Секция 2 «Моделирование физических процессов»

Председатели:
Тюменков Геннадий Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент.
Дей Евгений Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент.

А. В. Павленко
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **Ю. А. Гришечкин**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА–ТАВХЕЛИДЗЕ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА ГАУССА

Уравнение Логунова-Тавхелидзе, описывающее связанные состояния двух скалярных частиц одинаковой массы m, в двумерном импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2 - E_p^2)\,\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}d^2\mathbf{k}\,,\ E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,, \quad (1)$$

где $0 < 2E < 2m$ – энергия двухчастичной системы, $\mathbf{p}$ – относительный импульс в системе центра масс, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – релятивистский потенциал.

В полярных координатах представим искомую волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ и потенциал $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ в форме

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi), \quad V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}V_\mu(p,k)\exp(i\mu\gamma), \quad (2)$$

где $\psi_\mu(p)$ – парциальная волновая функция, $V_\mu(p,k)$ – парциальный потенциал, $p = |\mathbf{p}|$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ – угол в полярной системе координат,

γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Подстановка рядов (2) в (1) приводит к интегральному уравнению

$$(E^2 - E_p^2)\psi_\mu(p) = \frac{\sqrt{p}}{2\pi}\int_0^\infty \sqrt{k} V_\mu(p,k)\frac{m}{E_k}\psi_\mu(k)dk. \quad (3)$$

Парциальный потенциал $V_\mu(p,k)$ в импульсном представлении связан с двумерным потенциалом в координатном представлении $V(\rho)$ следующим интегральным соотношением:

$$V_\mu(p,k) = 2\pi\int_0^\infty \rho J_\mu(p\rho)V(\rho)J_\mu(k\rho)d\rho, \quad (4)$$

где $J_\mu(z)$ – функция Бесселя [1], ρ – модуль радиус-вектора в двумерном координатном представлении. В данной работе мы рассматриваем потенциал Гаусса

$$V(\rho) = -\lambda \exp\left(-a\rho^2\right), \quad (5)$$

где $\lambda > 0$, $a > 0$ – константы. Подставив (5) в формулу (4) и проинтегрировав [2], получим следующее выражение для парциального потенциала в импульсном представлении

$$V_\mu(p,k) = -\lambda\frac{\pi}{a}\exp\left(-\frac{p^2+k^2}{4a}\right)I_\mu\left(\frac{pk}{2a}\right), \quad (6)$$

где $I_\mu(x)$ – модифицированная функция Бесселя [1].

Для нахождения приближенного решения уравнения (3) с потенциалом (5) воспользуемся представлением модифицированной функции Бесселя в виде ряда [1]

$$I_\mu\left(\frac{pk}{2a}\right) = \sum_{s=0}^\infty \frac{1}{s!\Gamma(\mu+s+1)}\left(\frac{pk}{4a}\right)^{2s+\mu}. \quad (7)$$

Ограничив ряд (7) некоторым числом первых N слагаемых и подставив полученное выражение в (6), запишем приближенную формулу для потенциала

$$V_{\mu}\left(p,k\right) \approx -\lambda \frac{\pi}{a} \exp\left(-\frac{p^2+k^2}{4a}\right) \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!\Gamma\left(\mu+s+1\right)} \left(\frac{pk}{4a}\right)^{2s+\mu}. \quad (8)$$

Потенциал (8) является суммой $N+1$ сепарабельного потенциала. Подставив (8) в уравнение (3), мы получим следующее равенство:

$$\frac{1}{\lambda}\psi_{\mu}(p) = -\frac{\sqrt{p}}{2a(E^2-E_p^2)} \exp\left(-\frac{p^2}{4a}\right) \sum_{s=0}^{N} \frac{1}{s!\Gamma\left(\mu+s+1\right)} \left(\frac{p}{4a}\right)^{2s+\mu} C_{s,\mu}, \quad (9)$$

$$C_{s,\mu} = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) k^{2s+\mu+1/2} \frac{m}{E_k} \psi_{\mu}(k) dk. \quad (10)$$

Умножив (9) на выражение $\exp\left(-p^2/4a\right) p^{2j+\mu+1/2}\, m/E_p$ и проинтегрировав полученное равенство на интервале $p \in [0;\infty)$, мы получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для величин $C_{j,\mu}$

$$\frac{1}{\lambda} C_{j,\mu} = -\sum_{s=0}^{N} M_{s,j} C_{s,\mu}, \quad (11)$$

$$M_{s,j} = \frac{1}{s!\Gamma\left(\mu+s+1\right) 8a^{2s+\mu+1}} \int_0^{\infty} dp \frac{m}{E_p} \frac{p^{1+2(j+s)+2\mu}}{(E^2-E_p^2)} \exp\left(-\frac{p^2}{2a}\right). \quad (12)$$

Вычисление интеграла в (12) выполнено численно по квадратурной формуле прямоугольников [3].

