ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.95

Н. А. Алёшин, Г. Л. Карасёва

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ПОДВИЖНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

Для задачи оптимального управления специального вида с подвижным краевым условием вводятся определения допустимого, оптимального и субоптимального управления и соответствующих траекторий. Введено определение управляемости относительно основных ограничений, а также понятие опоры, опорной совокупности и опорной матрицы. Показано, что опора используется для учета основных ограничений. Доказано утверждение об управляемости терминальных и фазовых ограничений задачи оптимального управления специального вида с подвижным краевым условием.

Задачи управления составляют один из наиболее сложных и актуальных разделов современной теории экстремальных задач. По результатам решения таких задач оцениваются достоинства большинства новых методов оптимизации. Современная математическая теория оптимального управления динамическими системами возникла в начале 50-х годов на базе инженерных исследований по оптимальным системам автоматического регулирования. Необходимость решения актуальных проблем автоматического регулирования [2], динамики полетов [1] потребовала разработки эффективных методов решения экстремальных задач.

Непрерывные динамические задачи ставятся для систем, изменяющих свои состояния непрерывно во времени. В связи с этим существенно отличается математический аппарат исследования указанных задач. Естественно, что среди непрерывных систем в первую очередь были изучены линейные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = Ax + bu. \tag{1}$$

Система (1) представляет собой дифференциальный закон поведения процесса управления и является математической моделью многих процессов в различных сферах человеческой деятельности. Получение и использование законов поведения в дифференциальной форме широко распространено в современных научных исследованиях, так как она компактно и адекватно выражает фундаментальные свойства многих явлений.

Исследование управляемости динамической системы является важным элементом построения эффективных методов решения.

На фиксированном промежутке времени $T = \left[0,\, t^*\right]$ рассмотрим задачу оптимального управления специального вида с подвижным краевым условием:

$$\begin{gathered} J\left(u\right) = c'x\left(t^*\right) \to \max, \\ \dot{x} = Ax + bu, \quad x\left(0\right) = x_0, \quad g_* \le Hx\left(t^*\right) \le g^*, \\ d'x(t) \le \alpha(t), \quad \left|u(t)\right| \le 1, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $x = x\left(t\right)$ – n-вектор состояния системы в момент времени t; $u = u(t)$ – значение скалярного управления в момент времени t; A – постоянная $n \times n$-матрица,

H – постоянная $m \times n$-матрица, $\operatorname{rank} H = m < n$; c, b, d – заданные векторы соответствующих размеров; $\alpha(t)$, $t \in T$ – достаточно гладкие функции.

Фазовые $d'x(t) \le \alpha(t)$, $t \in T$ и терминальные $g_* \le Hx(t^*) \le g^*$ ограничения назовем *основными ограничениями*, ограничения $|u(t)| \le 1$, $t \in T$ – *прямыми ограничениями* задачи (2).

Введем обозначения: $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, $x(\cdot) = (x(t), t \in T)$, которые будем использовать в дальнейшем.

Будем считать, что $d'b \ne 0$ и $d'x_0 < \alpha(0)$.

Определение 1. Управление $u(\cdot)$ и соответствующая траектория $x(\cdot)$ системы (1) называются допустимыми, если они удовлетворяют всем ограничениям задачи (1).

Определение 2. Оптимальными будем называть допустимые управление $u^0(\cdot)$ и траекторию $x^0(\cdot)$, на которых критерий качества $J(u) = c'x(t^*)$ задачи (1) достигает максимального значения.

Определение 3. Допустимое управление $u^\varepsilon(\cdot)$, для которого выполняется неравенство $J(u^0(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot)) \le \varepsilon$, будем называть ε-оптимальным (субоптимальным) управлением.

