

ДИФРАКЦИОННАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБЪЕМНОЙ ФАЗОВОЙ РЕШЕТКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПАДЕНИЯ СВЕТА

О. В. Константинов, Ю. Ф. Романов и А. Ф. Рылов

На основе электродинамической теории возмущений рассмотрен общий случай дифракции света на объемной фазовой решетке, когда волновой вектор падающей волны, вектор решетки и нормаль к поверхности решетки не лежат в одной плоскости. Показано, что дифракционная эффективность зависит не только от направления распространения света, но и от ориентации плоскости поляризации падающей волны.

Большинство работ по теории дифракции света на объемных фазовых решетках относится к частному случаю, когда волновой вектор падающей волны лежит в плоскости, проходящей через вектор нормали к поверх-

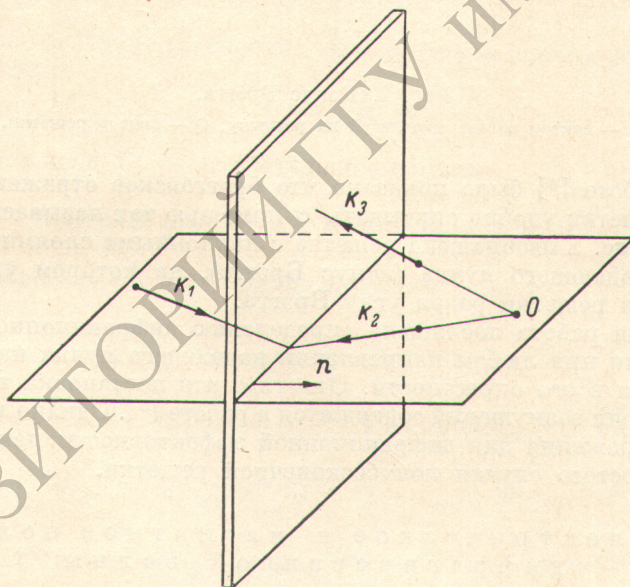


Рис. 1. Запись голограммы в объемной среде.

k_1 — вектор опорной волны, k_2 и k_3 — векторы плоских волн от объекта O , n — нормаль к поверхности регистрирующей среды.

ности и вектор решетки $[1-3]$. Применительно к условиям записи решетки это означает, что волновые векторы опорной волны k_1 и предметной волны k_2 лежат в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности регистрирующей пластины (рис. 1). Вектор решетки $Q_{12} = k_1 - k_2$, получившейся при записи, также лежит в этой плоскости. Однако при записи объемных фазовых голограмм реальных объектов такое ограничение всегда нарушается. Предметную волну можно представить в виде суперпозиции пло-

ских волн с различными волновыми векторами, причем большинство этих векторов не будет компланарно плоскости (n, k_1) , как например, вектор k_3 на рис. 1.

При восстановлении голограммы плоской волной с волновым вектором $(-k_1)$ дифракция на решетке, записанной пучками k_1 и k_3 , будет соответствовать общему случаю ориентации плоскости падения и вектора ре-

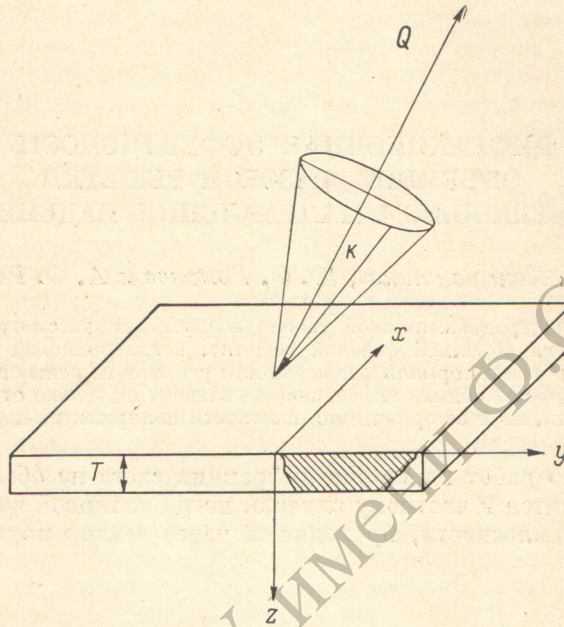


Рис. 2. Конус Брэгга.

k — вектор волны, падающей на решетку, Q — вектор решетки.

шетки. В работе [4] было показано, что брэгговское отражение от слоев объемной решетки удобно описывать с помощью так называемого конуса Брэгга. На рис. 2 изображена решетка с наклонными слоями и конус направлений падающего пучка (конус Брэгга), на котором угол падения света на слои решетки равен углу Брэгга.

