Лёссовые отложения Мозырской возвышенности по минералогическому составу отвечают типичным лёссам. Это полиминеральная порода, в которой встречаются такие минералы, как: кварц, слюды, полевые шпаты, силлиманит, ильменит, хлорит и монацит. А так же типичные для лёссов известковистые конкреции. Кварц, полевые шпаты и слюды – минералы песчаных фракций; силлиманит, монацит, ильменит и хлорит – преобладают в крупнопылеватой фракции.

Литература

1 Трофимов В. Т. Грунтоведение / Трофимов В. Т. [и др.]; Под. ред. В. Т. Трофимова. – 6-е изд., переработ. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 2005.

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

А. В. Астафьева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ПАДЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Для системы экспонент $\left\{e^{(a+i)z}, e^{(a-i)z}\right\}$, *где* a *– произвольное действительное число, изучаются асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита-Паде в диагональном случае. В частности, найдены асимптотики поведения разностей* $\left\{\, e^{(a+i)z} - \pi^1_{n,2n}(z, e^{(a+i)\xi}), e^{(a-i)z} - \pi^2_{n,2n}(z, e^{(a-i)\xi})\right\}$, *для любого комплексного z. Полученные результаты дополняют исследования Паде, Эрмита, Перрона, А. П. Аптекарева, Д. Браесса, относящиеся к изучению сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент.*

1 Введение

Рассмотрим набор формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j = 1,2,...,r, \qquad (1)$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, ..., m_r$ и обозначим $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$, $n_i = m + n - m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^{r}$ является совершенной. Тогда существуют такие многочлены $Q_m, P^i_{n_i}$, что $\deg Q_m \le m$, $\deg P^i_{n_i} \le n_i$ и для $i = 1,2,...,r$

$$R^i_{m,n}(z) = Q_m(z) f_i(z) - P^i_{n_i}(z) = c_i z^{n+m+1} + ... \, . \qquad (2)$$

Если $k = 1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1.] многочлены $Q_m, P^1_{n_1}$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}{}^{1}(z)=\frac{P_{n_1}^{1}}{Q_m}$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $k\geq 2$ дроби $\pi_{n,m}^{j}(z)=\pi_{n_j,m}^{j}(z;f_j)=P_{n_j}^{j}(z)/Q_m(z),\quad j=1,2,..,k$ определяются условиями (2), вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^{j}\}_{j=1}^{k}$, его элементы называют аппроксимациями Эрмита-Паде для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1], [3]). Совершенной, в частности, является система экспонент $f_j(z)=e^{\lambda_j z}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – различные комплексные числа [1, теорема 2.1].

Случай одной $(k=1)$ экспоненты e^{ξ} явный вид числителя и знаменателя получил Паде. Он, опираясь на полученные представления, доказал аппроксимации $\pi_{n,m}(z,e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^{z} на компактах комплексной плоскости при $n/m\to\gamma,\ 0\leq\gamma\leq+\infty$. О. Перрон обобщил результаты Паде. Позже выяснилось, что явный вид числителя и знаменателя аппроксимаций Паде был известен задолго до Паде Эрмиту, кроме того и явный вид числителей и знаменателя аппроксимаций Эрмита-Паде [3]. При доказательстве трансцендентности числа e, Эрмит ввел в рассмотрение следующие интегралы [4]

$$M=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx,$$

$$M_j=\frac{e^{j}}{(p-1)!}\int_j^{\infty}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx,$$

$$\varepsilon_j=\frac{e^{j}}{(p-1)!}\int_0^{j}[x\prod_{i=1}^{k}(x-i)]^{p-1}e^{-x}dx,$$

которые после небольших преобразований [3] приводят к решению системы (2) и дают явный вид числителей и знаменателя аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,$$

$$P_{n_j}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx,\qquad (3)$$

$$R_{n,m}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}[x^n\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx.$$

В первых двух интегралах (3) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $\operatorname{Re}z>0$. При $\operatorname{Re}z>0$ значения $Q_m,P_{n_i}^{i}$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^{j}(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Её решение было получено А.И. Аптекаревым [3], который, найдя асимптотику поведения первого из интегралов в (3), показал, что при $n+m\to\infty$ для любого $j=1,2,..,k$ $\pi_{n_j,m}^{j}(z,e^{\lambda_j\xi})$ сходится равномерно на компактах комплексной плоскости к $e^{\lambda_j z}$. В частности, в [3] установлен следующий аналог леммы Перрона (см. [5]), доказывающей сходимость $\pi_{n,m}(z,e^{\xi})$ к e^{z}: для любых n, m_j

$$\left|Q_m(z)-\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\right|\le\frac{\left|z\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\right|^2}{n+m}\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|\right\},$$

