сматривают последние популярные и актуальные темы, а не давно заброшенные статьи. И главным критерием оценки сайта становится присутствующий практически на всех ресурсах раздел «Новости», наглядно демонстрирующий актуальность сайта. Регулярное обновление новостного раздела, актуальные и свежие новости сайта привлекают на ресурс новых посетителей, заинтересовывая их новинками и скидками. Следовательно, новая информация поднимет рейтинг магазина. Для этого на сайте был подготовлен данный раздел, в который можно добавлять новые статьи, что заинтересует потребителя. Здесь же можно увидеть всю информацию (акции, изменения работы сайта). Для просмотра заинтересовавшей покупателя информации можно кликнуть по ссылке «Подробнее» чтобы перейти на страницу с выбранной новостью.

Страница «О нас» – это раздел сайта, куда люди обращаются, чтобы узнать больше о том, где они находятся. Если человек зашел на сайт в первый раз, то такая информация позволит ему решить, стоит ли возвращаться на сайт в будущем. А постоянные покупатели и зарегистрированные пользователи всегда хотят узнать больше о сайте, на который они часто ходят. На странице «О нас» расположена контактная информация магазина.

**Литература**


1 Никсон, Р. Создаем динамические веб-сайты с помощью PHP, MySQL, JavaScript, CSS и HTML 5 / Р. Никсон. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2015. – 688 с.

2 Прохоренок, П. А. HTML, JavaScript, PHP и MySQL. Джентельменский набор Web-мастера / П. А. Прохоренок, В. А. Дронов. – 4-е изд. нерераб. и дон. – СПб.: БХВ-Петербург, 2015. – 768 с.



**УДК 517.538.52+517.538.53**



***Е. П. Кечко***


## АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ


*В работе изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I типа, для системы экспонент* $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ *с произвольными различными комплексными показателями* $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$, $k \ge 2$*, расположенными на мнимой оси. Доказанная теорема дополняет ранее известные результаты.*


Для заданного натурального числа $k$ рассмотрим произвольный фиксированный набор $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных чисел.

**Определение.** Диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде I типа системы экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ называются многочлены $A_n^p(z)$, $\deg A_n^p \le n-1$, $p = 0,1,\ldots,k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z) e^{\tilde{\lambda}_p z} = O(z^{kn+n-1}),\ z \to 0. \qquad (1)$$

Многочлены $A_n^p(z)$ (их часто называют многочленами Эрмита–Паде I рода) были введены Эрмитом [1] спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы [2], посвященной доказательству трансцендентности числа $e$.

Полиномы $A_n^0(z), A_n^1(z), \ldots, A_n^k(z)$, удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Действительно, пусть $\tilde{C}_p$ – граница круга с центром в точке $\tilde{\lambda}_p$ столь малого радиуса, что все остальные $\tilde{\lambda}_j$ лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\tilde{\lambda}_p z}}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\left[\tilde{\varphi}(\xi)\right]^n}, \quad 0 \le p \le k, \tag{2}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi) = (\xi - \tilde{\lambda}_0)(\xi - \tilde{\lambda}_1) \cdot \ldots \cdot (\xi - \tilde{\lambda}_k)$ удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенство (2) не является новым (см. [1, 2]).

Целью данной статьи является нахождение асимптотики диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\tilde{\lambda}_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными показателями $\left\{\tilde{\lambda}_p\right\}_{p=0}^{k}$, проходящими через начало координат и лежащих на мнимой оси. Решением данной задачи является результат исследования асимптотических свойств интегральных представлений многочленов $\left\{A_n^p(z)\right\}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющих условию (1), где $\tilde{\lambda}_p = i\lambda_p$, $0 \le p \le k$ и $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ – произвольные различные действительные числа. Таким образом, если сделать замену $\xi = i\tau$ в равенстве (2), то получим

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-i\lambda_p z}}{2\pi i^{3n}} \int_{C_p} \frac{e^{i\tau z} d\tau}{\left[\varphi(\tau)\right]^n}, \; 0 \le p \le k,$$

где $\varphi(\tau) = \tau(\tau - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\tau - \lambda_k)$.