Настоящая работа посвящена определению дифракционной эффективности решетки при любом направлении падающего пучка как на конусе Брэгга, так и в его окрестности. Отметим, что постановка такой задачи в рамках теории возмущений содержится в работе [5]. Однако в ней не было получено выражения для дифракционной эффективности даже для сравнительно простого случая полубесконечной решетки.

Электрическое и магнитное поле дифрагированной волны

Система координат, в которой описывается решетка и падающая на нее световая волна, представлена на рис. 2. Считается, что по осям x и y решетка не ограничена. По оси z решетка расположена в области $0 \leq z \leq T$, что отображается функцией $\Pi(z, T)$, которая равна единице внутри этого промежутка и нулю вне его.

Диэлектрическая проницаемость внутри решетки равна

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon(\mathbf{r}); \quad \Delta\epsilon(\mathbf{r}) = 2\Delta\epsilon_0 \cos(\mathbf{Q}\mathbf{r}) \Pi(z, T). \quad (1)$$

Здесь ϵ_0 — среднее значение диэлектрической проницаемости, совпадающее с диэлектрической проницаемостью окружающей среды, $2\Delta\epsilon_0$ — амплитуда гармонической модуляции.

Для монохроматического света уравнения Максвелла в среде имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik_0 \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы электрического и магнитного поля, \mathbf{D} — вектор электрического смещения, $k_0 = \omega/c$ — волновое число. В первом приближении теории возмущений полагаем, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 + \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

Векторы с индексом «0» удовлетворяют уравнениям (2) при $\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$. Векторы с индексом «1», относящиеся к дифрагированной волне, описываются уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = ik_0 \mathbf{H}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -ik_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 - ik_0 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0, \quad (4)$$

из которых следует, что

$$\nabla^2 \mathbf{E}_1 + k_0^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = -k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0 - \varepsilon_0^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} [\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0], \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_1 + k_0^2 \varepsilon_0 \mathbf{H}_1 = ik_0 \operatorname{rot} [\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0]. \quad (6)$$

Пусть на решетку падает плоская волна

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Воспользуемся линейностью уравнений (5) и (6) и их правых частей относительно $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$ и ограничимся одним порядком дифракции, т. е. учтем в $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$ лишь одно слагаемое

$$\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \Delta\varepsilon_0 e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} \Pi(z, T). \quad (8)$$

Для преобразования уравнений удобно ввести орты осей \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z , а также вектор σ

$$\sigma = \mathbf{k} + \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Представим поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 следующим образом:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(z) e^{i(\sigma_x x + \sigma_y y)}, \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_1(z) e^{i(\sigma_x x + \sigma_y y)}. \quad (10)$$

Тогда уравнения (5) и (6) можно привести к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_1(z)}{dz^2} + q^2 \mathbf{E}_1(z) = -k_0^2 \Delta\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) -$$

$$- \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \left\{ (e_x \sigma_x + e_y \sigma_y) \left[(-E_{0x} \sigma_x - E_{0y} \sigma_y) e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) + i E_{0z} \frac{d}{dz} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)) \right] + \right. \\ \left. + e_z \left[(-E_{0x} \sigma_x - E_{0y} \sigma_y) \sigma_z e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) + E_{0z} \frac{d^2}{dz^2} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)) \right] \right\}, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{H}_1(z)}{dz^2} + q^2 \mathbf{H}_1(z) = ik_0 \Delta\varepsilon_0 \left\{ e_x \left[i E_{0z} \sigma_y e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) - E_{0y} \frac{d}{dz} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)) \right] + \right. \\ \left. + e_y \left[E_{0x} \frac{d}{dz} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)) - i E_{0z} \sigma_x e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) \right] + e_z \left[(E_{0y} \sigma_x - E_{0x} \sigma_y) e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) \right] \right\}, \quad (12)$$

где

$$q^2 = k_0^2 \varepsilon_0 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2. \quad (13)$$

Обратим внимание на то, что в правые части этих уравнений входит зависимость от z трех типов, т. е. для каждой из проекций неоднородное дифференциальное уравнение имеет следующую общую форму:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + q^2 U = A_1 e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T) + A_2 \frac{d}{dz} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)) + A_3 \frac{d^2}{dz^2} (e^{i\sigma_z z} \Pi(z, T)). \quad (14)$$

