МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ф. СКОРИНЫ

РАЗРАБОТКА К ЛЕКЦИЯМ ПО КУРСУ "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА"

В двух частях

Часть I. "Теория булевых функций" для студентов математического и экономического факультетов

Гомель 1992

Составитель: В.Н.Семенчук

Рецензент: А.Ф.Васильев, кандидат физико-математических наук, доцент

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом математического факультета Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины

§ I. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Алгебра логики – самый простой раздел математической логики. Язык алгебры логики является одним из простейших языков математики. Основными объектами данного раздела являются высказывания. Понятие "высказывание" является первичным, оно не определяется, а поясняется. Под высказыванием понимают предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно. Например, высказывание "$2 + 3 = 5$" – истинное, высказывание "существует действительное число x такое, что $x^2 = -1$ " ложное. Очевидно, не каждое предложение является высказыванием. Например, предложения: "Когда ты был дома?", "Пойдем со мной!" не являются высказываниями. Высказывания будем обозначать малыми латинскими буквами $x, y, z, \dots$, а их значения, т.е. истину и ложь, соответственно I и 0. Из двух данных высказываний с помощью связок "не", "и", "или", "если...то", "тогда и только тогда, когда..." можно образовывать новые высказывания. Например, из высказываний "число 2 простое", "число 2 четное" с помощью указанных выше связок получаем высказывания "число два простое и четное", "число 2 непростое", "число 2 простое или четное". Высказывание " если π иррационально, то π^2 тоже иррационально" получается связыванием двух высказываний связкой "если...то". Эти операции соответствуют упомянутым выше связкам, употребляемым в обычной речи.

Рассмотрим примеры логических операций.

I. Логическая операция, соответствующая связке "и", называется **конъюнкцией** и обозначается $\&$. В некоторых книгах эту операцию обозначают символом $\wedge$. Пусть x и y – высказывания. Высказывание $x \cdot y$ назовем конъюнкцией x и y. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y.

Соответствующее определение запишем в виде таблицы истинности

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	I	0
I	0	0
I	I	I

Определение конъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний.

Конъюнкция $x_1 x_2 \dots x_n$, которую мы кратко обозначим через $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, истинна тогда и только тогда, когда истинны все высказывания.

2. Логическая операция, соответствующая связке "или", называется **дизъюнкцией** и обозначается $\vee$.

Пусть x и y – высказывания. Высказывание $x \vee y$ назовем дизъюнкцией x и y. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний x или y истинно.

Данное определение запишем в виде таблицы истинности

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	I	I
I	0	I
I	I	I

Определение дизъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний. Дизъюнкция $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, которую мы кратко обозначим через $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$, истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний $x_1, x_2, \dots, x_n$ истинно.

3. Логическая операция, соответствующая связке "не", называется **отрицанием**.

Отрицание высказывания x записывается так: $\bar{x}$ и определяется следующей таблицей истинности:

x	$\bar{x}$
0	I
I	0

4. Логическая операция, соответствующая связке "если...то", называется **импликацией**. Эту операцию будем обозначать символом $\Rightarrow$. При этом высказывание "если x, то y" записывается в виде $x \Rightarrow y$. Высказывание x называется посылкой импликации, y – ее заключением. Импликация двух высказываний

x и y задается следующей таблицей истинности:

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	I
0	I	I
I	0	0
I	I	I

Из определения импликации вытекает, что:

I) импликация с ложной посылкой всегда истинна;

2) импликация с истинным заключением всегда истинна;

3) импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

5. Логическая операция, соответствующая связке "тогда и только тогда, когда...", называется **эквивалентностью** и обозначается символом $\Leftrightarrow$.

Пусть x и y – высказывания. Высказывание $x \Leftrightarrow y$ назовем эквивалентностью x и y. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y или истинны, или ложны.

Данное определение запишем в виде таблицы истинности:

x	y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	I
0	I	0
I	0	0
I	I	I

§ 2. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Пусть $\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, \dots\}$ исходный алфавит переменных.

Функцией алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **от переменных** $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется функция, принимающая значения I, 0 и аргументы которой также принимают значения I, 0.

Обычно функции алгебры логики называют булевыми функциями. Название "булевы функции" возникло в связи с использованием функций рассматриваемого типа в алгебре логики, начало которой было положено трудами ирландского ученого I9 века Дж.Буля. Областью определения булевой функции от n переменных служат совокупность всевозможных n-мерных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \{0,1\}$.

Следует отметить, что любой такой набор можно рассматривать как представление некоторого целого неотрицательного числа в двоичной системе счисления. Например, набору (0,I,0,I) соответствует число $I \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 = 5$, а набору (I,I,I) – число $I \cdot 2^0 + I \cdot 2^I + I \cdot 2^2 = 7$.

Все наборы размерности нумеруются целыми числами от 0, $2^n - I$. Отсюда нетрудно заметить, что число таких наборов равно 2^n.

Всякая булева функция от n переменных может быть задана с помощью таблицы истинности.

Таблица I

x_1	$x_2 \ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	0	0	(0,0,...., 0,0)
0	0	0	I	(0,0,...., 0,I)
0	0	I	0	(0,0,...., I,0)
....	....	....	....	....
I	I	I	I	(I,I,...., I,I)

Данная таблица состоит из 2^n строк, причем в ней все наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ расположены в порядке возрастания их номеров.

Очевидно, что булевы функции от n переменных однозначно определяются своими последними столбцами из таблицы I, т.е. наборами из 2 нулей и единиц. Следовательно, различных булевых функций от переменных будет столько, сколько имеется различных наборов длины 2, а их число равно 2^{2^n}. Итак, мы доказали следующую теорему:

Имеется точно 2^{2^n} булевых функций от переменных.

В алгебре логики особое значение имеют следующие булевы функции, которые называют элементарными булевыми функциями

$f_1(x) = 0$ – константа 0;

$f_2(x) = 1$ – константа I;

$f_3(x) = x$ – тождественная функция;

$f_4(x) = \overline{x}$ – отрицание x;

$f_5(x,y) = x \cdot y$ – конъюнкция x и y;

$f_6(x,y) = x \vee y$ – дизъюнкция x и y;

$f_7(x,y) = x \Rightarrow y$ – импликация x и y;

$f_8(x,y) = x \Leftrightarrow y$ – эквивалентность x и y;

$f_9(x,y) = x + y$ – сложение x и y по mod 2;

$f_{10}(x,y) = x \mid y$ – функция Шеффера;

$f_{11}(x,y) = x \downarrow y$ – стрелка Пирса.

Последние три функции задаются следующими таблицами истинности:

x	y	$x+y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	I	I
0	I	I	I	0
I	0	I	I	0
I	I	0	0	0

Введенное понятие булевой функции несовершенно тем, что оно не позволяет рассматривать функцию от меньшего числа аргументов как функцию от большего числа аргументов. Для устранения этого недостатка введем понятие фиктивной переменной.

Переменная x_i в функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется фиктивной, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ при любых значениях остальных переменных. В этом случае функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по существу зависит от $(n-1)$ – переменной, т.е. представляет собой функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от $n-1$ переменной. Говорят, что функция g получается из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получается из g введением фиктивной переменной, причем эти функции являются равными.

Благодаря введению фиктивных переменных любую булеву функцию от переменных можно считать функцией от любого большего числа переменных. Поэтому любую конечную совокупность булевых функций можно считать зависящими от одного и того же числа переменных.

§ 3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В алгебре логики из "элементарных" булевых функций можно строить формулы. Приведем определение формулы алгебры логики.

1) каждая "элементарная" булева функция – формула;

2) если некоторое выражение $\mathfrak{N}$ есть формула, то $\overline{\mathfrak{N}}$ тоже формула;

3) если некоторые выражения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть формулы, то выражения

$$\mathfrak{N} \vee \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M},\ \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{M}$$

тоже формулы;

4) других формул, кроме построенных по п.п. 1), 2), 3) нет.

Формулы алгебры логики мы будем обозначать большими буквами $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, ... Например, следующие выражения являются формулами алгебры логики:

$$(x \vee y)(x \downarrow \bar{x}), \quad (x + y) \vee (x \mid y).$$

С целью упрощения формул, условимся, что операция конъюнкции сильнее операции дизъюнкции, импликации и эквивалентности, т.е. если нет скобок, то сначала выполняется операция конъюнкции.

Формула алгебры логики определяет некоторую булеву функцию, значение которой совпадает со значениями данной формулы для всех наборов значений переменных.

Две формулы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ называются равносильными, если они определяют одну и ту же булеву функцию (запись $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ будет означать, что формулы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ равносильны).

ПРИМЕР. Формулы $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ равносильны, т.е.

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

Действительно, построим таблицы истинности для данных формул

x	y	xy	$\overline{xy}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	I	I	I	I
0	I	0	I	I	0	I
I	0	0	I	0	I	I
I	I	I	0	0	0	0

Из таблицы видно, что формулы $\overline{xy}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ определяют одну и ту же булеву функцию и, следовательно, являются равносильными.

Очевидно, что отношение равносильности формул алгебры логики является:

1) рефлексивным, т.е. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ для любой формулы $\mathfrak{N}$;

2) симметричным, т.е. если $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ для любых формул $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$;

3) транзитивным, т.е. если $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{N} = \mathfrak{L}$ для любых формул $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$.

Таким образом, отношение равносильности является отношением эквивалентности.

Если какую-нибудь формулу $\mathfrak{N}_1$, являющуюся частью формулы $\mathfrak{N}$, заменить формулой $\mathfrak{N}_2$, равносильной $\mathfrak{N}_1$, то полученная формула окажется равносильной $\mathfrak{N}$. Это свойство лежит в основе преобразования формул с целью их упрощения или приведения к определенной форме.

При преобразовании формул алгебры логики используются свойства логических операций, которые будут рассмотрены ниже.

