2 Дэвид А. Шаппел, «ESB — Сервисная Шина Предприятия», БХВ-Петербург: 2008.

3 MassTransit [Electronic resource] – URL: http://masstransit-project.com/ (дата обращения 01.05.2014).

4 Рихтер Дж. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.0 на языке C#. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2012.

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

А. В. Астафьева

НУЛИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА−ПАДЕ I ТИПА

В данной статье для системы экспонент $\{e^{j\lambda z}\}_{j=0}^{3}$, *где* λ − *произвольное действительное число, рассмотрены диагональные аппроксимации Эрмита−Паде I типа. Получены верхние ограничения на модуль нулей полинома* $A_n^p(z)$, p = 0, 1, 2, 3, *показывающее, что в этом отношении они ведут себя как нули аппроксимаций Паде. Данный результат обобщает результаты Браесса, Ф. Виелонского и др.*

Диагональными аппроксимациями Эрмита−Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для набора экспонент $\left\{e^{pz}\right\}_{p=0}^{k}$ называют $k+1$ многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z),..., A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n(z)=\sum_{p=0}^{k}A_n^p(z)e^{pz}=O(z^{kn+n-1}),\ z\to 0, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_n^p(z)$ тождественно не равен нулю. Малер положил начало построения формальной теории аппроксимаций Эрмита−Паде Latin type [1], [2], которая была продолжена другими авторами [3].

Полиномы $A_n^0(z), A_n^1(z), A_n^2(z), A_n^3$, удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы $4n-1$ однородных уравнений с $4n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие решения могут быть представлены в явном виде. Действительно, пусть C_p − граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ − граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, j = 0, 1, 2, 3 принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z)=\frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{\xi z}d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n},\ 0\le p\le 2, \tag{2}$$

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\frac{e^{\xi z}d\xi}{\left[\varphi(\xi)\right]^n}, \tag{3}$$

где $\varphi(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3)$, удовлетворяют (1) и всем другим условиям.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

В данной статье рассмотрим систему экспонент $\{e^{p\lambda z}\}_{p=0}^{3}$, где $\lambda-$ произвольное действительное число. Полученный результат обобщает результаты представленный F. Wielonsky [4]. Основной результат сформулируем в виде следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $n\geq 2$, $m=3$, $\lambda-$ *действительное число. Тогда нули аппроксимаций Эрмита−Паде* $A_n^p(z)$ *для системы экспонент* $\{e^{p\lambda z}\}_{p=0}^{3}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$|z|\leq\frac{2(n-1/3)}{|\lambda|}\left[\sum_{k=0}^{p}1/k+\sum_{k=1}^{m-p}1/k\right]. \tag{4}$$

Где подразумевается в случае $p=0$ *или* $p=m$, *что сумма в (4) обращается в нуль.*

2. Доказательство теоремы.

Рассмотрим оператор следующего вида: $T_k=k\lambda I+D$, где $-3\leq k\leq k$, $I-$единичный оператор, $D-$оператор дифференцирования d/dz. Данный оператор T_k является линейным и коммутативным.

Рассмотрим равенство

$$A_n^3(z)\mathrm{e}^{3\lambda z}+A_n^2(z)\mathrm{e}^{2\lambda z}+A_n^1(z)\mathrm{e}^{\lambda z}+A_n^0(z)=O(z^{4n-1}). \tag{5}$$

Продифференцируем равенство (5) n раз и получим

$$\mathrm{e}^{3\lambda z}\,T_3^n(A_n^3(z))+\mathrm{e}^{2\lambda z}\,T_2^n(A_n^2(z))+\mathrm{e}^{\lambda z}\,T_1^3(A_n^1(z))=O(z^{3n-1}).$$

Найдем представление для многочлена $A_n^2(z)$ (аналогичные рассуждения и для $A_n^3(z)$, $A_n^1(z)$). Последнее равенство разделим на $e^{\lambda z}$ и продифференцируем еще n раз, получим

$$\mathrm{e}^{2\lambda z}\,T_2^nT_3^n(A_n^3(z))+\mathrm{e}^{\lambda z}\,T_1^nT_2^n(A_n^2(z))=O(z^{2n-1}).$$

Далее делим на $e^{\lambda z}$

$$\mathrm{e}^{\lambda z}\,T_2^nT_3^n(A_n^3(z))+T_1^nT_2^n(A_n^2(z))=O(z^{2n-1}),$$

а теперь делим $e^{\lambda z}$ и дифференцируем n раз

$$T_{-1}^nT_1^nT_2^n(A_n^2(z))=O(z^{n-1}).$$

Т. к. $\deg A_n^2(z)\leq n-1$ получим

$$T_{-1}^nT_1^nT_2^n(A_n^2(z))=c_2z^{n-1}.$$

Обратим оператор T_k, и в итоге получим выражение для $A_n^2(z)$

$$A_n^2(z)=c_2T_2^{-n}T_1^{-n}T_{-1}^{-n}(z^{n-1}).$$

Рассмотрим произвольный многочлен $S_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$. Вычислим $T_k^{-n}(S_{n-1}(z))$, при $k\neq 0$. Известно, что

$$\left(1+\frac{x}{k\lambda}\right)^{-n}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n-1+j}{n-1}\left(\frac{x}{k\lambda}\right)^j.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Тогда получим

$$T_k^{-n}(S_{n-1}(z)) = \left(k\lambda\right)^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-1} \frac{S_{n-1}^{(j)}(z)}{(k\lambda)^j}. \qquad (6)$$