Функцией Грина данного уравнения является функция

$$f(z) = \frac{1}{2iq} e^{iq|z|}. \quad (15)$$

Здесь q — значение квадратного корня из q^2 , имеющее $\text{Re } q > 0$. Искомым решением уравнения (14) является свертка его правой части и функции Грина. В дальнейшем нас будут интересовать волновые поля вне решетки при $z < 0$ и $z > T$. Для того чтобы единым образом описать обе области дифракции, введем вектор дифрагированной волны

$$\mathbf{s} = e_x s_x + e_y s_y + e_z s_z, \quad (16)$$

где $s_z = q$ для волны, дифрагированной вперед ($z > T$), и $s_z = -q$ для волны, дифрагированной назад ($z < 0$). После интегрирования по частям слагаемых в свертке, которые содержат производные от функции $\Pi(\bar{z}, T) \exp(i s_z \bar{z})$, получаем

$$U(z) = \frac{1}{2iq} e^{i s_z z} [A_1 + i s_z A_2 + (i s_z)^2 A_3] \chi(\Delta). \quad (17)$$

Здесь введены расстройка брэгговского резонанса $\Delta = \sigma_z - s_z$ и ее функция $\chi(\Delta)$

$$\chi(\Delta) = \int_0^T e^{i(\sigma_z - s_z)z} dz = \frac{e^{i\Delta T} - 1}{i\Delta}, \quad (18)$$

которая имеет максимум при выполнении условия Брэгга. Итак, при получении решений уравнений (11) и (12) следует каждую производную в правых частях заменить на $i s_z$. Нетрудно проверить, что решения уравнений могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\frac{k_0^2 \Delta \varepsilon_0 \chi(\Delta)}{2i \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}} e^{i s \mathbf{r}} \left[\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{s}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{s})}{|\mathbf{s}|^2} \right], \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = -\frac{k_0 \Delta \varepsilon_0 \chi(\Delta)}{2i \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}} e^{i s \mathbf{r}} [\mathbf{s} \times \mathbf{E}_0]. \quad (20)$$

Найденные выражения описывают электромагнитное поле вне решетки, при этом следует иметь в виду, что $\text{Re } s_z > 0$ при $z > T$ и $\text{Re } s_z < 0$ при $z < 0$. Вектор, определяемый квадратной скобкой формулы (19), имеет смысл части вектора \mathbf{E}_0 , ортогональной вектору дифрагированной волны. Можно убедиться в том, что векторы $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ ортогональны вектору \mathbf{s} . Кроме того, между электрическим и магнитным полем существует известная связь

$$|\mathbf{H}_1(\mathbf{r})| = \sqrt{\varepsilon_0} |\mathbf{E}_1(\mathbf{r})|, \quad (21)$$

причем

$$|\mathbf{E}_1(\mathbf{r})|^2 = \left| \frac{k_0^2 \Delta \varepsilon_0 \chi(\Delta)}{2 \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}} \right|^2 \left[|\mathbf{E}_0|^2 - \frac{|\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{s}|^2}{|\mathbf{s}|^2} \right]. \quad (22)$$

Формулы (19), (20) и (22) совпадают с полученными ранее в [3, 6], для ТЕ- и ТМ-поляризаций, когда векторы \mathbf{n} , \mathbf{Q} и \mathbf{k} находятся в одной плоскости.

Таким образом, при падении плоской электромагнитной волны на решетку с гармонической модуляцией показателя преломления решетка становится источником уходящих от нее влево и вправо дифрагированных волн, поля которых даются формулами (19) и (20). Вообще говоря, образуются четыре волны, соответствующие различным комбинациям знаков величины s_z и вектора \mathbf{Q} ($|\mathbf{Q}| = 2\pi/d$, где d — период решетки). Необходимо подчеркнуть, что только одна из этих четырех волн является сильной: если расстройка Δ мала или обращается в нуль для одной волны, то для других волн она велика, в связи с чем их амплитуды оказываются малыми.

Резонансная дифракция ($\Delta=0$) на объемной фазовой решетке соответствует брэгговскому отражению от системы ее слоев — плоскостей с постоянным показателем преломления. Она будет иметь место при таких направлениях волнового вектора падающей волны, когда сохранятся брэгговский угол падения на слои решетки. Это означает, что множество волновых векторов различных падающих волн, способных к резонансному отражению, образует конус, ось которого параллельна вектору решетки. При $\Delta=0$ вектор s совпадает с вектором σ , т. е. $s=k+Q$. Поскольку $s^2=k^2$, то

$$kQ = -\frac{1}{2}|Q|^2, \quad \cos(\widehat{kQ}) = -\frac{|Q|}{2k}. \quad (23)$$

Формула (23) и описывает конус Брэгга. Если учесть, что знак Q может быть как положительным, так и отрицательным, то ясно, что условие (23) определяет две полости конической поверхности или два конуса Брэгга, один из которых располагается около вектора Q , другой — около вектора $(-Q)$. Отметим, что волновой вектор s дифрагированной волны лежит в одной плоскости с векторами k и Q (или $-Q$).