где $Q_m(z)$ – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к набору $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$. Из этого неравенства следует, что при $n+m\to\infty$ для любого $|z|\le L$

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j m_j}{n+m}z\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right\}. \quad (4)$$

В данной работе исследуется асимптотика поведения аппроксимаций Эрмита-Паде для системы из двух экспонент. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{e^{(a+i)z},e^{(a-i)z}\}$ *– набор из двух экспонент с произвольным действительным числом* a, *а* $\{\pi_{n,2n}^1(z,e^{(a+i)\xi}),\pi_{n,2n}^2(z,e^{(a-i)\xi})\}$ *аппроксимации Эрмита-Паде соответствующие этому набору. Тогда, если* $m_1=m_2=n$, *то для любого* z, *при* $n\to+\infty$ *имеем*

$$e^{(a+i)z}-\pi_{n,2n}^1(z,e^{(a+i)\xi})=\frac{z^{3n+1}(2a^2-4ai)}{(3n)!(a^2i+4a-2i)n}(2a+a^2i)^n e^{\frac{5az}{3}}(1+o(1)) \quad (5)$$

$$e^{(a-i)z}-\pi_{n,2n}^2(z,e^{(a-i)\xi})=\frac{(-1)^{n+1}z^{3n+1}(2a^2-4ai)}{(3n)!(a^2i-4a-2i)n}(a^2i-2a)^n e^{\frac{5az}{3}}(1+o(1)) \quad (6)$$

2 Доказательство теоремы

Доказательство теоремы разобьем на две леммы.

Лемма 1. При выполнении условий теоремы верно равенство

$$R_{n,2n}^1(z)=\frac{z^{3n+1}(2a^2-4ai)}{(3n)!(a^2i+4a-2i)n}(2a+a^2i)^n e^{az}(1+o(1)) \quad (7)$$

Доказательство леммы 1.

Применяя интегралы (3), получим

$$R_{n,2n}^1(z)=\frac{e^{(a+i)z}z^{3n+1}}{(3n)!}\int_0^{a+i}x^n(x-a-i)^n(x-a+i)^n e^{-zx}dx.$$

Интегрирование идет по любой кривой соединяющей точки 0 и $a+i$. Преобразуем данный интеграл следующим образом

$$R_{n,2n}^1(z)=\frac{e^{(a+i)z}z^{3n+1}}{(3n)!}\Big(\int_0^{i}x^n(x-a-i)^n(x-a+i)^n e^{-zx}dx+$$

$$+\int_i^{a+i}x^n(x-a-i)^n(x-a+i)^n e^{-zx}dx\Big)=\frac{e^{(a+i)z}z^{3n+1}}{(3n)!}\left(I_1^1(z)+I_2^1(z)\right).$$

Обозначим

$$I_1^1(z)=\int_0^i e^{-zx}e^{nLn(x(x-a-i)(x-a+i))}dx \quad (8)$$

Найдем асимптотику интеграла (8). Для этого к данному интегралу применим метод перевала [6]. Пусть $S_1(z)=Ln(z(z-a-i)(z-a+i))$. Определим кривую интегрирования следующим образом: $\gamma=\{z=iy: y\in[0,1]\}$. И применим метод перевала для интеграла (8) по кривой γ. Для этого найдем точку, в которой достигается $\max_{\gamma}\operatorname{Re}S_1(z)$. Это точка $z_0=i$. Тогда известно, что

$$I_1^1(z) = \frac{a^2 - 2ai}{(a^2 i + 4a - 2i)n}(2a + ia^2)^n e^{-iz}(1 + o(1)).$$

Аналогично находится интеграл $I_2^1(z)$, если кривую интегрирования взять равную $\gamma_1 = \{z = i + x : x \in [0, a]\}$, а функцию $S_1(z)$ такую же. Точка, в которой достигается $\max_{\gamma_1} \operatorname{Re} S_1(z)$, равна $z_0 = i$. Тогда имеем

$$I_2^1(z) = \frac{a^2 - 2ai}{(a^2 i + 4a - 2i)n}(2a + ia^2)^n e^{-iz}(1 + o(1)).$$

С учетом введенных обозначений, получим (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При выполнении условий теоремы верно равенство

$$R_{n,2n}^2(z) = \frac{(-1)^{n+1} z^{3n+1}(2a^2 + 4ai)}{(3n)!(a^2 i - 4a - 2i)n}(a^2 i - 2a)^n e^{az}(1 + o(1)) \qquad (9)$$

Доказательство леммы 2.

