показана для сравнения обычная экспоненциальная кривая распада

Литература

1. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 512 с.

2. Einstein, A. Die Nordstromsche Gravitaionstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalkuls. / A. Einstein, A.D. Fokker. Ann. Phys. (Leipzig), 44 (1914), 321 – 328.

3. Serdyukov, A.N. A Minimal Relativistic Model of Gravitation within Standard Restrictions of the Classical Theory of Fields. / A. N. Serdyukov. Phys. of Part. and Nucl. Lett. 6 (2009), 190 – 201.

А.И. Толкачев (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **В.Н. Капшай,** канд. физ.-мат. наук, доцент

СТАТИЧЕСКИЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В МЕХАНИКЕ

Вариационные принципы играют в физике большую роль. Наиболее известными из них являются принцип наименьшего действия и принцип Ферма. В данной работе рассмотрим еще один вариационный принцип, – принцип наименьшей потенциальной энергии для протяженных объектов, например. упругого стержня, ограничиваясь, для начала, одномерным случаем. В качестве типичной рассмотрим задачу о продольных деформациях упругого прямолинейного стержня. Целью в этом случае является нахождение функции $U(x)$, описыващей отклонения различных сечений стержня. Очевидно, эта функция должна быть такой, чтобы потенциальная энергия стержня достигала своего минимума. Это интегральное условие позволяет получить дифференциальное уравнение для функции $U(x)$.

Вначале, для простоты, рассмотрим прямолинейный стержень, находящийся в однородном силовом поле (в поле силы тяжести, заряженный стержень в электрическом поле и т. п.). При деформации стержня меняется как энергия взаимодействия с внешним полем, так и энергия упругих деформаций, которые будем считать малыми. Для описания деформаций традиционно используется отклонение $U(x)$ (рисунок 1) сечения стержня в недеформированном состоянии находящегося в точке x (а).

Энергия упругих продольных деформаций выражается формулой

$$W_{el} = \int_0^l dW_{el} = \int_0^l \tfrac{1}{2} YS\left[U'(x)\right]^2 dx,$$

где Y – модуль Юнга. Однородное поле силы тяжести характеризуется напряженностью $\vec{g}$, которую будем считать направленной вдоль оси X. Нуль потенциальной энергии выберем в точке подвеса. Тогда энергия взаимодействия стержня с полем силы тяжести имеет вид

$$W_{ext} = -\int_0^l \rho g S\left[x + U(x)\right]dx.$$

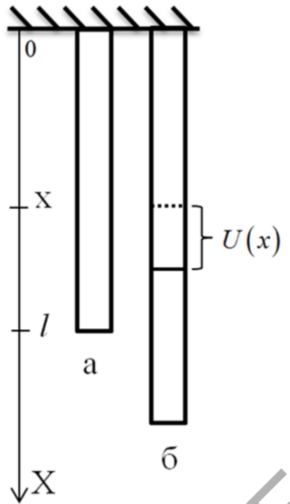

Рисунок – Изображение стержня в исходном (а) и деформированном (б) состояниях

Суммарная потенциальная энергия является, таким образом, функционалом, зависящим от функции $U(x)$ и ее производной $U'(x)$:

$$W = \int_0^l \left[\tfrac{1}{2}YS\left[U'(x)\right]^2 - \rho g S\left[x + U(x)\right]\right]dx.$$

В общем случае статического (не обязательно однородного) поля аналогично имеем

$$W_{ext} = \int_0^l \Phi\left(x, U(x)\right)\rho S dx,$$

где Φ – потенциал поля. Функционал суммарной потенциальной энергии в общем случае примет вид

$$W = \int_0^l \left[\tfrac{1}{2}YS\left[U'(x)\right]^2 + \Phi\left(x, U(x)\right)\rho S\right]dx.$$

Таким образом, всегда

$$W = \int_0^l \Pi\left(x, U(x), U'(x)\right)dx, \qquad (1)$$

где П – линейная плотность «полной» потенциальной энергии.

