Лекция 1

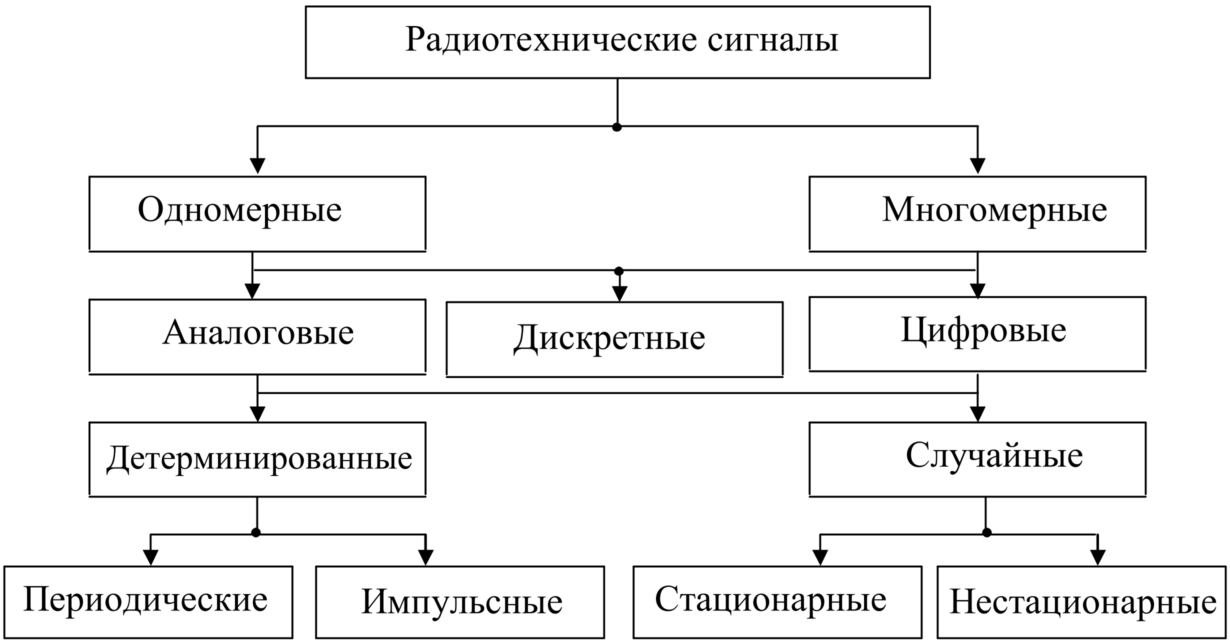
Тема 1 Сигналы

1.1 Определение и классификация сигналов

В радиотехнических устройствах протекают электрические процессы, имеющие специфический характер. Для понимания этой специфики следует предварительно ознакомиться с основными свойствами электрических процессов. Изменение во времени таких физических величин, как напряжение, ток или заряд, принято называть электрическими колебаниями. Электрические колебания, используемые для передачи информации, называют сигналами.

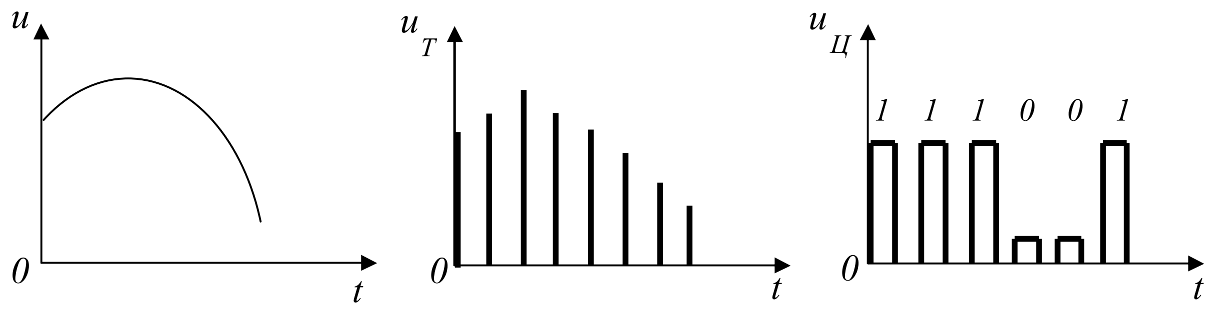
Краткая классификация сигналов приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 − Классификация радиотехнических сигналов



Радиотехнические сигналы удобно рассматривать в виде математических функций, заданных во времени и физических координатах. С этой точки зрения сигналы делятся на одномерные и многомерные.