§ 4. ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Приведем перечень важнейших равносильностей (законов) алгебры логики. Эти равносильности выражают свойства логических операций.

1. $x = x$ – закон тождества;
2. $x \cdot \bar{x} = 0$ – закон противоречия;
3. $x \vee \bar{x} = 1$ – закон исключенного третьего;
4. $\bar{\bar{x}} = x$ – закон двойного отрицания;
5. $x x = x$, $x \vee x = x$ – законы идемпотентности

6. $xy = yx$
$x \vee y = y \vee x$ – законы коммутативности ;

7. $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$
$x(y \vee z) = xy \vee xz$ – законы дистрибутивности;

8. $x(yz) = (xy)z$
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ – законы ассоциативности;

9. $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$
$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ – законы де Моргана;

10. $x \cdot 1 = x$, $x \vee 0 = x$

11. $x \cdot 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$

12. $x(x \vee y) = x$, $x \vee xy = x$ – законы поглощения;

13. $(x \vee y)(\bar{x} \vee y) = y$, $xy \vee \bar{x}y = y$ –законы склеивания.

Перечисленные законы алгебры логики доказываются с помощью таблицы истинности. В качестве примера докажем справедливость закона $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$.

x	y	z	yz	$x \vee yz$	$x \vee y$	$x \vee z$	$(x \vee y)(x \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	I	0	0	0	I	0
0	I	0	0	0	I	0	0
0	I	I	I	I	I	I	I
I	0	0	0	I	I	I	I
I	0	I	0	I	I	I	I
I	I	0	0	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I

Из таблицы видно, что формулы $x \vee yz$ и $(x \vee y)(x \vee z)$ определяют одну и ту же булеву функцию. Следовательно, они равносильны.

Логические операции-конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность, вообще говоря, не являются независимыми друг от друга. В самом деле,

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y, \quad x \Leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$$

$$xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}, \quad x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Первые две равносильности легко доказываются с помощью таблиц истинности. Две последние равносильности докажем с помощью законов де Моргана и двойного отрицания:

$$\overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}} = xy; \qquad \overline{\bar{x}\bar{y}} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} = x \vee y.$$

Итак, справедливы следующие утверждения:

I) импликацию и эквивалентность можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание;

3) дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание;

4) все операции посредством равносильных выражений можно заменить двумя: конъюнкцией и отрицанием или дизъюнкцией и отрицанием.

Естественно возникает следующий вопрос. Для чего вводить пять логических операций, когда можно обойтись двумя? Использование лишь двух операций существенным образом усложнило бы запись, что привело бы к громоздким формулам. Однако в некоторых приложениях математической логики удобно ограничиться двумя операциями. Аналогичная ситуация имеет место в арифметике. Всякое число можно записать с помощью цифр 0 и I. Однако записи чисел и выкладки в двоичной системе громоздки. К этой системе прибегают лишь в некоторых случаях.

Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называют **булевой алгеброй**. Законы I – I3 являются **основными законами булевой алгебры**.

Обратим внимание на характер соответствий между равносильностями, объединенными в пары под номерами (5–I3). В этих соответствиях проявляется так называемый закон двойственности.

Назовем формулу алгебры логики $\mathfrak{A}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **двойственной к формуле** $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, **если** $\mathfrak{A}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\mathfrak{A}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$

Будем говорить, что операция конъюнкции двойственна операции дизъюнкции и наоборот.

Как показано в § 4, всякая формула алгебры логики может быть приведена равносильными преобразованиями к формуле, содержащей только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому, учитывая законы де Моргана и двойного отрицания, две формулы алгебры логики $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, содержащие только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, будут двойственными, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную и I заменяется на 0, а 0 на I.

Например, формула $xy \vee \bar{z}$ двойственная к формуле $(x \vee y)\bar{z}$, а формула $x(\bar{y} \vee z)$ двойственная к формуле $x \vee \bar{y}z$.

Теперь сформулируем закон двойственности.

Если формулы алгебры логики $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ равносильны, то и двойственные им формулы $\mathfrak{N}^*$ и $\mathfrak{M}^*$ равносильны.

Докажем данный закон. Пусть $\mathfrak{N}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathfrak{M}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Согласно определению двойственной формулы $\mathfrak{N}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\mathfrak{N}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\mathfrak{M}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\mathfrak{M}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Так как $\mathfrak{N}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{M}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимают одинаковые значения при любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $\mathfrak{N}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \mathfrak{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{N}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{\mathfrak{M}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.
Так как формулы $\mathfrak{N}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{M}^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны соответственно формулам $\overline{\mathfrak{N}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\overline{\mathfrak{M}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, то они равносильны между собой.

Принцип двойственности позволяет сократить усилие на вывод равносильностей.

Пример. Из равносильности $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ вытекает равносильность $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Из равносильности $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ вытекает равносильность $x(y \vee z) = xy \vee xz$.

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО ПЕРЕМЕННЫМ. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть σ – параметр, равный 0 или I. Введем обозначение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0 \end{cases}$$

Проверкой легко установить, что $x^{\sigma} = 1$, тогда и только тогда, когда $x = \sigma$. Отсюда следует, конъюнкция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ равна I (здесь σ равен 0 или I) тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Например, конъюнкция $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$ (в которой $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_4 = 1$) равна I только в случае, когда $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$.

Всякая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть представлена в следующей форме:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

где $1 \leq k \leq n$, а дизъюнкция берется по всем наборам значений переменных.

Это представление носит название разложения функции по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, при $n = 4$, $k = 2$ разложение (I) имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0, 0, x_3, x_4) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0, 1, x_3, x_4) \vee$$
$$\vee x_1 \bar{x}_2 f(1, 0, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 f(1, 1, x_3, x_4).$$

Докажем справедливость разложения (I). Для этого возьмем произвольный набор значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Покажем, что левая и правая части соотношения (I) принимают при нем одно и то же значение. Действительно, так как $x^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$, то среди 2^k конъюнкций $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k}$ правой части (I) в единицу обращается только одна, в которой $\alpha_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Все остальные конъюнкции $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k}$ равны нулю. Поэтому $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. В качестве следствия из разложения (I) получаем следующие два специальных разложения

Разложение по переменной x_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \quad (2)$$

Если булева функция не есть константа 0, то справедливо разложение

Разложение по всем переменным:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n} \qquad (3)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$, при которых значение функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ равно I.

Разложение (3) называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (сокращенная запись СДНФ) функции

Разложение (3) дает способ построения СДНФ. Для этого в таблице истинности отмечаем все строки $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$, в которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1$. Для каждой такой строки образуем конъюнкцию $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n}$ и затем все полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и ее СДНФ. А это значит, что СДНФ для булевой функции единственна.

Единственная булева функция, не имеющая СДНФ, есть константа 0.

ПРИМЕР.I. Найти совершенную дизъюнктивную форму для функции $(x\Rightarrow\bar y)\Rightarrow z$.

Составим таблицы истинности для данной функции:

x	y	z	$\bar y$	$x\Rightarrow\bar y$	$(x\Rightarrow\bar y)\Rightarrow z$
0	0	0	I	I	0
0	0	I	I	I	I
0	I	0	0	I	0
0	I	I	0	I	I
I	0	0	I	I	0
I	0	I	I	I	I
I	I	0	0	0	I
I	I	I	0	0	I

Отсюда получаем: $(x\Rightarrow\bar y)\Rightarrow z = x^0y^0z^1 \vee x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^0 \vee x^1y^1z^1 = \bar x\bar y z \vee \bar x y z \vee x\bar y z \vee xy\bar z \vee xyz.$

Важную роль в алгебре логики играет следующее разложение булевых функций.

Всякая булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ может быть представлена в следующей форме:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigwedge_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k)}\left(x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\dots\vee x_k^{\bar\sigma_k}\vee f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,x_{k+1},\dots,x_n)\right), \qquad (4)$$

где $1\le k\le n$, а конъюнкция берется по всем 2^k наборам значений переменных.

Действительно, пусть $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ – произвольный набор значений переменных. Покажем, что любая и правая части соотношения (4) принимают при нем одно и то же значение. Так как $x_i^{\bar\sigma_i}=0$ только тогда, когда $x_i=\sigma_i$, то среди 2^k дизъюнкций $x_1^{\bar\sigma_1}\vee\dots\vee x_k^{\bar\sigma_k}$ правой части (4) в 0 обращается только одна, в которой $\alpha_i=\sigma_i$, $i=1,2,\dots,k$. Все остальные дизъюнкции равны I. Поэтому

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\alpha_1^{\bar\alpha_1}\vee\alpha_2^{\bar\alpha_2}\vee\dots\vee\alpha_k^{\bar\alpha_k}\vee f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n).$$

Непосредственно из разложения (4) следуют следующие разложения булевых функций:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1\vee f(0,x_2,\dots,x_n))(\bar x_1\vee f(1,x_2,\dots,x_n)), \qquad (5)$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=0}}\left(x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\dots\vee x_n^{\bar\sigma_n}\right) \qquad (6)$$

Последнее разложение носит название совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ). Разложение (6) дает способ построения СКНФ. Для этого в таблице истинности отмечаем все строки $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, в которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=0$. Для каждой такой строки образуем дизъюнкцию $x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\dots\vee x_n^{\bar\sigma_n}$ и затем все полученные конъюнкции соединяем знаком конъюнкции. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее СКНФ. А это значит, что СКНФ для булевой функции единственна.

Единственная булева функция, не имеющая СКНФ, есть константа I.

ПРИМЕР 2. Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму для функции $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$

Составим таблицу истинности для данной функции

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$
0	0	0	I	I	I
0	0	I	I	I	I
0	I	0	I	0	0
0	I	I	I	I	I
I	0	0	0	I	0
I	0	I	0	I	0
I	I	0	I	0	0
I	I	I	I	I	I

Формула вида $\mathcal{D} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$

(краткая запись $\bigvee\limits_{i=1}^{t} K_i$), где K_i, $i = 1, 2, \ldots, t$ – конъюнкции $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_t}^{\sigma_t}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$ называется дизъюнктивной нормальной формой.

