Разработанная база данных состоит из двух групп таблиц: группы таблиц, содержащих данные для выполнения тестовых заданий, и служебных таблиц приложения, содержащих описания заданий и данные о пользователях. В разработанной базе данных использовался вид связей между таблицами «один–ко–многим». Этот вид связи является наиболее оптимальным при проектировании реляционных баз данных.

Организация работы выглядит следующим образом. Студент садится за компьютер, входит под своим аккаунтом на сайт и выполняет на нем некоторый набор тестов. Тест представляет собой некое задание по написанию sql-запроса. После того, как запрос написан, он выполняется SQL Server-ом, потом выполняется эталонный запрос, соответствующий данному заданию и результаты сравниваются. По результатам сравнения, студенту выставляется оценка, которая заносится в базу данных всех студентов и позже просматривается преподавателем.

На тренировочной странице сайта есть схема данных и вкладки просмотра таблиц, по которым нужно будет составить запросы. Для данной системы была выбрана база данных «Студент», так как она наиболее наглядна и удобна для тренировки в написании сложных запросов. Также студент может скачать структуру таблиц базы данных.

В ходе сопровождения приложения была разработана база данных для создания возможности решения контрольных работ пользователями, а также пользовательский интерфейс для решения контрольных работ и просмотра результатов их выполнения. На данный момент активны контрольные работы под названием «Выборка из таблиц», «Группировка данных», «Подзапросы». Как только пользователь начинает контрольную работу, запускается таймер и на экране появляется *n*-е количество случайных задач по темам, включенных в контрольную работу. Студент решает данные задачи, отправляет, нажимает «Завершить» (либо время истекает) и получает результат своей контрольной работы.

Административная часть сайта позволяет просмотреть успеваемость студентов конкретной группы (сколько задач решил студент по каждой теме), создавать контрольные работы, добавлять темы контрольных работ, время выполнения, количество задач, а также удалять данные. В данной части сайта также находятся редакторы таблиц, тем и условий задач, групп студентов, а также редактор контрольных работ.

Данная система развивается в университете в течение нескольких лет и направлена на автоматизацию процесса обучения языку SQL в университете. Практика показывает, что самостоятельное онлайн обучение учит студентов думать, раскрывать свои возможности, а накопленные навыки и «нарешенность» помогает при написании контрольных и сдаче лабораторных работ.

Литература

1 Грабер, М. Понимание SQL / М. Грабер. – М.: Издательство «ЛОРИ», 2003. – 664 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

М. В. Сидорцов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АППРОМАКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ

В работе изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Эрмит–Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{k}$, *где* $\lambda_0 = 0$, *а остальные*

λ_p являются корнями уравнения $\xi^k = 1$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А. В. Астафьевой, А. П. Старовойтова, полученные в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ – различные действительные числа.

Определение. Аппроксимациями Эрмита–Паде I типа системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ называются многочлены $A_n^p(z)$, $\deg A_n^p \le n-1$, $p = 0, 1, \dots k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O\left(z^{kn+n-1}\right), \quad z \to 0. \qquad (1)$$

Многочлены $A_n^p(z)$ (их часто называют многочленами Эрмита–Паде I рода) были введены Эрмитом [1] спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы [2], посвященной доказательству трансцендентности числа *e*.

В данной статье рассматривается в некотором смысле исключительный случай, когда применение метода перевала в указанной ситуации возможно.

В частности, для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{k}$ где $\lambda_0 = 0$, а остальные λ_p являются корнями уравнения $\xi^k - 1 = 0$ найдены асимптотики соответствующих аппроксимаций Эрмита–Паде I типа и доказана равномерная сходимость нормированных аппроксимаций на компактах в *C* к явно заданным функциям.

Для простаты формулировок далее ограничимся случаем, когда $k = 3$.

Полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{3} A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O\left(z^{4n-1}\right), z \to 0, \qquad (2)$$

где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_p = e^{i2\pi(p-1)/3}, p = 1, 2, 3,$$

могут быть получены решением линейной системы $4n - 1$ однородных уравнений с $4n$ неизвестными коэффициентами.

Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде.

Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга.

Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n}, \quad 0 \le p \le 3, \qquad (3)$$

где $\varphi(\xi) = \xi\left(\xi^3 - 1\right)$ удовлетворяют (3) и всем другим условиям.