По особенностям структуры временного представления все радиотехнические сигналы подразделяются на аналоговые, дискретные и цифровые (рисунок 1.1).



а) б) в)

Рисунок 1.1 − Сигналы:

а) − аналоговый; б) − дискретный; в) − цифровой

Если физический процесс, порождающий сигнал, можно представить непрерывной функцией времени $u(t)$ (рисунок 1.1, а), то такой сигнал называют аналоговым (непрерывным). Простейшая математическая модель дискретного сигнала $u_T(t)$ − это последовательность точек на временной оси, в каждой из которых заданы значения соответствующего непрерывного сигнала. Одной из разновидностей дискретных сигналов является цифровой сигнал. В цифровом сигнале дискретные значения сигнала $u_T(t)$ заменяются числами $u_Ц(t)$, чаще всего реализованными в двоичном коде, который представляют высоким (единица) и низким (нуль) уровнями потенциалов напряжения.

По математическому представлению все многообразные радиотехнические сигналы принято делить на две основные группы: детерминированные и случайные сигналы.

Детерминированными называют радиотехнические сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени достоверно известны, т. е. предсказуемы с вероятностью равной единице. Примером детерминированного радиотехнического сигнала может служить гармоническое (синусоидальное) колебание, последовательность импульсов, форма, амплитуда и временное положение которых заранее известно.

Детерминированные сигналы можно подразделить на периодические и непериодические (импульсные).

Периодические сигналы бывают гармоническими, т. е. содержащими только одну гармонику, и полигармоническими, спектр которых состоит из множества гармонических составляющих. К гармоническим сигналам относятся сигналы, описываемые функцией синуса или косинуса. Все остальные сигналы являются полигармоническими.

Случайные сигналы − это сигналы, мгновенные значения которых в любые моменты времени неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью, меньшей единицы. Практически все реальные случайные сигналы или большинство из них представляют собой хаотические функции времени. Сигналом, несущим полезную информацию, может быть только случайный сигнал.

В процессе передачи информации сигналы подвергаются тому или иному преобразованию, например модуляции, демодуляции (детектированию), кодированию (декодированию), усилению, задерживанию, и др.

1.2 Периодические сигналы

Периодическим называется любой сигнал, для которого выполняется условие $u(t) = u(t+nT)$, где период повторения или следования импульсов T, а n − любое целое число.

Простейшим периодическим детерминированным сигналом является гармоническое колебание (ток, напряжение, заряд, напряженность поля), определяемое законом

$$u(t) = A\cos(2\pi t / T + \theta) = A\cos(\omega t + \theta),\ -\infty < t < \infty, \tag{1.1}$$

где A, T, ω и θ − постоянные амплитуда, период, угловая частота и начальная фаза колебания.

Любой сложный периодический сигнал, как известно, можно представить в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi / T$. Основной характеристикой сложного периодического сигнала является его спектральная функция, содержащая информацию об амплитудах и фазах отдельных гармоник.

1.2.1 Разложение сложных периодических сигналов на гармонические составляющие

При разложении периодического колебания $s(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям в качестве ортогональной системы берут

$$1, \cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \ldots, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t, \ldots \tag{1.2}$$

или

$$\ldots, e^{-j2\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, 1, e^{j\omega_1 t}, e^{j2\omega_1 t}, \ldots \tag{1.3}$$

Интервал ортогональности в обоих случаях совпадает с периодом $T = 2\pi / \omega_1$ функции $s(t)$.

Система функций (1.2) приводит к тригонометрической форме ряда Фурье, а система (1.3) − к комплексной форме. Между этими двумя формами существует простая связь.

Представим периодический сигнал наиболее распространенной тригонометрической формой ряда Фурье:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\ dt$$ − постоянная составляющая;

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos n \omega_1 t\, dt$$ − амплитуда косинусоидальных составляющих;

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin n \omega_1 t\, dt$$ − амплитуда синусоидальных составляющих.

Спектральную составляющую с частотой ω_1 называют первой (основной) гармоникой, а составляющие с частотами $n\omega_1$ $(n > 1)$ −высшими гармониками периодического сигнала.