В силу приведенного определения ДНФ будут, например, выражения: $xy\bar{z} \vee xz$, $\overline{xy} \vee z$.

Как отмечено в § 4, все логические операции можно свести к трем: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Причем, ввиду закона де Моргана, знак отрицания можно предполагать отнесенным только к переменным.

Теперь, используя дистрибутивный закон, раскрываем скобки и получаем дизъюнктивную нормальную форму. Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма.

Доказательство данной теоремы дает способ построения дизъюнктивной нормальной формы для любой формулы алгебры логики.

ПРИМЕР. Найти дизъюнктивную нормальную форму для следующей формулы

$$(x \Rightarrow y)\overline{\overline{y}z} \vee \overline{uv}.$$

Исключая знак $\Rightarrow$ по закону $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ и применяя законы де Моргана и двойного отрицания, получаем:

$$(\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z}) \vee \bar{u} \vee \bar{v}$$

Затем, применяя закон дистрибутивности, раскроем скобки

$$\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee y \vee y\bar{z} \vee \bar{u} \vee \bar{v}$$

Последнее выражений есть дизъюнктивная нормальная форма.

Формула вида

$$\mathcal{K} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \ldots \mathcal{D}_t$$

(краткая запись $\bigwedge\limits_{i=1}^{t} \mathcal{D}_i$), где $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$ – дизъюнкции $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_t}^{\sigma_t}$ называется конъюнктивной нормальной формой (сокращенно КНФ).

В силу приведенного определения КНФ будут, например, выражения: $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)$, $(x \vee y)z$

Как показано выше, для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей дизъюнктивная форма. Используя дистрибутивный закон $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, из данной ДНФ легко получить КНФ.

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей конъюнктивная нормальная форма.

Доказательство данной теоремы дает способ построения конъюнктивной нормальной формы для любой формулы алгебры логики.

ПРИМЕР. Найти дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для следующей формулы: $xy \Leftrightarrow z$.

Используя закон $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$, исключаем знак $\Leftrightarrow$. Получаем формулу $\overline{xy}\,\bar{z} \vee xyz$.

Используя закон де Моргана, получаем формулу $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$.
Раскрывая скобки, получаем дизъюнктивную нормальную форму

$$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$$

Чтобы получить конъюнктивную нормальную форму, применим к формуле

$$(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$$

дистрибутивный закон, получаем:

$$(\bar{z} \vee xyz)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee xyz) = (\bar{z} \vee x)(\bar{z} \vee y)(\bar{z} \vee z)\cdot$$
$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)$$

последнее выражение является конъюнктивной нормальной формой. Так как $x \vee \bar{x} = 1$ и $x \vee 1 = 1$, то полученная КНФ равносильна следующей КНФ:

$$(\bar{z} \vee x)(\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

Среди всех нормальных формул данной формулы выделим совершенную нормальную форму как дизъюнктивную, так и конъюнктивную. Учитывая разложение (3), нетрудно заметить, что совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы алгебры логики, содержащей ровно n различных переменных, есть ее дизъюнктивная нормальная форма, в которой:

1) все конъюнкции попарно различны;
2) каждая конъюнкция содержит ровно n переменных;
3) в каждой конъюнкции встречаются все n переменных.

На примере I мы рассмотрели один из способов построения СДНФ, основанный на составлении таблицы истинности. Следующий способ построения СДНФ основан на применении законов алгебры логики.

ПРИМЕР 3. Найти совершенную дизъюнктивную форму формулы

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z.$$

Используя, что $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, получаем $\overline{\bar{x} \vee y} \vee z$.
Ввиду законов де Моргана и двойного отрицания имеем

$$x\bar{y} \vee z.$$

Получили дизъюнктивную нормальную форму. Данная ДНФ равносильна формуле $x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee z(x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})$.

Раскрывая скобки, получаем:

$$x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Используя закон идемпотентности, получаем требуемую СДНФ:

$$x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Учитывая разложение (6), нетрудно заметить, что совершенная конъюнктивная нормальная форма формулы алгебры логики, содержащей ровно n различных переменных, есть ее конъюнктивная нормальная форма, в которой:

1) все дизъюнкции попарно различны;
2) каждая дизъюнкция содержит ровно n членов;
3) в каждой дизъюнкции встречаются все n переменных.

На примере I мы рассмотрели один из способов построения СДНФ, основанный на составлении таблицы истинности. Следующий способ построения СДНФ основан на применении законов алгебры логики.

ПРИМЕР 4. Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы

$$(x \Rightarrow y)z$$

Используя, что $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, получаем

$$(\bar{x} \vee y)z.$$

Данная формула является конъюнктивной нормальной формой. Она равносильна формуле

$$(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(z \vee x\bar{x} \vee y\bar{y}).$$

Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(z \vee x \vee y)(z \vee x \vee \bar{y})(z \vee \bar{x} \vee \bar{y}).$$

Применяя закон идемпотентности, получаем требуемую совершенную конъюнктивную нормальную форму

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Формула алгебры логики называется т о ж д е с т в е н н о и с т и н н о й, если она при всех значениях, входящих в нее переменных, принимает значение истинно.

Примерами тождественно истинных формул являются формулы:

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow x), \quad x \vee \bar{x}, \quad x \vee y \vee 1.$$

Формула алгебры логики называется *тождественно ложной*, если она при всех значениях, входящих в нее переменных, принимает значение ложь.

Примерами тождественно ложных формул являются формулы:

$$x\bar{x}, \quad (x \vee y)\bar{x}\bar{y}$$

Формула алгебры логики называется *выполнимой*, если она при некоторых значениях, входящих в нее переменных, принимает значение истинно.

Примерами выполнимых формул являются следующие формулы:

$$x \Rightarrow y, \quad x \vee yz$$

В алгебре логики можно поставить следующую задачу: указать способ (алгоритм), позволяющий для каждой формулы алгебры логики выяснить, является она тождественно истинной или нет. Поставленная задача носит название *проблемы разрешения*.

Рассмотрим следующие два способа решения этой задачи.

Способ I (табличный). Для того, чтобы определить, является ли данная формула тождественно истинной или нет, достаточно составить ее таблицу истинности.

Однако данный способ, хотя и дает принципиальное решение проблемы разрешимости, практически неприменим.

Способ 2 основан на приведении формул к нормальной форме.

Формула алгебры логики тогда и только тогда является тождественно истинной, когда каждая дизъюнкция в её конъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с её отрицанием.

Действительно, если каждая дизъюнкция в конъюнктивной нормальной форме содержит переменную вместе с её отрицанием, то все дизъюнкции равны I, ибо $x \vee \bar{x} = 1$, $x \vee 1 = 1$. Отсюда следует, что КНФ является тождественно истинной.

Пусть теперь данная формула является тождественно истинной, и пусть $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_k^{\sigma_k}$ есть некоторая дизъюнкция в КНФ данной формулы. Допустим, что данная дизъюнкция не содержит переменной вместе с её отрицанием. В таком случае мы можем каждой переменной, не стоящей под знаком отрицания, дать значение 0, а каждой переменной, стоящей под знаком отрицания – значение I. После указанной подстановки все дизъюнкции станут равны 0, следовательно, формула

не является тождественно истинной. Получили противоречие.

ПРИМЕР. Выяснить, будет ли тождественно истинной формула

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow xy).$$

Используя, что $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, получаем

$$\bar{x} \vee \bar{y} \vee xy.$$

Применяя закон дистрибутивности, получаем КНФ:

$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y)$$

Так как каждая дизъюнкция содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием, то формула тождественно истинна.

Аналогично предыдущей теореме доказывается теорема:

Формула алгебры логики тогда и только тогда является тождественно ложно, когда каждая конъюнкция в её дизъюнктивной форме содержит некоторую переменную вместе с её отрицанием.

§ 6. АЛГЕБРА ЖЕГАЛКИНА

Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями конъюнкции и сложения (по модулю два), будем называть алгеброй Жегалкина.

Непосредственной проверкой (с помощью истинности) устанавливаются следующие законы:

$x + y = y + x$ – закон коммутативности;

$x + (y + z) = (x + y) + z$ – закон ассоциативности;

$x(y + z) = xy + xz$ – закон дистрибутивности;

$x + x = 0$

$x + 0 = x$

В алгебре Жегалкина роль совершенных нормальных форм булевой алгебры играют полиномы Жегалкина.

Полиномом Жегалкина называется полином вида

$$\sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + a$$

причем в каждом наборе ($i_1, i_2, \dots, i_k$) все различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких не совпадающих наборов, a – константа 0 или I.

Например, выражение $xy + x + y + 1$ является полиномом Жегалкина, а выражения $yy + y + z$, $xy + z + xy$ нет, так как в первом выражении имеется конъюнкция, содержащая две переменные y, а второе выражение содержит два одинаковых слагаемых xy и yx.

Если в произвольной формуле алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все возможные упрощения по указанным выше законам и закону идемпотентности, то получится формула, являющаяся полиномом Жегалкина.

Рассмотрим теперь взаимосвязь, существующую между операциями булевой алгебры и алгебры Жегалкина. Непосредственной проверкой устанавливается

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + 1 \\ x \vee y &= xy + x + y \\ x + y &= \bar{x} y \vee x \bar{y} \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Ранее мы показали, что любая булева функция может быть выражена в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Согласно законам (I) получаем, что любая булева функция может быть выражена в виде формулы алгебры Жегалкина. Следовательно, существование полинома Жегалкина доказано для любой булевой функции.