Будем считать, что основные ограничения задачи (1) удовлетворяют *условию Слейтера*, то есть существует такое управление $\bar{u}(\cdot)$, что вдоль него и соответствующей ему траектории $\bar{x}(\cdot)$ системы (2) выполняются соотношения:

$$\bar{\beta} = \max_{t \in T}(d'\bar{x}(t) - \alpha(t)) < 0;$$

$$\bar{\gamma}_* = \min_{t \in T}\left(H\bar{x}(t^*) - g_*\right) > 0; \quad \bar{\gamma}^* = \max_{t \in T}\left(H\bar{x}(t^*) - g_*\right) < 0;$$

$$|\bar{u}(t)| < 1, \ t \in T.$$

Для учета основных ограничений используется опора. Ее структура непосредственно связана с общей структурой оптимального управления. Прямая задача опоры – обеспечить на итерациях выполнение основных ограничений. Опасность их нарушения возникает на участках, где вдоль текущего управления ограничения выполняются как равенства. Поэтому важно, чтобы на этих участках ограничения были управляемыми. Исследуем управляемость основных ограничений задачи (2). Вводимое понятие управляемости предназначено для построения опоры.

На отрезке T выделим подмножество $T_{оп} \subset T$, состоящее из отрезков $T_i = [\tau_i, \tau^i]$, $\tau_i \le \tau^i < \tau_{i+1}$, $i \in N = \{1, \ldots, p\}$, $N_* = \{i \in N : \tau_i < \tau^i\}$, $N_0 = N \setminus N_*$, $T^*_{оп} = \bigcup_{i \in N_*} T_i$, $T_н = T \setminus T^*_{оп}$.

Исследуем поведение вектора $Hx(t^*)$ и функции $d'x(t)$, $t \in T$, на множестве $T_{оп}$.

Определение 4. Динамическую систему (2) назовем управляемой относительно терминальных ограничений и фазовых ограничений на множестве $T_{оп}$, если для каждой совокупности непрерывных кусочно-гладких функций $\beta_i(t)$, $t \in T_i$, $i \in N_*$, и векторов $(\beta_i,\ i \in N_0)$, $\bar{\gamma} \in R^m$, найдется такая кусочно-непрерывная функция $u(t)$, $t \in T$, что вдоль соответствующей ей траектории $x(t)$, $t \in T$, выполняются тождества:

$$d'x(t) \equiv \beta_i(t), \ t \in T_i, \ i \in N_*, \tag{3}$$

и равенства

$$d' x(\tau_i) = \beta_i\,,\; i \in N_0\,; \quad Hx(t^*) = \bar{\gamma}\,. \tag{4}$$

Приступая к исследованию управляемости, продифференцируем тождества (3) и запишем их в эквивалентной форме

$$d' Ax(t) + d' bu(t) = \dot{\beta}_i(t),\; t \in T_i\,,\; i \in N_*\,; \tag{5}$$

$$d' x(\tau_i) = \beta_i = \beta(\tau_i),\; i \in N_*\,. \tag{6}$$

Выполнение тождеств (5) можно обеспечить с помощью функции

$$u(t) = \frac{\dot{\beta}_i(t) - d' Ax(t)}{d' b}, \quad t \in T_i\,, \quad i \in N_*\,. \tag{7}$$

Подставим (7) в систему (2). В результате получим

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + b\,\frac{\dot{\beta}_i(t) - d' Ax}{d' b}, \quad t \in T_i\,, \quad i \in N_*\,; \\ \dot{x} = Ax + bu\,,\; t \in T_H\,; \;\; x(0) = x_0\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$A(t) = A\,,\;\; v(t) = u(t),\;\; t \in T_H\,;$$

$$A(t) = ZA\,,\;\; Z = E - bd'/d'b\,,\;\; v(t) = \dot{\beta}/d'b\,,\;\; t \in T_i\,,\;\; i \in N_*\,.$$

В новых обозначениях система (8) примет вид

$$\dot{x} = A(t)x + bv(t), \quad x(0) = x_0\,. \tag{9}$$

Таким образом, «исходная управляемость» свелась к управляемости системы (9) относительно конечного числа ограничений (4), (6) с помощью управлений $u(t),\; t \in T_H$.