Далее при изучении асимптотики полиномов (2) будем использовать известный метод комплексного анализа (метод перевала). Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимое утверждение [3, с. 415].

***Утверждение 1 (Метод перевала).*** *Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой односвязной области $G$, содержащей кусочно гладкую кривую $\gamma$ и*

$$F_n = \int\limits_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

*Предположим, что $\max\limits_{\xi \in \gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$ достигается только в точке $z_0$, которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \ne 0$. Считаем также, что в окрестности $z_0$ контур $\gamma$ проходит через оба сектора* [3, с. 414]*, в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $n \to +\infty$*

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}e^{nS(z_0)}\left\{ f(z_0) + O(1/n)\right\}. \qquad (3)$$

*Выбор ветви корня в* (4) *определяется из условий*

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

*где* $\varphi_0$ *– угол между касательной к кривой* $l$ *в точке* $z_0$ *и положительным направлением действительной оси, а* $l$ *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* $z_0$*, т. е. для* $l$ *в окрестности* $z_0$ *выполняются условия:* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $z \neq z_0$.

Перейдем к изучению асимптотики полиномов $A_n^p(z)$, $p = 0,1,\ldots,k$. Для это введем необходимые обозначения. Пусть $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ нули функции $\varphi'(\tau)$, т. е. $\varphi'(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Ясно, что $x_j$ – действительные числа и $x_j \in \left(\lambda_{j-1}, \lambda_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. При $\tau \in \mathbb{R} \setminus \left\{\lambda_j\right\}_{j=0}^{k}$ рассмотрим однозначную функцию (главную ветвь логарифма)

$$S(\tau) = -\ln\varphi(\tau) = -\ln\left|\varphi(\tau)\right| - i\arg\varphi(\tau),$$

где $\arg\varphi(\tau) \in \left(-\pi, \pi\right]$. В области её определения справедливы равенства

$$S'(\tau) = -\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = -\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau-\lambda_1} - \ldots - \frac{1}{\tau-\lambda_k},$$

$$S''(\tau) = -\frac{\varphi''(\tau)\varphi(\tau) - \left[\varphi'(\tau)\right]^2}{\left[\varphi(\tau)\right]^2} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{(\tau-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(\tau-\lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

***Теорема 1.*** *При* $n \to \infty$ *локально равномерно по* $z$

$$A_n^0(z) = \frac{1}{i^{(k+1)n-1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{ix_1 z}(1 + O(1/n)), \qquad (4)$$

$$A_n^p(z) = \frac{1}{i^{(k+1)n-1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_{p+1})}}e^{nS(x_{p+1})}e^{i(x_{p+1}-\lambda_p)z}(1 + O(1/n)) -$$
$$- \frac{1}{i^{(k+1)n-1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_p)}}e^{nS(x_p)}e^{i(x_p-\lambda_p)z}(1 + O(1/n)),\ p = \overline{1, k-1}, \qquad (5)$$

$$A_n^k(z) = -\frac{1}{i^{(k+1)n-1}}\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_k)}}e^{nS(x_k)}e^{i(x_k-\lambda_k)z}(1 + O(1/n)). \qquad (6)$$

*Доказательство.* Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i^{(k+1)n}} \int\limits_{C_0} e^{i\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau, \tag{7}$$

докажем равенство (4) для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Для этого в интеграле (7) деформируем контур интегрирования $C_0$ в прямоугольник $R$, принадлежащий области $\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < \lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где $r$ – достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки $A$ и $B$, максимум функции $\operatorname{Re} S(\tau)$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично на вертикальном отрезке, соединяющем точки $C$ и $D$, максимум этой функции достигается в единственной точке $a$. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом $r$ значения $\operatorname{Re} S(\tau)$ меньше каждого из значений $\operatorname{Re} S(\tau)$ в точках $-a'$ и $a$. Действительно, пусть, например, $\tau \in [C, B]$, т. е. $\tau = t + ir$, $t \in [-a', a]$. Тогда