Число различных слагаемых (конъюнкций) полинома Жегалкина от n переменных равно числу всех подмножеств из n элементов, т.е. 2^n. Число различных полиномов, которых можно образовать из этих конъюнкций, равно числу всех подмножеств множества данных конъюнкций, т.е. 2^{2^n}. Следовательно, число всех полиномов Жегалкина от n переменных равно числу всех булевых функций от n переменных. Отсюда следует единственное представление булевой функции посредством полинома Жегалкина. Итак, справедлива следующая теорема.

Каждая булева функция может быть единственным образом выражена при помощи полинома Жегалкина.

ПРИМЕР. Выразить $x \Rightarrow y$ в виде полинома Жегалкина.

<u>I способ</u>. Ищем требуемый полином методом неопределенных коэффициентов: $x \Rightarrow y = axy + bx + cy + d$

При $x = y = 0$ имеем: $d = 1$;
при $x = 0,\ y = 1$ имеем: $c = 0$;
при $x = 1,\ y = 0$ имеем: $b = 1$;
при $x = 1,\ y = 0$ имеем: $1 = a + b + c + d = a + 1 + 0 + 1 = a$, т.е. $a = 1$

Отсюда $x \Rightarrow y = xy + x + 1$

<u>2 способ.</u> $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = \overline{x(y+1)} = x(y+1) + 1 = xy + x + 1$

§ 7. ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ. ВАЖНЕЙШИЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

Ранее мы показали, что всякая булева функция с помощью операций суперпозиции может быть выражена через элементарные функции $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$. Поэтому для любой системы булевых функций $\mathfrak{D}$ возникает естественный вопрос: для всякой ли булевой функции существует равносильная ей суперпозиция функций из $\mathfrak{D}$?

Система булевых функций $\mathfrak{D} = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ называется п о л н о й , если любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции функций из $\mathfrak{D}$.

Приведем примеры полных систем.

ПРИМЕР I. Как отмечено выше, система $\mathfrak{D} = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ является полной.

ПРИМЕР 2. Множество всех булевых функций P_2 является полной системой.

В вопросе о полноте важную роль играет следующая теорема.

П у с т ь $\mathfrak{D}_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_r, \dots\}$ и $\mathfrak{D}_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_k, \dots\}$ с и с т е м ы б у л е в ы х ф у н к ц и й. Е с л и $\mathfrak{D}_1$ – п о л н а я с и с т е м а и к а ж д а я её ф у н к ц и я в ы р а ж а е т с я в в и д е с у п е р п о з и ц и и ф у н к ц и й и з $\mathfrak{D}_2$, т о с и с т е м а $\mathfrak{D}_2$ т а к ж е я в л я е т с я п о л н о й .

Действительно, так как $\mathfrak{D}_1$ – полная система, то любая булева функция представима в виде суперпозиций функций из $\mathfrak{D}_1$. А так как любая функция из $\mathfrak{D}_1$ представима в виде суперпозиций функций из $\mathfrak{D}_2$, то $\mathfrak{D}_2$ – полная система.

ПРИМЕР 3. Система $\{\bar{x}, x \vee y\}$ – полная.

Это следует из предыдущей теоремы и из примера I, ибо $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Аналогичным образом получаем полноту системы $\{\bar{x}, xy\}$. Приведенные примеры говорят о том, что существуют различные полные системы булевых функций. Каждая из таких систем может быть принята в качестве набора "элементарных" функций, и любая булева функция может быть выражена в виде суперпозиции через "элементарные" функции принятого набора.

С понятием полноты тесно связано понятие замкнутого класса и замыкания.

Множество T булевых функций называется з а м к н у т ы м к л а с с о м , если любая суперпозиция функций из T снова принадлежит T.

Всякая система M булевых функций порождает некоторый замкнутый класс. Этот класс состоит из всех булевых функций, которые можно получить суперпозициями из M. Такой класс называется з а м ы к а н и е м M и обозначается $[M]$. Для замкнутого класса M следует, что $[M] = M$. Очевидно, что если M – полная система, то $[M] = P_2$.

При установлении необходимого и достаточного условия полноты важную роль играют пять замечательных классов булевых функций, которые будут рассмотрены ниже.

П е р в ы й к л а с с – класс булевых функций, сохраняющих константу 0, т.е. функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Подсчитаем число таких булевых функций от n переменных. Поскольку на нулевом наборе значение функций из T_0 фиксировано, то в T_0 содержится ровно $\frac{1}{2} 2^{2^n}$ булевых функций от n переменных.

Ясно, что функции x, xy, $x \vee y$ принадлежат классу T_0, а $\bar{x}$ не принадлежит T_0. Следовательно, $T_0 \subset P_2$.

В т о р о й з а м е ч а т е л ь н ы й к л а с с – класс булевых функций, сохраняющих константу I, т.е. функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Как и выше, легко подсчитать число таких функций от переменных. Их ровно $\frac{1}{2} 2^{2^n}$.

Ясно, что функции x, xy, $x \vee y$ принадлежат классу T_1, а функции $x + y$ – нет. Следовательно, $T_1 \subset P_2$.

Т р е т и й з а м е ч а т е л ь н ы й к л а с с – класс всех самодвойственных функций S.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется с а м о д в о й с т в е н н о й , если она совпадает со своей двойственной, т.е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$.

ПРИМЕР. Доказать, что функция $xy \vee yz \vee xz$ является самодвойственной.

Двойственная для данной функции есть функция $\overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}}$. Теперь, применяя закон де Моргана, получаем

$$\overline{\bar{x}\bar{y}} \cdot \overline{\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}\bar{z}} = (\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}})(\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}})(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{z}}) \quad (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z)$$

Используя законы дистрибутивности и идемпотентности, имеем

$$(y \vee xz)(x \vee z) = xy \vee yz \vee xz$$

Следовательно, искомая функция самодвойственна.

Очевидно, что x и $\bar{x}$ принадлежат классу S, а xy, $x \vee y$ не принадлежат S. Следовательно, $S \subset P_2$.

Подсчитаем число всех самодвойственных функций от n переменных.

Так как самодвойственная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ принимает противоположные значения, то она полностью определяется своими значениями, принимаемыми ею на половине всех наборов переменных. Следовательно, число самодвойственных функций от переменных равно $2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = \sqrt{2^{2^n}}$.

Ч е т в е р т ы й з а м е ч а т е л ь н ы й к л а с с – класс всех линейных булевых функций.

Булевы функции вида $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$, где a_i и a_0 равны нулю или единице, называются л и н е й н ы м и.

Нетрудно подсчитать число всех линейных булевых функций от переменных. Их число равно 2^{n+1}.

Очевидно, что функции x, $x + y$ принадлежат L, а функции xy не принадлежат L. Следовательно, $L \subset P_2$.

Для того, чтобы определить, является данная булева функция линейной или нет, её надо представить в виде полинома Жегалкина.

ПРИМЕР. Выяснить, является ли функция $x \vee y$ линейной. Запишем данную функцию в виде полинома Жегалкина:

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{(x+1)(y+1)} = (x+1)(y+1)+1 =$$
$$= xy+x+y+1+1 = xy+x+y$$

Следовательно, функция $x \vee y$ не является линейной.

Пятый замечательный класс – класс M всех монотонных булевых функций.

Два набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ называются сравнимыми, если $\alpha_i \le \beta_i$, $i=1,2,\dots,n$.

Запись $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ означает, что набор $\tilde{\alpha}$ предшествует набору $\tilde{\beta}$.

Например, $(0,1,1) \le (1,1,1)$, а наборы (0,1,0) и (1,0,0) несравнимы.

Булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$, имеет место неравенство $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

Очевидно, что константы 0,1 и функция x – монотонные функции.

Функции $\overline{x} \Rightarrow y$, $\overline{\overline{x}}$ – монотонные функции (доказательство осуществляется проверкой).

Функции $x \Rightarrow y$, $\overline{x}$ не являются монотонными, так как $(0,0) \le (1,0)$, а $1=0 \Rightarrow 0 > 1 \Rightarrow 0 = 0$, $(0) \le (1)$, $\overline{0} > \overline{1}$

Следовательно, $M \subset P_2$.

Для распознавания монотонности функции полезной является следующая теорема.

Булева функция, имеющая дизъюнктивную нормальную форму, не содержащую отрицаний, является монотонной функцией, отличной от 0 и 1.

Докажем данную теорему. Пусть булева функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ имеет дизъюнктивную нормальную форму $\mathfrak{D}$, не содержащую отрицаний, и пусть на наборе $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\mathfrak{D}(\tilde{\alpha})=1$.

Тогда $\mathfrak{D}$ содержит конъюнкцию $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ равную единице на наборе $\tilde{\alpha}$. Следовательно, $\alpha_{i_1}=\alpha_{i_2}=\dots=\alpha_{i_k}=1$. Возьмем любой набор $\tilde{\beta}$ такой, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$. В нем обязательно $\beta_{i_1}=\beta_{i_2}=\dots=\beta_{i_k}=1$. Поэтому конъюнкция $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ при этом наборе равна 1, а значит $\mathfrak{D}(\tilde{\beta})=1$. Итак, условие монотонности для ДНФ $\mathfrak{D}$ выполнено. А это значит, что функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ монотонна.

Используя данную теорему, сразу получаем, что функции

$xy \vee yz \vee xz$, $xy \vee z$ являются монотонными.

Классы булевых функций T_0, T_1, S, M, L являются замкнутыми классами.

Докажем, что T_0 – замкнутый класс. Для этого надо показать, что функция $\Phi=f(f_1,f_2,\dots,f_k)$ принадлежит T_0, если функции f, $f_1,f_2,\dots,f_k$ принадлежат T_0. Это следует из следующей цепочки неравенств:

$$\Phi(0,0,\dots,0)=f(f_1(0,\dots,0),\dots,f_k(0,\dots,0))=f(0,0,\dots,0)=0.$$

Аналогичным образом доказывается замкнутость класса T_1.