Далее при изучении асимптотики полиномов (3) будем использовать известные методы комплексного анализа (метод перевала, метод Лапласа).

Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимые утверждения [3, с. 398, 415].

Утверждение 1 (Метод Лапласа). *Пусть* $f(x), S(x)$ *непрерывные на отрезке* $[a,b]$ *функции, при этом* $S(x)$ *принимает только действительные значения, а* $f(x)$ *может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ *имеет абсолютный максимум на отрезке* $[a,b]$, *т. е.* $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $n \to +\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \left\{ f(x_0) + O(1/n) \right\}.$$

Утверждение 2 (Метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой односвязной области* G, *содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max\limits_{\xi \in \gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е.* $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. *Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора* [3, с. 414], *в которых* $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. *Тогда при* $n \to +\infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \left\{ f(z_0) + O(1/n) \right\}. \tag{4}$$

Выбор ветви корня в (3) *определяется из условий*

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – *угол между касательной к кривой* l *в точке* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l – *линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0, *т.е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ *при* $z \in l$, $z \neq z_0$.

Перейдем к изучению асимптотики полиномов $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq 3$ при фиксированном значении переменной z. С этой целью введем необходимые обозначения.

Пусть z_j – нули функции $\varphi'(\xi)$. Тогда

$$z_j = \sqrt[3]{1/4} e^{i2\pi(p-1)/3}, \quad j = 1, 2, 3.$$

В окрестности точки z_1 определим однозначную ветвь функции $S(\xi) = -\ln\varphi(\xi)$, пологая $S(z_1) = -\left[\ln|\varphi(z_1)| + i\pi\right]$ фиксируем односвязную область G, для которой $\{z_j\}_{j=1}^{3} \subset G \subset C \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^{3}$. Тогда по теореме о монодромии выбранная ветвь аналитически продолжается в G, а полученная в результате продолжения функций является однозначной. Её значения в G вычисляются по формуле $S(\xi) = -\left[\ln|\varphi(\xi)| + i\Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)\right]$, где кривая γ лежит в G и соединяет точки z_1 и ξ, а $\Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Пусть

$$B_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(z_j)}}e^{nS(z_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Ветвь в (5) определяется из условий

$$\arg\sqrt{\frac{-1}{S''(z_j)}} = \psi_0,$$

где ψ_0 – угол между касательной к окружности $\left\{z : |z| = \sqrt[3]{1/4}\right\}$ в точке z_j (окружность обходится против часовой стрелки) и положительным направление действительной оси.

Учитывая легко проверяемые равенства $S''(z_j) = 4z_j^{-2}$, $j = 1, 2, 3$, нетрудно показать, что

$$B_n(z_j) = \sqrt{\frac{1}{8\pi n}}z_j e^{nS(z_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для каждого фиксированного* $z \in C$ *и* $n \to \infty$

$$A_n^0(z) = \sum_{j=1}^{3} B_n(z_j)e^{(z_j - \lambda_j)z}\left(1 + O(1/n)\right), \tag{7}$$

$$A_n^p(z) = -B_n(z_p)e^{(z_p - \lambda_p)z}\left(1 + O(1/n)\right), \quad p = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Доказательство. Исходя из интегрального представления

$$A_n^1(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{\xi z}d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{9}$$

докажем равенство (7) для каждого фиксированного $z \in C$. При других значениях p равенства (8) доказываются аналогично.

Для этого в интеграле (9) деформируем контур интегрирования C_1 в криволинейный прямоугольник Π, с вершинами в следующих точках $A(r\cos(\pi/3), r\sin(\pi/3))$, $B(R\cos(\pi/3), R\sin(\pi/3))$, $C(R\cos(\pi/3), -R\sin(\pi/3))$, $D(r\cos(\pi/3), -r\sin(\pi/3))$.