Таким образом, мы заменили приближенно интегральное уравнение (3) алгебраической системой уравнений (11). Найдем теперь решение задачи на собственные значения и собственные векторы для этой системы при разных значениях величины энергии $2E$.

На рисунке 1 приведены графики зависимости энергии двухчастичной системы для первых трех состояний n от величины параметра λ для двух разных значений индекса μ. Сплошной линией обозначены результаты, полученные описанным методом, а штриховой−(длинное тире) результаты численного решения уравнения (3) с потенциалом (5).

Численное решение интегрального уравнения найдено методом квадратур прямоугольников [3]. В ходе выполнения вычислений мы полагали, что $m = 1$, $a = 0{,}001$, $N = 60$.

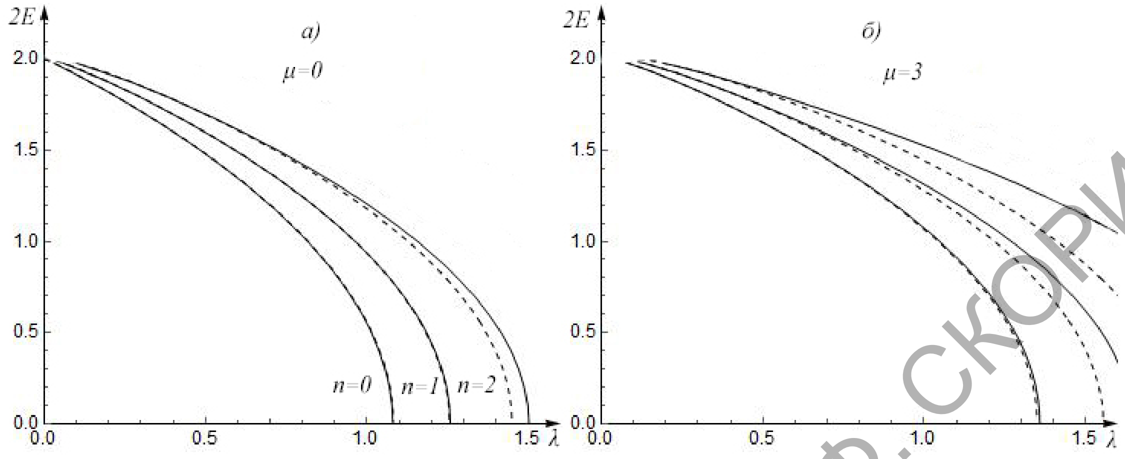

Рисунок 1 – Условия квантования энергии

На рисунке 1 видно, что точность приближения с ростом λ и номера состояния n уменьшается.

На рисунке 2 показаны графики зависимости парциальных волновых функций от переменной p. Нормировка парциальных волновых функции выполнена по формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\psi^{2}\left(p\right)dp = 1. \tag{13}$$

На рисунке 2 видно, что число нулей волновой функции равно $n+1$.

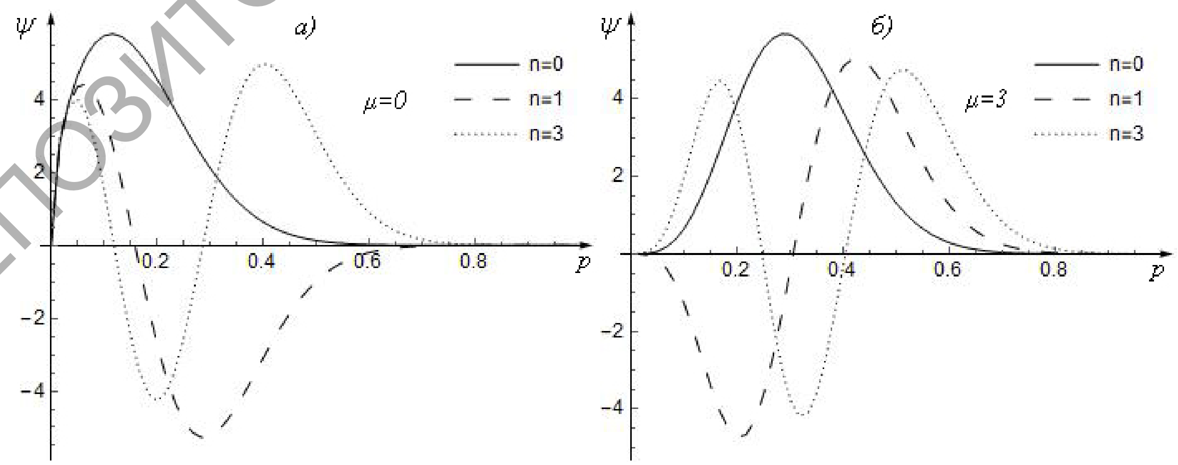

Рисунок 2 – Парциальные волновые функции $\lambda = 1$

В дальнейшем мы планируем выполнить решение рассмотренным в данной работе методом других вариантов релятивистских уравнений с потенциалом (5) и его аналогами.

Литература

1. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris. – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.

2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Изд. 7-е. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с.

3. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.