Если $\Phi=f(f_1,f_2,\dots,f_k)$, $f_1,f_2,\dots,f_k$ самодвойственные функции, то $\Phi^*=f^*(f_1^*,\dots,f_k^*)=f(f_1,\dots,f_k)=\Phi$. Итак, S – замкнутый класс.

Пусть $\Phi=f(f_1,f_2,\dots,f_k)$, где $f, f_1,f_2,\dots,f_k$ – монотонные функции, и пусть $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\tilde{x}^1=(x_{1_1},x_{1_2},\dots,x_{1_{n_1}})$, ..., $\tilde{x}^k=(x_{k_1},\dots,x_{k_{n_k}})$ их наборы переменных. Здесь переменные функции Φ состоят из функций $f_1,f_2,\dots,f_k$. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ два таких набора, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$. Каждый из наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ однозначно определяет следующие наборы $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\alpha}^k, \tilde{\beta}^k$ значений переменных $\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^k$. Причем $\tilde{\alpha}^1 \le \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\alpha}^k \le \tilde{\beta}^k$.

Так как $f_1,\dots,f_k$ – монотонные функции, то $f_i(\tilde{\alpha}^i) \le f_i(\tilde{\beta}^i)$.

Следовательно, $(f_1(\tilde{\alpha}^1),\dots,f_k(\tilde{\alpha}^k)) \le (f_1(\tilde{\beta}^1),\dots,f_k(\tilde{\beta}^k))$.

Из монотонности функции f получаем, что

$$\Phi(\tilde{\alpha})=f(f_1(\tilde{\alpha}^1),\dots,f_k(\tilde{\alpha}^k)) \le f(f_1(\tilde{\beta}^1),\dots,f_k(\tilde{\beta}^k)) = \Phi(\tilde{\beta}).$$

Итак, M – замкнутый класс.

Замкнутость класса L следует непосредственно из определения линейных функций.

Как показано выше, функция $\overline{x}$ не принадлежит классу M. Следующая теорема показывает, что всякая немонотонная функция содержит, в некотором смысле, в своем составе функцию отрицания.

Если $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – немонотонная функция, то в результате её суперпозиции с константами 0 и 1 может быть получена функция отрицания $\overline{x_i}$ одного из аргументов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Докажем данную теорему. Так как функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ немонотонная, то найдутся два набора $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ значений переменных таких, что $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$, и $f(\tilde{a}) > f(\tilde{b})$. Причем, в качестве этих наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно выбрать соседние наборы, т.е. наборы, отличающиеся значениями только по одной из координат. Действительно, если $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не являются соседними наборами, то набор $\tilde{b}$ отличается от набора $\tilde{a}$ в t координатах, где $t > 1$. Причем, эти координат в наборе $\tilde{a}$ равно 0, а в наборе $\tilde{b}$ равны I. Из этого следует, что между наборами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно вставить $t-1$ наборов $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^{t-1}$, таких, что, $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{a}^1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \tilde{a}^{t-1} \preccurlyeq \tilde{b}$

(I)

Так как $f(\tilde{a}) > f(\tilde{b})$, то обязательно найдется такая пара соседних наборов из цепочки (I) $\tilde{a}^i$ и $\tilde{a}^{i+1}$, что $f(\tilde{a}^i) > f(\tilde{a}^{i+1})$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
$$\tilde{b} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Подставим в функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо переменной x_j константу a_j, где $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. В результате мы получим функцию от одной переменной $g(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Отсюда
$$g(0) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(\tilde{a}) > f(\tilde{b}) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n) = g(1)$$

А это значит, что $g(0) = 1, g(1) = 0$. Следовательно,
$g(x_i) = \overline{x_i}$

§ 8. ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ

Цель данного параграфа дать ответ на один из основных вопросов алгебры логики – вопрос о необходимом и достаточном условии полноты системы булевых функций. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказательство которой будет вестись по методу А.В.Кузнецова и С.К.Яблонского.

Теорема (о полноте). Для того, чтобы система булевых функций $\mathfrak{D}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.

Доказательство. <u>Необходимость</u>. Пусть $\mathfrak{D}$ – полная система, целиком содержащаяся в одном из классов T_0, T_1, S, L, M. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathfrak{D} \subseteq T_0$. Тогда $P_2 = [\mathfrak{D}] \subseteq [T_0] = T_0$. Следовательно, $T_0 = P_2$, невозможно.

<u>Достаточность</u>. Пусть система булевых функций $\mathfrak{D}$ целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L. Тогда в системе $\mathfrak{D}$ обязательно найдутся следующие функции: f_1, не сохраняющая 0, f_2, не сохраняющая I, не самодвойственная функция f_3, нелинейная функция f_4, не монотонная функция f_5. Учитывая понятие фиктивной переменной, мы можем считать, что эти функции зависят от одних и тех же переменных

Вначале построим из системы функций $\mathfrak{D}$ константы 0 и I.

Рассмотрим функцию $g(x_1) = f(x_1, x_1, \ldots, x_1)$ Эта функция есть суперпозиция функций f_1 и x_1. Так как f_1 не принадлежит классу T_0, $g(0) = f(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Если теперь $g(1) = 1$, то $g(x_1)$ – константа I. Подставляя константу I в функцию f_2, мы получаем константу 0, ибо $f_2(1, 1, \ldots, 1) = 0$.

Пусть теперь $g(1) = 0$. Из равенств $g(0) = 1$ и $g(1) = 0$ заключаем, что $g(x_1) = \overline{x_1}$. Возьмём несамодвойственную функцию f_3. Очевидно, что в этом случае найдется такой набор переменных $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что $f_3(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_3(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$. Рассмотрим функцию $\varphi_i(x) = x^{a_i}, i = 1, 2, \ldots, n$ и построим с помощью операции суперпозиции функцию $h(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Тогда получаем:

$$h(0) = f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)) = f(0^{a_1}, \ldots, 0^{a_n}) = f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) = f(a_1, \ldots, a_n) = f(1^{a_1}, \ldots, 1^{a_n}) = h(1)$$

Итак, $h(0) = h(1)$. А это значит, что $h(x)$ есть константа 0 или I. Так как мы построили функцию $g(x_1) = \overline{x_1}$, то суперпозиция этой функции с одной из констант дает другую константу. Следовательно, константы 0 и I нами построены.

Теперь, используя предыдущую теорему, мы можем с помощью суперпозиции функции f_5 и констант 0, I построить функцию $\bar{x}_i$, а, следовательно, и все функции $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Ранее мы показали, что любая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции уже построенных функций и функций $x_1 x_2$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы нам осталось построить функцию $x_1 x_2$. Для этого возьмем функцию f_4 и построим для этой функции полином Жегалкина. Так как эта функция нелинейная, то в этом полиноме найдется слагаемое, содержащее не менее двух множителей. Без ограничения общности можно считать, что этими множителями являются x_1 и x_2. Тогда мы можем записать полином Жегалкина для функции f_4 в следующем виде:

$$f_4(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 h_1(x_3, \dots, x_n) + x_1 h_2(x_3, \dots, x_n) +$$
$$+ x_2 h_3(x_3, \dots, x_n) + h_4(x_3, \dots, x_n)$$

В силу единственности полинома, функция $h_1(x_1, \dots, x_n)$ не равна тождественно нулю. Выберем такие значения переменных $a_3, a_4, \dots, a_n$, что $h(a_3, \dots, a_n) = 1$. Ввиду этого, мы приходим к функции

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

где α, β, γ константы 0 или I. Построим функцию $\psi(x_1, x_2)$, получающуюся из функции $\varphi(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma =$$
$$= (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1 x_2$$

Итак, теорема о полноте полностью доказана.

В тех задачах, где требуется выяснить, является ли данная система булевых функций $\mathcal{D} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ полной, мы будем составлять таблицы, которые называются таблицами Поста. Данные таблицы имеют следующий вид.

	T_0	T_1	S	L	M
f_1					
f_2					
....	....	....	....	....	....
f_{n-1}					
f_n					

В клетках данной таблицы мы будем писать плюс или минус, в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке в класс, стоящий в данном столбце, или не входит. Используя теорему о полноте, мы получаем, что для полноты данной системы булевых функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце стоял хотя бы один минус.

ПРИМЕР. Выяснить, являются ли следующие системы булевых функций полными

$$\mathcal{D}_1 = \{x \mid y\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{x + y + z, xy, 0, 1\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{x \to y, \bar{x}y\}, \quad \mathcal{D}_4 = \{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}.$$

Составим таблицу Поста для системы $\mathcal{D}_1$.

	T_0	T_1	S	L	M
$x \mid y$	–	–	–	–	–

Нетрудно заметить, что $x \mid y = \bar{x} \vee \bar{y}$.
Ясно, что $\bar{x} \vee \bar{y}$ не принадлежит T_0 и T_1. Двойственная функция к функции $\bar{x} \vee \bar{y}$ имеет вид

$$\overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}} = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Следовательно, $\bar{x} \vee \bar{y}$ не принадлежит классу S. Найдем полином Жегалкина для функции $\bar{x} \vee \bar{y}$:

$$\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy} = xy + 1.$$

Следовательно, функция $\bar{x} \vee \bar{y}$ не принадлежит классу L. Так как $(0,0) \leqslant (1,1)$, а $\bar{0} \vee \bar{0} > \bar{1} \vee \bar{1}$, то $\bar{x} \vee \bar{y}$ не принадлежит классу M.

Итак, система $\mathcal{D}_1=\{x|y\}$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы $\mathcal{D}_2$:

	T_0	T_1	S	L	M
$x+y+z$	+	+	+	+	−
xy	+	+	−	−	+
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+

Исследуем функцию $x+y+z$. Легко проверить, что она принадлежит классам T_0 , T_1 , L . Покажем, что она является самодвойственной:

$$\overline{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}} = x+1+y+1+z+1+1 = x+y+z.$$

Функция $x+y+z$ немонотонна, так как $(1,0,0)\leqslant(1,1,0)$, а $1+0+0>1+1+0$. В каждом столбце таблицы Поста для системы $\mathcal{D}_2$ стоит минус. Следовательно, система $\mathcal{D}_2$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы $\mathcal{D}_3$:

	T_0	T_1	S	L	M
$x\Rightarrow y$	−	+	−	−	−
$\bar{x}$	−	−	+	+	−

Из таблицы видно, что система $\mathcal{D}_3$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы $\mathcal{D}_4$:

	T_0	T_1	S	L	M
$\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}$	−	−	+	−	−

Исследуем функцию $\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}$.