Сторонами прямоугольника Π являются отрезки $[A, B]$ и $[D, C]$ и дуги окружности $AD = \left\{re^{i\tau} : -\pi/3 \le \tau \le \pi/3\right\}$, $BC = \left\{\mathrm{Re}^{i\tau} : -\pi/3 \le \tau \le \pi/3\right\}$, где $r = \sqrt{1/4}$, а $R > 1$. Так как при $t \in [r, R]$, то $\left|\varphi\left(te^{i\pi/3}\right)\right| = t(t^3 + 1) \ge r(r^3 + 1)$, на отрезке, соединяющем точки

A и B, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке A. Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки D и C, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке D и равен $r(r^3+1)$. На дуге BC при достаточно больших R значения $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках A и D. Поэтому наименьшее значение функции $|\varphi(\xi)|$ на дуге AD достигается в единственной точке z_1 и равно $r(1-r^3)$. Считаем положительным направление обхода дуги LN направление от L к N. По определению полагаем

$$F_n{}^{AD}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int\limits_{AD} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}.$$

Область G выбираем так, что $AD \subset G$. Поэтому предыдущее равенство можно записать в виде

$$F_n{}^{AD}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int\limits_{DA} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi. \tag{10}$$

Так как наименьшее значение функции $|\varphi(\xi)|$ и на дуге DA достигается в единственной точке z_1, то максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ на этой дуге также достигается в единственной точке z_1, которая является простой точкой перевала функции $S(\xi)$. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла в (9) можно применить метод перевала (утверждение 2).

Учитывая выбор ветви корня и равенство $\varphi_0 = \psi_0 = \arg(iz)$, получим

$$F_n{}^{AD}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}\, e^{nS(z_j)} e^{(z_1-\lambda_1)z}\left(1+O(1/n)\right) = -B_n(z_1) e^{(z_1-\lambda_1)z}\left(1+O(1/n)\right). \tag{11}$$

Рассмотрим интеграл

$$F_n{}^{AD}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int\limits_{\Pi \setminus DA} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

На криволинейном прямоугольнике Π функция $|\varphi(\xi)|$ достигает наименьшее значение в единственной точке z_1, которая принадлежит дуге AD.

Поэтому получим, что

$$|F_n(z)| \le \theta \left| e^{n(S(z_1)-\delta)} \right|, \tag{12}$$

где θ и δ – положительные постоянные. Из неравенства (12) следует, что при $n \to \infty$ интеграл $F_n(z)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(z_1)}$.

Значит, основной вклад в асимптотику многочлена $A_n^1(z)$ вносит интеграл по дуге DA. Таким образом, равенство (7) доказано.

Перейдем к доказательству равенства (8). При $p = 0$ в качестве контура интегрирования C_0 возьмем окружность $\left\{z : |z| = \sqrt[3]{1/4}\right\}$. Все точки $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{3}$ лежат на этой окружности. Представим γ в виде $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z \in \gamma : \pi/6 \le \arg z \le \pi/3\}, \quad \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1.$$

Будем считать, что G – односвязная область, для которой $\{z_j\}_{j=1}^{3} \subset G \subset C \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^{3}$ и кроме того, $\gamma_2 \subset G$, а пересечение γ_1 с дополнением G является дугой окружности.

Введем в рассмотрение интегралы

$$F_n^{\gamma j}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\gamma j} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $\gamma_2 \subset G$, то интеграл $F_n^{\gamma_2}(z)$ можно представить в виде

$$F_n^{\gamma_2}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\gamma_2} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Учитывая, что $\max\{\operatorname{Re} S(\xi)\}$ достигается на γ_2 только в точках z_1, z_2, z_3, которые являются точками перевала и внутренними точками контура γ_2, можно утверждать, что асимптотика $F_n^{\gamma_2}(z)$ при $n \to \infty$ равна сумме вкладов от точек z_1, z_2, z_3. Поэтому, учитывая, что контур γ_2 обходится против часовой стрелки, получим

$$F_n^{\gamma_2}(z) = \sum_{j=1}^{3} B_n(z_j) e^{(z_j - \lambda_j) z} \left(1 + O(1/n)\right).$$

Аналогично, как и при доказательстве равенств (8), доказывается, что основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по дуге γ_2. Теорема 1 доказана.

Литература

1 Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A, 1883. – V. 21. – P. 289–308.

2 Старовойтов, А. П. Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций / А. П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1(18). – С. 74–80.

3 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

УДК 51

Д. Ю. Синиченко

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Статья посвящена исследованию интегрально-разностного оператора в пространстве Лебега и пространстве Гёльдера. Доказана его ограниченность и получена оценка нормы в этих пространствах. Исследовано интегральные уравнения I рода, содержащее этот оператор. Получены решения данного интегрального уравнения.