Для нахождения дифференциального условия экстремума этого функционала рассмотрим семейство функций деформации *U(x)*, удовлетворяющих граничным условиям $U(0)=\bar{U}(0);$

$U(l)=\bar{U}(l),$ где $\bar{U}(x)-$ та функция деформаций, при которой и достигается минимум, а именно функций вида

$$U(x)=\bar{U}(x)+\alpha\cdot\delta U(x).$$

Здесь α – числовой параметр, $\delta U(x)$ – фиксированная вариация отклонения $\bar{U}(x),$ удовлетворяющая условиям $\delta U(0)=0;$ $\delta U(l)=0,$ а в остальном – произвольная. Для такого однопараметрического семейства функций функционал (1) принимает вид

$$W=\int_0^l \Pi\left(x,\bar{U}(x)+\alpha\cdot\delta U(x),\bar{U}'(x)+\alpha\cdot\delta U'(x)\right)dx. \qquad (2)$$

$$\left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left[\frac{d}{d\alpha}\int_0^l \Pi\left(x,\bar{U}(x)+\alpha\cdot\delta U(x),\bar{U}'(x)+\alpha\cdot\delta U'(x)\right)dx\right]_{\alpha=0}=0.$$

Ясно, что при фиксированных $\bar{U}$ и δU выражение (2) является функцией параметра α, достигающей своего минимума при $\alpha=0$ [1-2].

Вычисляя явно производную по α приведем условие минимума к виду

$$\left.\frac{dW}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_0^l\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{U}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{U}'}\right)\delta U(x)dx=0.$$

Ввиду произвольности функции $\delta U(x)$ это дает уравнение

$$\frac{\partial\Pi\left(x,\bar{U},\bar{U}'\right)}{\partial\bar{U}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Pi\left(x,\bar{U},\bar{U}'\right)}{\partial\bar{U}'}=0, \qquad (3)$$

то есть уравнение, позволяющее найти истинную деформацию $\bar{U}(x)$.

В дальнейшем, $\bar{U}$ заменим на U. Применяя полученное уравнение для рассмотренных выше случаев, получаем уравнения

Для нахождения деформации стержня в гравитационном «Ньютоновом» поле

$$\Phi(x,U(x))=-\frac{GM}{r_0-x-U(x)},$$

где M – гравитирующая масса, r_0 – расстояние между ее центром и точкой подвеса, подставим выражение для потенциала в формулу общего вида, в результате получим

$$U''(x) = -\frac{GM\rho}{Y\{r_0 - x - U(x)\}^2}.$$

Таблица – Дифференциальные уравнения для деформации в различных полях

Поле	Вид потенциала	Дифференциальное уравнение
Общий случай	$\Phi = \Phi\left(x, U(x)\right)$	$U''(x) = \frac{\rho}{Y}\frac{\partial\Phi}{\partial U}$
Однородное поле	$\Phi\left(x, U(x)\right) = -g\left(x + U(x)\right)$	$U''(x) = -\frac{\rho g}{Y}$
«Ньютоново» поле	$\Phi(x, U(x)) = -\frac{GM}{r_0 - x - U(x)}$	$U''(x) = -\frac{GM\rho}{Y\left[r_0 - x - U(x)\right]^2}$

Таким образом, вариационный принцип можно использовать для протяженных статических объектов. Аналогично можно рассматривать и другие виды взаимодействия, размерности и виды деформаций.

Литература

1. Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош / Физматгиз, 1965. – С. 77–83.

2. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц / М.: Наука, 1969. – С. 284–297.

И.А. Фаняев (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **И.В. Семченко,** д-р физ.-мат. наук, профессор

ЧАСТОТНО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОГЛОТИТЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИК-ДИАПАЗОНЕ

Искусственно созданные частотно-спектральные поглотители электромагнитного излучения активно исследуются в последнее десятилетие [1]. Искусственные оптически малые структуры, так называемые метаструктуры, способные поглощать электромагнитное излучение в инфракрасном (ИК) диапазоне длин волн, нашли свое применение в солнечных батареях, болометрах и других устройствах.