Легко проверить, что данная функция не принадлежит ни T_0 , ни T_1 . Так как $(0,0,0)\leqslant(1,1,1)$, а значение функции при наборе (0, 0, 0) больше, чем при наборе (I, I, I), то функция $\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}$ немонотонна. Очевидно, что все переменные данной функции являются существенными. А так как данная функция не может

совпадать с $x+y+z$, ни с $x+y+z+1$, то она нелинейная. Как и в примере, можно показать, что функция $\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}$ является самодвойственной. Следовательно, система $\mathcal{D}_4$ не является полной.

Назовем систему булевых функций **несократимой**, если из нее нельзя исключить ни одной функции так, чтобы оставшаяся после исключения система функций снова была полной.

Очевидно, что любую полную систему булевых функций можно свести к несократимой. Как следует из теоремы о полноте, в любой несократимой полной системе содержится не более 5 функций. Следующая теорема показывает, что в действительности их число всегда может быть сокращено до 4.

Максимальное возможное число функций в несократимой полной системе булевых функций равно 4.

Действительно, при доказательстве теоремы о полноте мы видели, что из любой полной системы булевых функций можно выделить полную подсистему, содержащую не более пяти функций. Причем, функция f_1 , не сохраняющая 0, либо не сохраняет I, либо если $f(1,1,\dots,1)=1$ является несамодвойственной. Следовательно, кроме этой функции достаточно оставить в системе лишь три функции: нелинейную, немонотонную и либо функцию не сохраняющую I, либо несамодвойственную функцию.

Следующий пример показывает, что константа 4 не может быть понижена.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему функций $\mathcal{D}=\{x_1x_2,\ 0,\ 1,\ x_1+x_2+x_3\}$

Составим таблицу Поста для данной системы

	T_0	T_1	S	L	M
x_1x_2	+	+	−	−	+
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$x_1+x_2+x_3$	+	+	+	+	−

Из таблицы видно, что данная система является полной и несократимой, ибо

$$\{0, 1, x_1+x_2+x_3\} \subset L$$

$$\{x_1 x_2, 1, x_1+x_2+x_3\} \subset T_1$$

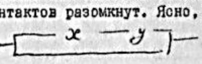
$$\{x_1 x_2, 0, x_1+x_2+x_3\} \subset T_0$$

$$\{x_1 x_2, 0, 1\} \subset M$$

§ 9. КОНТАКТНЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

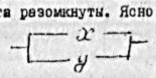
В начале нынешнего века известный физик П.Эренфест впервые указал на возможность применения аппарата алгебры логики в технике. Эта идея нашла своё воплощение в работах советского физика В.И.Шестакова, американского математика К.Шеннона и японского инженера А.Какасима. Первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач были контактные схемы. Под контактными схемами мы будем понимать электрические цепи, содержащие только контакты. Каждый контакт может находиться в двух состояниях - разомкнут (0) и замкнут (I). Такие цепи мы будем изображать диаграммой, на которой возле контактов пишется x_i или $\overline{x_i}$. Причем значение I этих переменных соответствует прохождению тока через данный контакт, а значение 0 чет.

Если контакты x и y соединены последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты и разомкнуты, когда хотя бы один из контактов разомкнут. Ясно, что такой схеме



соответствует булева функция xy.

Если контакты x и y соединены параллельно, то цепь замкнута, когда хотя бы один контакт замкнут и разомкнут, когда оба контакта разомкнуты. Ясно, что такой схеме

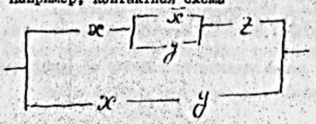


соответствует булева функция $x \vee y$.

Указанное соответствие позволяет любую булеву функцию представить

в виде контактной схемы. С другой стороны, любая контактная схема с последовательно или параллельно соединенными контактами реализуется булевой функцией. Задача анализа контактной схемы и состоит в построении соответствующей ей булевой функции.

Например, контактная схема

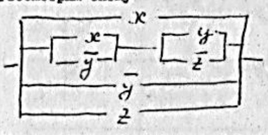


реализуется булевой функцией

$$x(\bar{x} \vee y)z \vee xy$$

Однако, поскольку одна и та же булева функция может быть выражена различными формулами, то её реализация контактными схемами неоднозначна. Всегда можно построить много различных контактных схем, соответствующих данной функции. Такие схемы называют эквивалентными. Задача синтеза контактной схемы состоит в построении контактной схемы по заданной булевой функции, которая может быть задана как формулой, так и таблицей. В обоих случаях необходимо выразить функцию через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Каждая операция конъюнкции соответствует последовательному соединению контактов. В результате получаем контактную схему. Из множества эквивалентных схем, путем упрощения формул выделяют наиболее простую схему. Центральной проблемой синтеза контактных схем является построение для данной булевой функции более простой схемы. Часто эта проблема сводится к минимизации булевых функций (см.§ IO), т.е. к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат минимальное количество вхождений переменных.

Рассмотрим схему



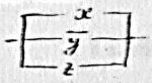
Данная схема реализуется следующей формулой:

$$x \vee (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z$$

Упростим данную формулу. Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$x \vee xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} \vee z =$$
$$= x(1 \vee y \vee \bar{z}) \vee \bar{y}(y \vee \bar{y} \vee 1) \vee z = x \vee \bar{y} \vee z$$

Следовательно, данную схему можно упростить, заменив её следующей эквивалентной схемой:



Решим теперь следующую задачу: из контактов x, y, z составить по возможности более простую схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты не менее двух контактов.

Составим таблицу истинности для булевой функции, соответствующей требуемой контактной схеме

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	I	0
0	I	0	0
0	I	I	I
I	0	0	0
I	0	I	I
I	I	0	I
I	I	I	I

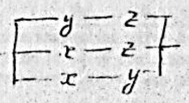
Найдем для данной булевой функции совершенную ДНФ:

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

Упростим данную формулу

$$\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz =$$
$$= yz(\bar{x} \vee x) \vee xz(\bar{y} \vee y) \vee xy(\bar{z} \vee z) =$$
$$= yz \vee xz \vee xy$$

Данной формуле соответствует следующая контактная схема:



Контактные схемы исторически были первыми техническими средствами реализации булевых функций. В дальнейшем появилось много различных устройств, реализующих булевы функции. Одной и нескольких переменных.

Пусть имеется некоторое устройство

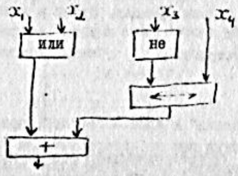
имеющее n упорядоченных "входов" и один – "выход", причем внутренняя структура этого устройства нас не интересует. На каждый из входов могут подаваться два сигнала, которые мы будем обозначать символами 0 и I. При каждом наборе сигналов на входах и выходе возникает один из сигналов 0 или I. Причем набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Очевидно, что каждое такое устройство реализует булеву функцию.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются **л о г и ч е с к и м и   э л е м е н т а м и**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

Функция	Графическое изображение	Функция	Графическое изображение
$\bar{x}$	x → НЕ →	$x_1 x_2$	x_1, x_2 → И →
$x_1 \vee x_2$	x_1, x_2 → ИЛИ →	$x_1 \Rightarrow x_2$	x_1, x_2 → $\rightarrow$ →
$x_1 \Leftrightarrow x_2$	x_1, x_2 → $\leftrightarrow$ →	$x_1 + x_2$	x_1, x_2 → + →
$x_1 \mid x_2$	x_1, x_2 → НЕ-ИЛИ →		

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить все более сложные логические схемы. Для полученных таким образом схем легко записывают соответствующие им булевы функции.

Например, схема

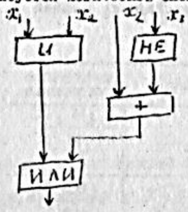


реализуется булевой функцией

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) + (\bar{x}_3 \Leftrightarrow x_4)$$

Нетрудно для любой булевой функции построить реализующую её логическую схему.

Например, булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee (\bar{x}_3 + x_2)$ реализуется логической схемой



Рассмотрим изменение логической схемы на примере одноразрядного сумматора, выполняющего арифметическое сложение двоичных чисел x_k и y_k k-го разряда и переноса из младшего разряда P_{k-1}. Пусть S_k – получаемая сумма, а P_k – перенос в старший разряд, тогда получаем следующую таблицу истинности такого сумматора. Отсюда получаем

x_k	y_k	P_{k-1}	S_k	P_k
0	0	0	0	0
0	0	I	I	0
0	I	0	I	0
0	I	I	0	I
I	0	0	I	0
I	0	I	0	I
I	I	0	0	I
I	I	I	I	I

$$S_k = \bar{x}_k \bar{y}_k P_{k-1} \vee \bar{x}_k y_k \bar{P}_{k-1} \vee x_k \bar{y}_k \bar{P}_{k-1} \vee x_k y_k P_{k-1}$$

$$P_k = \bar{x}_k y_k P_{k-1} \vee x_k \bar{y}_k P_{k-1} \vee x_k y_k \bar{P}_{k-1} \vee x_k y_k P_{k-1} = x_k y_k \vee (x_k \vee y_k) P_{k-1}$$

Построим схему, соответствующую данному сумматору. Для этого вначале упростим выражение для S_k. Как легко заметить, выражение для S_k не упрощается, используя предыдущие методы. Для упрощения выражения функции S_k используем выражение функции P_k. Поэтому будем рассматривать P_k как переменную величину. В результате получаем следующую таблицу, которая содержит избыточные наборы переменных:

x_k	y_k	P_{k-1}	P_k	S_k
0	0	0	0	0
0	0	0	I	
0	0	I	0	I
0	0	I	I	
0	I	0	0	I
0	I	0	I	
0	I	I	0	
0	I	I	I	0
I	0	0	0	I
I	0	0	I	
I	0	I	0	
I	0	I	I	0
I	I	0	0	
I	I	0	I	0
I	I	I	0	
I	I	I	I	I

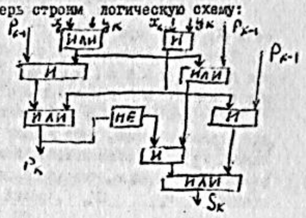
Отсюда $S_k = \bar{x}_k \bar{y}_k P_{k-1} \bar{P}_k \vee \bar{x}_k y_k \bar{P}_{k-1} \bar{P}_k \vee x_k \bar{y}_k \bar{P}_{k-1} \bar{P}_k \vee x_k y_k P_{k-1} P_k$.