$$|\varphi(\tau)| = \sqrt{(t^2 + r^2)((t-\lambda_1)^2 + r^2) \cdot \ldots \cdot ((t-\lambda_k)^2 + r^2)} >$$

$$> \min\{|\varphi(-a')|, |\varphi(a)|\},$$

если только $r > 2\max\{a', \lambda_k\}$. Отсюда из определения $S(\tau)$ следует, что для всех $\tau \in [C, B]$ $\operatorname{Re} S(\tau) < \min\{\operatorname{Re} S(-a'), \operatorname{Re} S(a)\}$. Определимся теперь с выбором $a'$ и $a$. Положим $a = x_1$, в $a'$ возьмём таким, чтобы $\operatorname{Re} S(-a') < \operatorname{Re} S(x_1)$. Такой выбор возможен, так как $\ln|\varphi(t)|^{-1} \to -\infty$, при $t \in \mathbb{R}$ и $t \to -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от $L$ к $N$ и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z) = \frac{1}{2\pi i^{(k+1)n}} \int\limits_{[L,N]} e^{i\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau.$$

Применим метод перевала (утверждение 1) к интегралу $F_n^{[D,C]}(z)$. Тогда

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i^{(k+1)n}} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{ix_1 z} (1 + O(1/n)). \tag{8}$$

Выбираем ветвь корня в (8) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{i^{(k+1)n-1}} \sqrt{-\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{ix_1 z} (1 + O(1/n)). \tag{9}$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ утверждение 1 и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что локально равномерно по $z$

$$\left|F_n^{[B,A]}(z)\right| \le \theta \left|e^{n(S(x_1)-\delta)}\right|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \to \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$ и $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D,C]$. Поэтому из (9) следует справедливость равенства (4) для любого фиксированного $z \in$ .

Равенство (6) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (5) при $p=1$, для $p=\overline{2,k-1}$ доказывается аналогично. Зафиксируем произвольное $z \in$  и представим многочлен $A_n^1(z)$ в виде

$$A_n^1(z) = \frac{e^{-i\lambda_1 z}}{2\pi i^{(k+1)n}} \int_{C_1} e^{i\tau z} e^{nS(\tau)} d\tau, \tag{10}$$

В интеграле (10) деформируем контур интегрирования $C_1$ в прямоугольник $R$, принадлежащий области $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \lambda_2\}$, с вершинами в точках $A^*(a',-r)$, $B^*(a',r)$, $C^*(a,r)$, $D^*(a,-r)$, где $r$ – достаточно большое положительное число, $a' \in (0,\lambda_1)$, $a \in (\lambda_1,\lambda_2)$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем $A^*$ и $B^*$, максимум функции $\operatorname{Re} S(\tau)$ достигается в единственной точке $a'$, а на отрезке $[D^*,C^*]$ он достигается в единственной точке $a$. При достаточно большом $r$ ($r > 3\lambda_2$) значения $\operatorname{Re} S(\tau)$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[C^*, B^*]$ и $[A^*, D^*]$ меньше каждого из значений $\operatorname{Re} S(\tau)$ в точках $-a'$ и $a$. Если положить $a' = x_1$, а $a = x_2$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику $A_n^1(z)$ будут вносить интегралы по отрезкам $[B^*, A^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применяя к ним утверждение 1, при $n \to \infty$ получим, что

$$F_n^{[D^*,C^*]}(z) = \frac{e^{-i\lambda_2 z}}{2\pi i^{(k+1)n}} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{ix_2 z}(1+O(1/n)), \tag{11}$$

$$F_n^{[B^*,C^*]}(z) = \frac{e^{-i\lambda_2 z}}{2\pi i^{(k+1)n}} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{ix_1 z}(1+O(1/n)). \tag{12}$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (12) $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (12) $\varphi_0 = -\pi/2$. С учётом этого, из (11) и (12) следует равенство (5). Таким образом, для каждого фиксированного $z$ асимптотические равенства (4)–(6) доказаны.

**Литература**


1 Hermite C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. V. 21. – P. 289–308.

2 *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1873. V. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

3 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.