Обозначим через $\Phi(t,\tau),\; t \ge \tau$, фундаментальную матрицу решений однородной части уравнений (9). Будем считать, что $\Phi(t,\tau) \equiv 0$ при $t < \tau$. Согласно формуле Коши имеем

$$x(t) = \Phi(t,0)\,x_0 + \int_0^t \Phi(t,\tau)\,bv(\tau)\,d\tau, \quad t \in T\,. \tag{10}$$

С учетом (7) равенства (3), (4) примут вид

$$\begin{gathered} d' \left[\Phi(\tau_i,0) + \sum_{j=1}^{i} \int_{\tau^{j-1}}^{\tau_j} \Phi(\tau_i,\tau)\,bu(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{\tau_j}^{\tau^j} \Phi(\tau_i,\tau)\,b\,\frac{\dot{\beta}_j(\tau)}{d' b}\,d\tau \right] = \beta_i,\;\; i \in N\,; \\ H\left[\Phi(t^*,0)\,x_0 + \int_{T_H} \Phi(t^*,\tau)\,bu(\tau)\,d\tau + \sum_{j \in N_*} \int_{\tau_j}^{\tau^j} \Phi(t^*,\tau)\,b\,\frac{\dot{\beta}_j(\tau)}{d' b}\,d\tau \right] = \bar{\gamma}\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Ясно, что задача управляемости системы (10) относительно (4), (5) сводится к разрешимости (11) относительности функций $u(t),\; t \in T_н$.

Согласно [3], для этого необходимо и достаточно существования такой совокупности моментов $t_{on} = \left\{ t_j,\ j \in J_* \right\}$, $t_j \in T \setminus \bigcup_{i \in N_*} \operatorname{int} T_i$, индексов I_{on}, что $\left| N \right| + \left| I_{on} \right| = \left| J_* \right|$, $\det P_{on} \neq 0$,

$$P_{on} = \begin{bmatrix} H\left(I_{on}, J\right)\Phi\left(t^*, t_j\right)b, \quad j \in J_* \\ I_{on} \in I \\ d'\Phi\left(\tau_i, t_j\right)b, \quad j \in J_* \\ i \in N \end{bmatrix}.$$

Определение 5. Совокупность $S_{on} = \left\{ T_{on}, I_{on}, t_{on}, \right\}$ из опорных отрезков $T_{on} = \left\{ T_i, i \in N \right\}$, опорных индексов I_{on}, $\left| I_{on} \right| < m$ и опорных моментов $t_{on} = \left\{ t_j,\ j \in J_* \right\}$ называется опорой (ограничений), если $\det P_{on} \neq 0$.

Таким образом, доказано.

Утверждение. Динамическая система является управляемой относительно терминальных ограничений и фазовых ограничений на отрезках T_i, $i \in N$, и опорных индексах тогда и только тогда, когда существует опора ограничений.

Литература

1 Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 475 с.

2 Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 384с.

3 Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации : в 2 ч. Ч. 2. Задачи управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск : Изд-во «Университетское», 1984. – 207 с.

4 Алёшин Н. А., Михаленко Т. А. Дискретная задача оптимального управления с континуумом ограничений / Н. А. Алёшин, Т. А. Михаленко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях. Материалы XVIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов : в 2 ч. Гомель, 23–25 марта 2015 / ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – Ч. 1. – С. 3–4.

УДК 376(042)

Д. Б. Аллаберенов

СКАЖИ МНЕ – И Я ЗАБУДУ; ПОКАЖИ МНЕ – И Я ЗАПОМНЮ; ДАЙ СДЕЛАТЬ – И Я ПОЙМУ

Описана методика проведения разработанного автором урока информатики на тему «Сохранение векторного изображения в приложениях CorelDRAW, Microsoft Word». Представленная разработка, являющаяся составной частью блока уроков по разделу «Работа с векторной графикой» курса информатики для восьмого класса, апробирована в ходе педагогической практики в ГУО «Гимназия № 14 г. Гомеля».

Состоянием современного образования и тенденциями развития общества обусловлена необходимость новых системно организующих подходов к развитию образовательной среды. Для достижения успеха уже недостаточно академических знаний и умения критически мыслить, а необходима некоторая техническая квалификация. В процессе