Рассмотрим аппроксимации Паде p_{n-1} / q_{n-1} порядка $n-1$ к $e^{\lambda z}$, по определению они являются рациональными функциями удовлетворяющими равенству

$$q_{n-1}(z)\mathrm{e}^{\lambda z} - p_{n-1}(z) = O(z^{2n-1}),\ n \to \infty.$$

Таким образом легко проверить, что $q_{n-1}(z) = T_1^{-n}(z^{n-1})$. Пусть $k=1$, $S_{n-1}(z) = z^{n-1}$, тогда из (6) получим

$$q_{n-1}(z) = \left(\lambda\right)^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-1} \frac{(n-1)!}{(\mathrm{n}-1-\mathrm{j})!(\lambda)^j} z^{n-1-j}.$$

Воспользуемся методом из [5], обращаясь к теореме Уолша. И применим теорему Саффа-Варга [6], из которой следует, что нули аппроксимаций Паде для $e^{\lambda z}$, если $\deg \mathrm{p}_{n,m} = m$, $\deg q_{n,m} = n$ лежат в области $\{|\,z\,| \le (m+n+4/3)/|\,\lambda\,|\}$.

Пусть $h(z) = T_k^{-n}(\mathrm{S}_{n-1}(z))$, $f(z) = S_{n-1}(z)$. Тогда по теореме Уолша

$$h(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1-j}(n-1-j)!\,f^{(j)}(z) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (k\lambda)^{-n} \binom{n-1+j}{n-1} \frac{S_{n-1}^{(j)}}{(k\lambda)^j},$$

где

$$b_{n-1-j} = \frac{(-1)^j (k\lambda)^{-n}}{(n-1-j)!(k\lambda)^j} \binom{n-1+j}{n-1}.$$

Тогда

$$g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1-j} z^{n-1-j} = (k\lambda)^{-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-1-j)!} \binom{n-1+j}{n-1} \frac{z^{n-1-j}}{(k\lambda)^j} =$$
$$= \frac{(k\lambda)^{-2n+1}}{(n-1)!} q_{n-1}(kz).$$

Из оценки Саффа-Варга мы получаем, что нули $q_{n-1}(kz)$ по модулю меньше чем $2(n-1/3)/|\,k\lambda\,|$ и следовательно нули $T_k^{-n}(S_{n-1}(z))$ по модулю меньше чем $\rho + 2(n-1/3)/|\,k\lambda\,|$, где $\rho-$ такое, что корни $S_{n-1}(z)$ не превышают его по модулю.

Тогда последовательно воспользуемся этим утверждением, при $S_{n-1}(z) = z^{n-1}$, $k=-1$, затем $S_{n-1}(z) = T_{-1}^{-n}(z^{n-1})$, $k=1$, и при $S_{n-1}(z) = T_1^{-n}T_{-1}^{-n}(z^{n-1})$, $k=2$. И отсюда оценка нулей многочлена $A_n^2(z)$ логически вытекает.

Аналогичные рассуждения проводятся для любого p, $p = 0, 1, 2, 3$. Для нахождения нулей $A_n^0(z)$ (5) предварительно делим на $e^{3\lambda z}$.

Теорема доказана.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Литература

1 Mahler, K. Perfect systems/K. Mahler// Comp. Math. − 1968. − V. 19. − P. 95−166.

2 Mahler, K. Zur Approximation der Exponential funktion und des Logarithmus, I, II/K. Mahler// J. Reine Angew. Math. − 1931. − V. 166. − P. 118−150.

3 Aptekarev, A. I. Asymptotics of Hermite−Pade polynomials, in «Progress in Approximation Theory» (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) /A. I. Aptekarev, H. Stahl // New York / Berlin: Springer−Verlag,1992. − P. 127−167.

4 Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite−Pade Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. − 1997. − V. 90, № 2. − P. 283−298.

5 Baratchart, L. Rational interpolation of the exponential function/ L. Baratchart, E. B. Saff, and F. Wielonsky// Canad. J. Math.− 1995. – V. 47. – P. 1121−1147.

6 Saff, E. B. On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in «Pade and Rational Approximations: Theory and Applications» (E. B. Saff and R. S. Varga, Eds.) / E. B. Saff and R. S. Varga//Academic Press, New York. −1977.− P. 195−213.

УДК 004.7

С. В. Балычев, Н. Б. Осипенко

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ТЕСТИРОВАНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В статье описывается разработанная автоматизированная система тестирования с внедрением обязательного минимума в средней школе. В ней реализована техническая поддержка, упрощающая работу пользователей: учителей и учеников. При составлении заданий для учащихся использовались только школьные учебники, чтобы углубляться в то, что им пригодится в первую очередь. Для разработки среды тестирования использовался двигатель сайта Moodle, для форума технической поддержки – двигатель форума Invision Power Board.

Развивающиеся информационные технологии находят свое применение сегодня и в школе при тестировании учеников. В данной работе описывается пример подобной реализации для дисциплины «Информатика». Основная идея реализации – повышение уровня знаний учащихся в средней школе.

Визуальные модели широко используются в существующих технологиях управления проектированием систем, сложность, масштабы и функциональность которых постоянно возрастают. При эксплуатации информационной системы (ИС) постоянно приходится решать такие задачи, как: физическое перераспределение вычислений и данных, обеспечение параллелизма вычислений, репликация БД, обеспечение безопасности доступа к ИС, оптимизация балансировки нагрузки ИС, устойчивость к сбоям и т. п.

В то же время сейчас стремительными темпами развиваются дистанционные технологии в обучении, в частности, наибольшей популярностью пользуется обучение с помощью интернет технологий. Благодаря развитию современных методов общения и обмена данными, становится возможным создавать и применять новые способы обучения, такие как электронные конспекты, энциклопедии, тесты, глоссарии, анкеты, виртуальные

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