Применяя интегралы (3), получим

$$R_{n,2n}^1(z) = \frac{e^{(a-i)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a-i} x^n (x - a - i)^n (x - a + i)^n e^{-zx} dx.$$

Интегрирование идет по любой кривой соединяющей точки 0 и $a - i$. Преобразуем данный интеграл с помощью замены к следующему виду

$$R_{n,2n}^1(z) = \frac{e^{(a-i)z} z^{3n+1}}{(3n)!}\Big(\int_0^{-i} x^n (x - a - i)^n (x - a + i)^n e^{-zx} dx +$$

$$+ \int_{-i}^{a-i} x^n (x - a - i)^n (x - a + i)^n e^{-zx} dx \Big) = \frac{e^{(a-i)z} z^{3n+1}}{(3n)!}\left(I_1^2(z) + I_2^2(z)\right).$$

Рассмотрим первый интеграл. Преобразуем его к следующему виду

$$I_1^2(z) = (-1)^{n+1} \int_0^i e^{-zx} e^{nLn(x(x+a+i)(x+a-i))} dx$$

Пусть $S_2(z) = Ln(z(z + a - i)(z + a + i))$. Определим кривую интегрирования следующим образом: $\gamma = \{z = iy : y \in [0,1]\}$. И применим метод перевала для данного интеграла по кривой γ. Для этого найдем точку, в которой достигается $\max_{\gamma} \operatorname{Re} S_1(z)$. Это точка $z_0 = i$. Тогда известно, что

$$I_1^1(z) = \frac{(-1)^{n+1}(a^2 + 2ai)}{(a^2 i - 4a - 2i)n}(ia^2 - 2a)^n e^{iz}(1 + o(1)).$$

Аналогично доказательству леммы 1 находится интеграл $I_2^2(z)$, если кривую интегрирования взять равную $\gamma_2 = \{z = -i + x : x \in [0, a]\}$, а функцию $S_1(z)$ такую же. Точка, в которой достигается $\max_{\gamma_2} \operatorname{Re} S_1(z)$, равна $z_0 = -i$. Тогда имеем

$$I_2^2(z) = \frac{(-1)^{n+1}(a^2 + 2ai)}{(a^2 i - 4a - 2i)n}(ia^2 - 2a)^n e^{iz}(1 + o(1)).$$

С учетом введенных обозначений и получим (9). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Применяя формулу (4) получим, что $Q_{2n} = e^{-2/3az}(1 + o(1))$. С учетом данного равенства, лемм 1,2 и определения аппроксимаций Эрмита-Паде получаем (5) и (6). Теорема доказана.

Литература

1 Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.

М. Никишин, В. Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
2 Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис // М.: Мир, 1986. – 502 с.
3 Аптекарев, А. И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент/А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. –1981. – № 1. – С. 68–74.
4 Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C. R. Acad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
5 Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron // Leipzig-Berlin: Teubner. − 1929. − 322 p.
6 Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. Для вузов. – 3-е изд./ Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин // М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит.,– 480 с.

УДК 53(077)

Д. Б. Белоножко

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Статья посвящена организации и методике проведения лабораторных работ с использованием информационных технологий в общеобразовательном процессе по физике. В работе рассматривается не только типовая схема урока – лабораторной работы, который предусматривает выполнение учащимися физического эксперимента и обработку результатов лабораторного опыта, но также и методические предпосылки по повышению уровня эффективности уроков с помощью компьютерного эксперимента.

В настоящее время большое внимание уделяется повышению эффективности учебного процесса. Преподавание физики без демонстрации опытов является не правильным. Демонстрационный эксперимент, являясь средством наглядности способствует организации восприятия учебного материала, его понимание и запоминание, способствует повышению интереса к изучения физики. Решение проблемы повышения эффективности учебного процесса связано с применением в учебном процессе новых методов и приемов обучения. Новые информационные технологии могут эффективно использоваться на традиционных уроках, включающих демонстрационные опыты по физике, на лабораторных занятиях, а также на занятиях физического практикума. Использование компьютера в качестве эффективного средства обучения существенно расширяет возможности педагогических технологий: физические компьютерные энциклопедии, интерактивные курсы, всевозможные программы, виртуальные опыты и лабораторные работы позволяют повысить мотивацию учащихся к изучению физики. Преподавание физики, в силу особенностей самого предмета, представляет собой благоприятную почву для применения современных информационных технологий. Эффективность использования средств новейших информационных технологий в учебном процессе во многом зависит от успешного решения задач методического характера, связанных с информационным содержанием и способом использования автоматизированных обучающих систем в учебном процессе.

В содержание многих современных электронных учебных изданиях по физике входят анимации, интерактивные модели, конструкторы, тренажеры, видеозаписи физических экспериментов, виртуальные лабораторные работы и пр. Эти учебные объекты могут служить основой для организации самостоятельной работы учащихся как в классе, так и в домашних условиях; они призваны обеспечить подготовку школьников к лабораторным занятиям по физике.