения. Найдены условия полного отражения.

## Вопросы для самоконтроля по теме 4

1. Получите систему уравнений (4.7) и кубическое уравнение (4.8).
2. Убедитесь, что сумма коэффициентов отражения и прохождения (4.15) тождественно (для любых значений быстроты  $\chi_q$ ) равна единице.
3. Используя выражения (4.15), докажите, что явление полного отражения невозможно для  $j = 3$ .
4. Выведите формулу (4.22).
5. Убедитесь, что нерелятивистский предел уравнения (4.8) приводит к равенству (4.27).

## Заключение

Подводя итоги первой части данного практического руководства, отметим его основные результаты:

- рассмотрены основные подходы, используемые при изучении связанных состояний и состояний рассеяния составных систем частиц в КТП, указаны основные преимущества квазипотенциального подхода перед другими, представлен обзор основных методов получения точных решений квазипотенциальных уравнений в ИП и в РКП, предложенных разными авторами. Приведены двухчастичные уравнения квазипотенциального типа в ИП для состояний рассеяния и связанных состояний. Посредством интегрального преобразования, которое в случае  $s$ -волн аналогично преобразованию Фурье, эти уравнения были сформулированы в интегральной форме в РКП, которое, фактически, является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики;

- получены точные решения парциальных уравнений для  $s$ -состояний (состояний рассеяния и связанных состояний) при моделировании взаимодействия потенциалом « $\delta$ -сфера» в РКП. На основании найденных ВФ состояний рассеяния получены амплитуды рассеяния. Произведен анализ амплитуд рассеяния и условий квантования энергии связанных состояний, в результате которого доказано условие унитарности амплитуд рассеяния и условия обращения амплитуд в нуль. Нерелятивистский предел полученных выражений даёт одинаковые результаты, которые совпадают с соответствующими результатами, найденными при решении уравнения Шрёдингера в координатном представлении;

- найдены точные решения релятивистских двухчастичных одномерных уравнений для состояний рассеяния в случае модельных потенциалов « $n$ -ая производная  $\delta$ -функции». На основании полученных волновых функций вычислены коэффициенты отражения и прохождения и произведен анализ полученных выражений: найдены условия равенства единице суммы коэффициентов отражения и прохождения, условия реализации полного отражения и полного прохождения;

- получены решения релятивистских двухчастичных одномерных уравнений для состояний рассеяния и связанных состояний в случае нелинейного  $\delta$ -потенциала. На основании полученных волновых функций найдены выражения для коэффициентов отражения и прохождения. Доказано равенство единице суммы коэффициентов отражения и прохождения. Найдены условия реализации полного отражения.

## **Перечень условных обозначений**

КТП – квантовая теория поля

ФГ – функция Грина

ИП – импульсное представление

РКП – релятивистское конфигурационное представление

ВФ – волновая функция

## Литература

1. Боголюбов, Н.Н. Квантовые поля / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – 3-е изд. – М. : Физматлит, 2005. – 384 с.
2. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2001. – 784 с.
3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635 – 690.
4. Ициксон, К. Квантовая теория поля: в 2 т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. – М. : Мир, 1984. – 2 т.
5. Дирак, П.А.М. Лекции по квантовой теории поля / П.А.М. Дирак. – Москва : Либроком, 2011. – 248 с.
6. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – 2-ое изд. – Москва : Ленанд, 2014. – 328 с.
7. Grant, I.P. Relativistic quantum theory of atoms and molecules: theory and computation / I.P. Grant. – New York : Springer – Verlag, 2007. – 797 p.
8. Greiner, W. Quantum Electrodynamics / W. Greiner, J. Reinhardt. – 4rd ed. – Berlin : Springer, 2009. – 448 p.
9. Logunov, A.A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380 – 399.
10. Faustov, R.N. Relativistic wavefunction and form-factors of the bound system / R.N. Faustov // Annals of physics. – 1973. – Vol. 78, № 1. – P. 176 – 189.
11. Браун, Дж. Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Дж.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.
12. Дей, Е.А. Точное решение квазипотенциальных уравнений общего вида с хромодинамическим взаимодействием / Е.А. Дей, В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1986. – Т. 69, № 1. – С. 55 – 68.
13. Демков, Ю.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / Ю.Н. Демков, В.Н. Островский. – Ленинград: изд-во Ленинградского ун-та, 1975. – 240 с.
14. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва: Мир, 1969. – 608 с.
15. Тейлор, Дж. Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений / Дж. Тейлор. – Москва: Мир, 1975. – 568 с.
16. Griffiths, D.J. Introduction to quantum mechanics / D.J. Griffiths. – New Jercey: Prentice Hall, 1994. – 394 p.