Д и ф р а к ц и о н н а я э ф ф е к т и в н о с т ь

Дифракционная эффективность η^0 определяется как отношение потоков энергии в дифрагированной и падающей волнах [1, 3]

$$\eta^0 = \frac{|E_1(r)|^2}{|E_0|^2} \frac{|(s \cdot e_z)|}{|(k \cdot e_z)|}. \quad (24)$$

Если пренебречь поглощением света, то на основании формулы (22) получаем

$$\eta^0 = \frac{k_0^4 (\Delta\epsilon_0)^2 T^2}{4 |k_z| |s_z|} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}T\Delta\right)}{\left(\frac{1}{2}T\Delta\right)^2} \sin^2(\widehat{E_0 s}), \quad (25)$$

где через $\sin(\widehat{E_0 s})$ обозначен синус угла между векторами E_0 и s .

Формула (25) отличается от выражения для дифракционной эффективности, полученного в [4] для скалярного волнового поля, наличием двух дополнительных множителей: $\sin^2(\widehat{E_0 s})$ и $|k_z|^{-1}|s_z|^{-1}$. Первый множитель обусловлен векторной природой электромагнитного поля. Он обращает дифракционную эффективность в нуль, когда дифрагированная волна излучается вдоль направления колебаний электрического вектора в падающей волне. Подобная особенность наблюдается в явлении Брюстера. В теории объемных дифракционных решеток она упоминалась в связи со случаем ТМ-поляризации [1]. Очевидно, что волновой вектор дифрагированной волны должен быть направлен перпендикулярно волновому вектору падающей волны. Это, в свою очередь, возможно лишь в случае, если угол раствора конуса Брэгга равен 90° , причем решетка может быть как отражательной, так и пропускающей. Важно подчеркнуть, что обращение дифракционной эффективности в нуль возможно для любого направления падающего луча на таком конусе при соответственно выбранном направлении поляризации. Если угол раствора конуса не равен 90° , то для выбранного направления вектора k дифракционная эффективность будет максимальной, когда вектор E_0 перпендикулярен плоскости (k, Q) , и минимальной, когда E_0 лежит в этой плоскости.

Появление множителя $|k_z|^{-1}|s_z|^{-1}$ в формуле (25) обусловлено взаимодействием длины эффективного взаимодействия света с решеткой и не связано с векторным характером электромагнитного поля. В отражательной решетке со слоями, параллельными поверхности, этот множитель на конусе Брэгга не изменяется, поскольку $|k_z| = |s_z| = \text{const}$. В пропускающей решетке со слоями, перпендикулярными к поверхности, произведение

$|k_z|$ и $|s_z|$ не останется постоянным: величины $|k_z|$ и $|s_z|$ равны, но уменьшаются с увеличением угла падения. Очевидно, что за счет множителя $|k_z|^{-1} |s_z|^{-1}$ может происходить значительное изменение дифракционной эффективности на конусе Брэгга. Отметим, что теорией возмущений нельзя пользоваться, если угол скольжения луча k (или s) относительно поверхности решетки стремится к нулю. Для экспериментального наблюдения указанных явлений необходимо вводить луч в решетку через призму или иммерсионную среду и подобным же образом выводить дифрагированный луч. В противном случае влияние френелевских коэффициентов прохождения границы воздух—решетка может привести к ослаблению модуляции дифракционной эффективности на конусе Брэгга.

Литература

- [1] Н. Когельник. Bell. Syst. Tech. J., 48, 2909, 1969.
- [2] Н. М. Померанцев. Усп. физ. наук, 111, 507, 1973.
- [3] О. В. Константинов, М. М. Панахов, Ю. Ф. Романов. Опт. и спектр., 46, 979, 1979.
- [4] D. Gabor, G. W. Stroke. Proc. Roy. Soc., A304, 275, 1968.
- [5] О. С. Мергелян. Опт. и спектр., 30, 1123, 1971.
- [6] О. В. Константинов, Ю. Ф. Романов, А. Ф. Рыхлов, А. Ю. Тропченко. Письма ЖТФ, 5, 1078, 1979.

Поступило в Редакцию 14 декабря 1979 г.