Используя методы, которые будут рассмотрены в § IO, нетрудно упростить выражение для S_k:

$$S_k = x_k \bar{P}_k \vee y_k \bar{P}_k \vee P_{k-1} \bar{P}_k \vee x_k y_k P_{k-1} = (x_k \vee y_k \vee P_{k-1}) \bar{P}_k \vee x_k y_k P_{k-1},$$

где $P_k = x_k y_k \vee (x_k \vee y_k) P_{k-1}$

Теперь строим логическую схему:



§ 10. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В параграфе было показано, что любая булева функция может быть представлена дизъюнктивной нормальной формой. Следует отметить, что дизъюнктивная нормальная форма часто допускает упрощение. При этом путем различных тождественных преобразований получится дизъюнктивная нормальная форма, эквивалентная исходной, но содержащая меньшее число вхождений символов.

Дизъюнктивная нормальная форма называется *минимальной*, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей дизъюнктивными нормальными формами.

Заметим, что если некоторый символ в формуле, скажем x_i, встречается, например, два раза, то при подсчете числа символов в формуле он учитывается два раза.

Основной вопрос данного параграфа – это как для произвольной булевой функции построить её минимальную дизъюнктивную нормальную форму. Эта задача называется *проблемой минимизации булевых функций*.

Существует тривиальный алгоритм построения минимальной ДНФ для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для этого все ДНФ, составленные из символов $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ упорядочиваются по числу букв и по порядку для каждой ДНФ $\mathfrak{D}$ проверяется соотношение $\mathfrak{D} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Первая по порядку ДНФ, для которой это соотношение выполняется, есть, очевидно, минимальная ДНФ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Число различных ДНФ, составленных из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, *равно* 2^{3^n}.

Прежде чем доказать данное утверждение, приведем следующее определение.

Конъюнкция $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_r^{\sigma_r}$ называется *элементарной*, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Число r называется *рангом элементарной конъюнкции*. В случае $r = 0$ конъюнкция называется *пустой* и *полагается равной* I.

Так как каждая из n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ либо не входит в элементарную, либо входят в нее с отрицанием, либо без отрицания, то число элементарных конъюнкций, составленных из $x_1, x_2, \dots, x_n$ равно 3^n. Ясно, что число различных ДНФ, составленных из переменной $x_1, x_2, \dots, x_n$, равно числу подмножеств множества из

3^n элементов, т.е. 2^{3^n}.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи минимизации булевых функций.

Обозначим через E^n множество всех точек $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что E^n – множество всех вершин единичного n-мерного куба.

Сопоставим каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подмножество N_f из E^n, определенное следующим образом:

$$N_f = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1\}$$

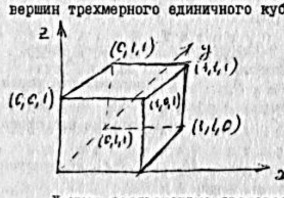
Например, функции

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	I	I
0	I	0	0
0	I	I	I
I	0	0	0
I	0	I	I
I	I	0	I
I	I	I	I

соответствует подмножество

$$N_f = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$$

вершин трехмерного единичного куба



Данное соответствие является взаимно однозначным и обладает следующими свойствами:

1) булевой функции $\bar{f}$ соответствует подмножество $E_n \setminus N_f$;

2) булевой функции $f_1 \cdot f_2$ соответствует подмножество $N_{f_1} \cap N_{f_2}$;

3) булевой функции $f_1 \vee f_2$ соответствует подмножество $N'_{f_1} \cup N'_{f_2}$.

Докажем утверждение 2. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N'_{f_1 \cdot f_2}$. Отсюда $f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Тогда $f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. А это значит, что

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N'_{f_1}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N'_{f_2}$.

Отсюда $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N'_{f_1} \cap N'_{f_2}$.

Пусть $f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_t$ ДНФ, где K_i – элементарные конъюнкции. Подмножество N'_K называется интервалом r -го ранга, если оно соответствует элементарной конъюнкции K r -го ранга. Как показано выше, $N'_f = N'_{K_1} \cup N'_{K_2} \cup \dots \cup N'_{K_t}$. Итак, с каждой ДНФ функции f связано покрытие N'_f такими интервалами $N_{K_1}, \dots, N_{K_t}$, что $N'_{K_i} \subseteq N'_f$.

Пусть r_i – ранг интервала N'_{K_i} . Тогда $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$ совпадает с числом букв в ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$ функции f .

Теперь ясно, что задача построения минимальной ДНФ сводится к отысканию такого покрытия подмножества N'_f интервалами $N'_{K_i} \subseteq N'_f$, чтобы число $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$ было наименьшим.

Интервал N'_K , содержащийся в N'_f , называется **максимальным для булевой функции**, если не существует интервала $N'_{K'}$, такого, что $N'_K \subset N'_{K'} \subseteq N'_f$.

Заметим, что соотношение $N'_K \subset N'_{K'}$ выполняется тогда и только тогда, когда элементарная конъюнкция K' получается из элементарной конъюнкции K путем вычеркивания непустого числа сомножителей.

Очевидно, что каждый интервал N'_K из N'_f содержится в некотором максимальном интервале. Если $N'_{K_1}, N'_{K_2}, \dots, N'_{K_m}$ – список всех максимальных интервалов подмножества N'_f , то нетрудно видеть, что $N'_f = N'_{K_1} \cup N'_{K_2} \cup \dots \cup N'_{K_m}$.

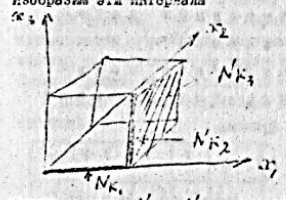
ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$ булевой функции f , соответствующая покрытию подмножества N'_f всеми максимальными интервалами, называется **сокращенной ДНФ функции** f .

Ясно, что сокращенная ДНФ для любой булевой функции f определяется однозначно.

ПРИМЕР. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1$

Обозначим $K_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $K_2 = x_1 \bar{x}_2$, $K_3 = x_1$. Найдем соответствующие этим конъюнкциям интервалы $N'_{K_1} = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$, $N'_{K_2} = \{(1,0,0), (1,0,1)\}$, $N'_{K_3} = \{(1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Изобразим эти интервалы



Очевидно, что N'_{K_1} и N'_{K_2} – все максимальные интервалы. Интервал N'_{K_2} не является максимальным, ибо $N'_{K_2} \subseteq N'_{K_3} \subseteq N'_f$. Следовательно, покрытию подмножества $N'_f = N'_{K_1} \cup N'_{K_3}$ соответствует сокращенная ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$, равная $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$.

Данный геометрический подход дает и метод построения сокращенной ДНФ.

Теперь рассмотрим аналитический метод построения сокращенной ДНФ – метод Блейка. Этот метод основан на следующей теореме

Если в произвольной ДНФ булевой функции f произвести все возможные обобщенные склеивания и устранить затем все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ функции f .

Следовательно, чтобы найти сокращенную ДНФ, надо к произвольной ДНФ данной функции применить правило обобщенного склеивания $x K_1 \vee \bar{x} K_2 = x K_1 \vee \bar{x} K_2 \vee K_1 K_2$ до тех пор, пока это возможно, а затем правило поглощения

ПРИМЕР. Найти сокращенную ДНФ для функции $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$ Применяя правило обобщенного склеивания, получаем:

$$x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3.$$

Затем правило поглощения и находим сокращенную ДНФ: $x_1x_2 \vee x_3$

Рассмотрим еще один метод построения сокращенной ДНФ – метод Нельсона. Этот метод основан на следующей теореме

Если в произвольной КНФ булевой функции раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ этой функции

ПРИМЕР. Найти сокращенную ДНФ для функции

$$f(x,y,z)=(x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z)$$

После раскрытия скобок с помощью дистрибутивного закона, получаем:

$$x\bar{x} \vee xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee yy \vee yz.$$

Так как $x\bar{x}=0$, $yy=y$, то имеем:

$$xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee y \vee yz.$$

Далее, применяя правило поглощения, получаем сокращенную ДНФ:

$$xz \vee y$$

Рассмотрим табличный метод построения сокращенной ДНФ. Этот метод основан на составлении прямоугольной таблицы (минимизирующей карты).

Минимизирующие карты для булевых функций от трех и от четырех переменных изображены на следующих таблицах

x_1x_2 \ x_3	0	1
0 0		
0 1		
1 1		
1 0		

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

Объединяя соседние клетки, соответствующие единичным значениям булевой функции f в максимальные интервалы, и сопоставляя им элементарные конъюнкции, получим сокращенную ДНФ. Отметим, что клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними. Покажем работу этого метода на следующем примере.