С математической точки зрения часто удобно выражение (1.4) описывающее данный сигнал, представлять в другой, эквивалентной форме ряда Фурье:

$$u(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_1 t - \varphi_n), \tag{1.5}$$

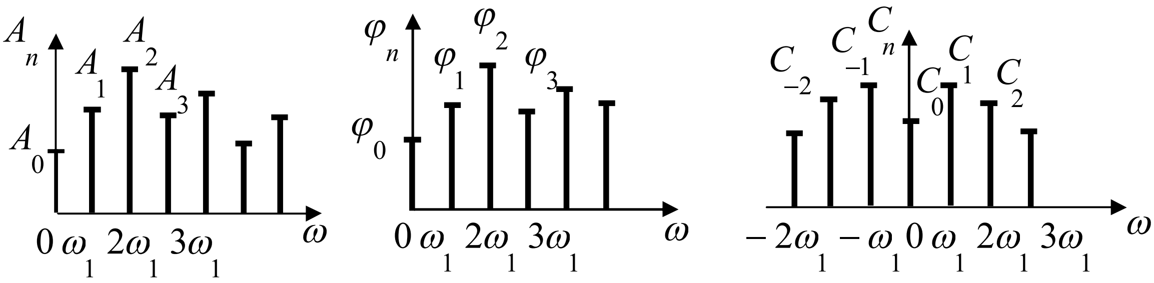
где $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ − амплитуда, а $\varphi_n = arctg(b_n / a_n)$− начальная фаза n – гармоники сигнала. Если перед φ_n стоит знак «+», тогда начальная фаза имеет знак «−».

В радиоэлектронике широко используется комплексный ряд Фурье

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_n e^{j n \omega_1 t}, \tag{1.6}$$

где $$\dot{C}_n = C_n(j\omega) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j n \omega_1 t} dt. \tag{1.7}$$

Спектр периодического сигнала принято называть линейчатым или дискретным, так как он состоит из отдельных линий, высота которых равна амплитуде A_n соответствующих гармоник. На рисунке 1.2 приведены спектры периодического сигнала: а) − амплитудный; б) − фазовый; в) – комплексный.



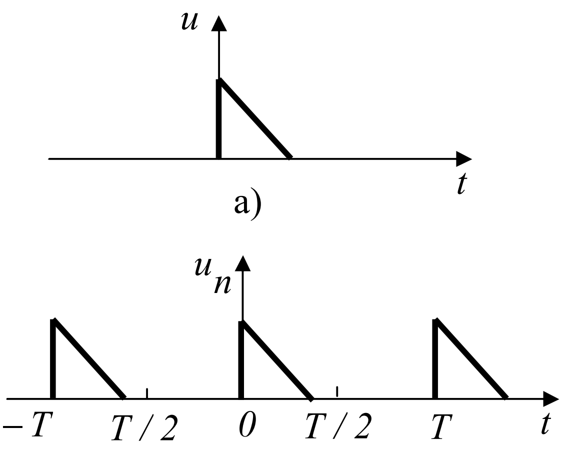
а) б) в)

Рисунок 1.2 – Спектры периодических сигналов:
а) − амплитудный; б) − фазовый; в) – комплексный

1.3 Непериодические сигналы. Спектральная плотность

При анализе непериодических (импульсных) сигналов их формально заменяют периодическими сигналами с бесконечно большим интервалом (периодом) следования $T \to \infty$.

Положим, что некоторая заданная функция $u(t)$ аналитически описывает одиночный импульсный (иногда называют финитным) сигнал конечной длительности (рисунок 1.5, а). Мысленно дополнив его такими же импульсными сигналами, следующими с некоторым интервалом T (рисунок 1.5, б), получим периодическую последовательность аналогичных импульсов $u(t) = u(t + nT)$.



б)

Рисунок 1.5 − Непериодические сигналы:
а) − один импульс; б) − условное периодическое представление

Для того чтобы вне искусственно введенного интервала $0, T$ исходный сигнал был равен нулю, необходимо увеличить период повторения импульсов. При увеличении периода и $T \to \infty$ все импульсы уйдут вправо и влево в бесконечность и периодическая последовательность $u_n(t)$ вновь станет одиночным импульсом $u(t)$.