ПРИМЕР. Найти сокращенную ДНФ для функции, заданной следующей таблицей

x_1x_2 \ x_3x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	1
0 1	0	1	1	0
1 1	1	1	1	0
1 0	0	1	0	0

В данной таблице объединены клетки в максимальные интервалы

$N_{K_1}=\{(1,1,0,1), (1,1,0,0)\}$.

$N_{K_2}=\{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (1,1,0,1), (0,1,0,1)\}$;

$N_{K_3}=\{(0,0,0,1), (0,1,0,1), (1,0,0,1), (1,1,0,1)\}$;

$N_{K_4}=\{(0,0,0,0), (0,0,1,0)\}$ $N_{K_5}=\{(0,0,0,0), (0,0,0,1)\}$.

Этим интервалам соответствуют элементарные конъюнкции

$K_1=x_1x_2\bar{x}_3$, $K_2=x_2x_4$, $K_3=\bar{x}_3x_4$, $K_4=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, $K_5=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

Следовательно, сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид:

$$x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_3}\, x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Построение сокращенной ДНФ есть только первый этап решения задачи минимизации булевой функции. В общем случае сокращенная ДНФ не является минимальной. Следующая теорема устанавливает связь между минимальной и сокращенной ДНФ.

Минимальная ДНФ булевой функции получается из сокращенной ДНФ данной функции путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.

Доказательство этого утверждения следует из того факта, что покрытие подмножества N_f , отвечающее минимальной ДНФ, состоит только из максимальных интервалов. Действительно, если бы покрытие содержало не максимальный интервал, то его можно было бы заменить объемлющим максимальным интервалом. В результате этого сумма рангов интервалов данного покрытия уменьшилась бы, что противоречит предположению о минимальности ДНФ.

Покажем, что в классе монотонных функций понятия минимальной и сокращенной ДНФ совпадают.

Сокращенная ДНФ монотонной булевой функции не содержит отрицаний переменных и является минимальной ДНФ этой функции.

Пусть K - элементарная конъюнкция, входящая в сокращенную ДНФ. Предположим, что K содержит отрицание переменных. Обозначим через K_1 произведение всех переменных, входящих в K без отрицания. Пусть $\tilde{\alpha}$ - набор переменных, в которых всем переменным, входящим в K_1 , приписано значение I, а всем остальным - значение 0. Ясно, что при этом наборе значение функции f равно I. Элементарная конъюнкция K_1 обращается в I при всех наборах $\tilde{\beta} \geq \tilde{\alpha}$. Очевидно, что при этих наборах значение функции f также равно I. Следовательно, $N_K \subset N_{K_1} \subseteq N_f$.
Получили противоречие с максимальностью интервала N_K . Итак, сокращенная ДНФ булевой функции f не содержит отрицаний переменных.

Пусть $K = x_1 x_2 \dots x_k$ - любая элементарная конъюнкция из сокращенной ДНФ. Конъюнкция K является единственной конъюнкцией в сокращенной ДНФ, которая обращается в единицу в вершине с

координатами $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1, \; x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$

Действительно, если бы в сокращенной ДНФ какая-нибудь другая элементарная конъюнкция K' обращалась в этой вершине в I, то не содержала бы, во-первых, букв $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}$ и, во-вторых, букв $x_{k+1}, \dots, x_n$. Поэтому в конъюнкцию K' могли бы входить лишь буквы $x_1, \dots, x_k$, причем не все. Но тогда $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$. Получили противоречие с максимальностью интервала N_K . Следовательно, для любого максимального интервала N_K существует вершина куба E^n , которая покрывается только этим интервалом. Поэтому из покрытия N_f соответствующего сокращенной ДНФ, нельзя удалить ни одного из интервала. Теперь, применяя предыдущую теорему, получаем требуемый результат.

Следует отметить, что сокращенная ДНФ в большинстве случаев допускает дальнейшие упрощения за счет того, что некоторые элементарные конъюнкции могут поглощаться дизъюнкциями других элементарных конъюнкций. Действительно, в сокращенной ДНФ $f(x,y,z) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$ элементарная конъюнкция yz поглощается дизъюнкцией остальных элементарных конъюнкций, т.е. $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$.
Ввиду этого введем следующее определение.

Покрытие подмножества максимальными интервалами называется *неприводимым*, если после удаления из него любого интервала оно перестает быть покрытием. ДНФ булевой функции f , соответствующая неприводимому покрытию, называется *тупиковой*.

Всякая минимальная ДНФ является тупиковой.

Доказательство этого утверждения следует из того, что покрытие, соответствующее минимальной ДНФ, является неприводимым.

Заметим, что булева функция может обладать несколькими различными минимальными ДНФ. Существуют также тупиковые ДНФ, не являющиеся минимальными ДНФ. Соответствующие примеры будут разобраны ниже.

Из того, что минимальная ДНФ является тупиковой, следует общая схема решения задачи минимизации булевых функций.

I. Выделяются все максимальные интервалы и строится сокращенная ДНФ.

2. Строятся все тупиковые ДНФ.

3. Среди всех тупиковых ДНФ выделяются все минимальные ДНФ.

Рассмотрим алгоритм построения всех тупиковых ДНФ. Суть данного алгоритма состоит в следующем:

1) для булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ строим сокращенную ДНФ;

2) для каждой вершины q_j из N_f, $j = 1, 2, \dots, k$ выделяем в сокращенной ДНФ функции f все такие элементарные коньюнкции $K_{1j}, \dots, K_{tj}$, что $K_{ij}(q_j) = 1$, $i = 1, 2, \dots, t$;

3) составляем выражение вида

$$(K_{11} \vee K_{12} \vee \dots \vee K_{1t})(K_{21} \vee K_{22} \vee \dots \vee K_{2t}) \dots (K_{k1} \vee K_{k2} \vee \dots \vee K_{kt}) \quad (*);$$

4) применяем к выражению вида $(*)$ законы дистрибутивности и поглощения. В результате получаем

$$\vee K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_m}.$$

Теперь каждая ДНФ $K_{i_1} \vee K_{i_2} \vee \dots \vee K_{i_m}$ является тупиковой ДНФ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим работу данного алгоритма на следующем примере.

ПРИМЕР. Рассмотрим булеву функцию, заданную следующей таблицей:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	I	I
0	I	0	I
0	I	I	I
I	0	0	I
I	0	I	I
I	I	0	I
I	I	I	0

Найдем сокращенную ДНФ данной функции по методу Нельсона. Для этого составим КНФ данной функции

$$(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Применяя законы дистрибутивности, получаем:

$$x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$$

Обозначим $K_1 = x\bar{y}$, $K_2 = x\bar{z}$, $K_3 = \bar{x}y$, $K_4 = y\bar{z}$, $K_5 = z\bar{x}$, $K_6 = z\bar{y}$;

$$N_f = \{(0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)\}.$$

Составляем выражение $(*)$

$$(K_5 \vee K_6)(K_3 \vee K_4)(K_3 \vee K_5)(K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_6)(K_2 \vee K_4)$$

Преобразуем данное выражение к виду

$$(K_5 \vee K_3K_6)(K_4 \vee K_2K_3)(K_1 \vee K_2K_6) =$$

$$= K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee$$

$$\vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_6 =$$

$$= K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_5K_4K_6 \vee K_1K_2K_5K_6 \vee$$

$$\vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_6.$$

Таким образом, $f(x,y,z)$ имеет шесть тупиковых ДНФ:

$\mathfrak{D}_1 = K_1 \vee K_4 \vee K_5 = x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$;

$\mathfrak{D}_2 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_5 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{x}$;

$\mathfrak{D}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6 = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{y}$;

$\mathfrak{D}_4 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$;

$\mathfrak{D}_5 = K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 = x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$;

$\mathfrak{D}_6 = K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$.

Две из них $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_6$ являются минимальными.

§ II. МЕТОД ИМПЛИКАНТНЫХ МАТРИЦ

Для булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находим сокращенную ДНФ $f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$. Построим для этой функции импликантную матрицу, представляющую собой таблицу, в вертикальные входы которой записываются $K_1, K_2, \ldots, K_t$, а в горизонтальные $N_f = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_p\}$.

	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	...	$\tilde{\alpha}_j$	...	$\tilde{\alpha}_p$
K_1						
K_2						
......						
K_i				+		
...						
K_t						

Для каждой K_i находим набор $\tilde{\alpha}_j$ такой, что $K_i(\tilde{\alpha}_j) = 1$. Клетку импликантной матрицы, образованную пересечением i-строки и j-столбца отметим крестиком.

Чтобы получить минимальную ДНФ заданной функции, достаточно найти минимальное число K_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, которые совместно накрывают крестиками все столбцы импликантной матрицы.

<u>Пример</u>. Найти минимальные ДНФ для функции

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Из предыдущего примера следует, что сокращенная ДНФ для данной функции $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$. Очевидно, что $N_f = \{(0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)\}$.

Строим импликантную матрицу

	(0,0,I)	(0,I,0)	(0,I,I)	(I,0,0)	(I,0,I)	(I,I,0)
$x\bar{y}$				+	+	
$x\bar{z}$				+		+
$\bar{x}y$		+	+			
$y\bar{z}$		+				+
$z\bar{x}$	+		+			
$z\bar{y}$	+				+	

Отсюда видно, что данная функция имеет две минимальные ДНФ:

$x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$; $\quad x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$.

Содержание

Разработка к лекциям по курсу "Дискретная математика"
В двух частях.
Часть I. "Теория булевых функций" для студентов
математического и экономического факультетов
Составитель Семенчук Владимир Николаевич

Редактор Е.Ф.Зайцева
Ответственный за калькуляцию В.А.Архангельский

Подписано в печать 29.02.92. Формат 60x84 I/I6. Бумага
писчая № I. Печать офсетная. Усл.п.л. 3,02. Уч.-изд.л. 2,9.
Тираж 200 экз. Заказ 43 Цена 25 р.60 к.

Отпечатано на ротапринте ГГУ. г. Гомель, ул.Советская, I04.