Периодическая функция для этого случая запишется так

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,e^{-jn\omega_1 t}dt\,\Big]e^{jn\omega_1 t} \;. \qquad (1.14)$$

Так как период следования $T=2\pi/\omega_1$, то

$$u_n(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,e^{-jn\omega_1 t}dt\,\Big]e^{jn\omega_1 t}\omega_1 \;. \qquad (1.15)$$

В предельном случае, когда период $T\to\infty$, равные расстояния между спектральными линиями уменьшаться настолько, что спектр станет сплошным, а амплитуды отдельных спектральных составляющих окажутся бесконечно малыми. При этом частота следования импульсов $\omega_1=2\pi T\to\infty$ и превращается в $d\omega$, дискретная переменная $n\,\omega_1-$ в мгновенную (текущую) частоту ω, а сумма трансформируется в интеграл. Периодическая последовательность импульсов $u_n(t)$ станет одиночным импульсом $u(t)$ и выражение (1.15) запишется в виде

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-T/2}^{T/2}u(t)\,e^{-j\omega t}dt\,\Big]e^{j\omega t}d\omega \;. \qquad (1.16)$$

Здесь интеграл в скобках является комплексной функцией частоты. Обозначив его

$$\dot{S}(\omega)=S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad (1.17)$$

получим

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega \;. \qquad (1.18)$$

Соотношения (1.17) и (1.18) называют соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье. Они связывают между собой вещественную функцию времени (сигнал) $u(t)$ и комплексную функцию частоты $\dot{S}(\omega)$.

Таким образом, интеграл Фурье (1.17) содержит непрерывную (сплошную) последовательность спектральных составляющих сигнала с бесконечно малыми амплитудами. Функцию $\dot{S}(\omega)$ называют спектральной плотностью. Она характеризует интенсивность сплошного распределения амплитуд гармоник непериодического сигнала вдоль оси частот ω. В этом основное отличие спектральной плотности непериодического сигнала от дискретного спектра периодического сигнала, в котором каждая гармоническая составляющая имеет вполне определенное значение частоты и отстоит от соседней на величину $\omega_1=2\pi/T$. Дискретный спектр имеет размерность амплитуды (B или A). Спектральная плотность имеет размерность $B/Гц$ или $A/Гц$.

Определим спектральную плотность прямоугольного импульса. Пусть имеется прямоугольный импульс с амплитудой E и длительностью $\tau_И$ (рисунок 1.6, а). Так как анализируемый сигнал расположен на временном интервале $-\tau_И/2,\;\;\tau_И/2$, то, в соответствии с (1.17), получим

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau_И/2}^{\tau_И/2} E\, e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\tau_И/2}^{\tau_И/2} (\cos\omega t - j\sin\omega t)\, dt = E\,\tau_И \frac{\sin(\omega\tau_И/2)}{\omega\tau_И/2}. \tag{1.19}$$

На рисунке 1.6, б) показан модуль спектральной плотности прямоугольного импульса напряжения.

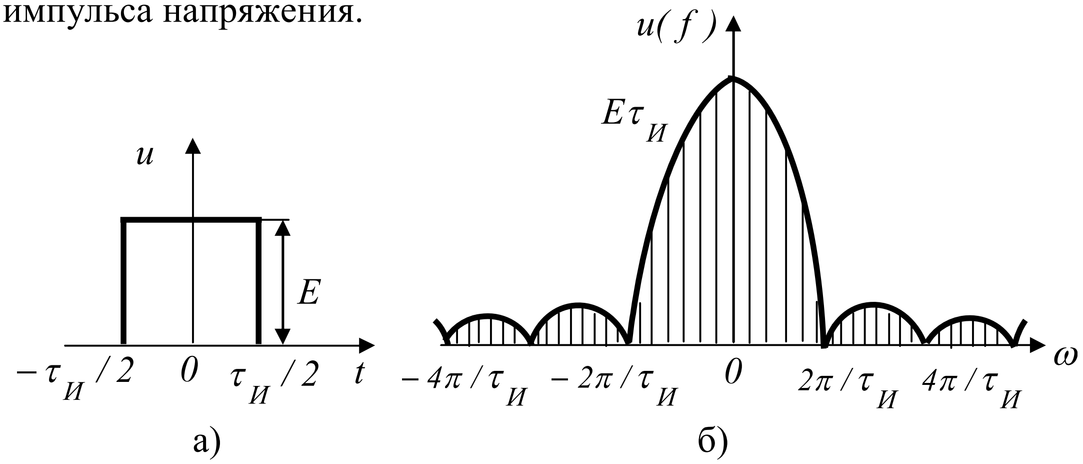


Рисунок 1.6 − Прямоугольный импульс:
а) − временная диаграмма; б) − спектральная плотность

Сравнив выражения для спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса (1.19) и спектра периодической последовательности таких же импульсов (1.9) можно сделать заключение, что модуль спектральной плотности и огибающая гармоник дискретного спектра совпадают по форме и отличаются лишь масштабом по оси амплитуд.