

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Е. А. ДЕЙ

**ПРОГРАММИРОВАНИЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Изучение правил работы в вычислительной среде Mathcad

*ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
по выполнению лабораторных работ
для студентов специальности
1-31 04 01 Физика (по направлениям)*

Гомель

2014

УДК 004.9 (075.8)
ББК 22.3в6с51+32.973.26-018.2я73
Д27

Рецензенты:

кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой физики
УО БелГУТ В. А. Зыкунов,
кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры радиофизики
и электроники ГГУ им. Ф.Скорины Ю.В. Никитюк

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Дей Е.А.

Д 27 Программирование и математическое моделирование:
Изучение правил работы в вычислительной среде Mathcad
/ Е. А. Дей; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т
им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 45 с.

Практическое руководство предназначено для студентов 2 курса специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям) и предназначено для самоподготовки студентов к выполнению лабораторных работ по разделу «Изучение правил работы в вычислительной среде Mathcad» курса «Программирование и математическое моделирование». Содержание методических указаний и заданий для индивидуального выполнения соответствует типовой программе дисциплины «Программирование и математическое моделирование» для специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям). Практическое пособие имеет своей целью оказание помощи в овладении навыками реализации и использования численных методов при решении физических задач с применением системы компьютерной математики Mathcad.

УДК 004.9 (075.8)
ББК 22.3в6с51+32.973.26-018.2я73

© Дей Е. А., 2014
© УО «Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Алгебраические вычисления в среде Mathcad	5
2 Обработка векторов и матриц в Mathcad	15
3 Построение и оформление графиков функций в Mathcad	25
4 Решение задач с учетом размерности физических величин	30
5 Аналитические преобразования в среде Mathcad	35
6 Создание программных блоков в среде Mathcad	38
Литература	45

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Программирование и математическое моделирование» включена в стандарт специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям) и предполагает изучение теоретических основ базовых численных методов (решения уравнений и систем, интерполяции, дифференцирования и интегрирования, решения дифференциальных уравнений и др.), а также средств реализации численных методов и компьютерного моделирования.

В качестве одного из таких программных средств реализации вычислений выбрана вычислительная среда Mathcad. Данное практическое пособие содержит методические рекомендации по выполнению лабораторных работ, посвященных последовательному и систематическому изучению правил работы в вычислительной среде Mathcad и применению ее возможностей для решения физических задач.

Изложение правил и приемов работы относится к последней версии Mathcad-15. Общие сведения по организации интерфейса и работе с Windows-приложениями считаются известными и не поясняются.

По каждой теме пособие содержит основные сведения о правилах работы, подробные практические рекомендации по проведению вычислений, большое количество примеров, упражнения и задания по индивидуальным вариантам для самостоятельного выполнения на компьютере.

Оптимальный вариант изучения материала - чтение текста за компьютером, самостоятельное повторение примеров и выполнение всех упражнений по ходу чтения материала. После повторения примеров следует выполнить индивидуальное задание в соответствии с вариантом.

1 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и практическое применение правил набора формул и организации алгебраических вычислений с использованием встроенных функций

Внимательно прочитайте информацию об элементах Mathcad. При чтении текста обязательно сразу самостоятельно повторите те действия и вычисления, которые описываются.

Отчет по работе должен состоять из двух частей:

- 1. Повторение численных примеров*
- 2. Выполнение задания*

1.1 Запуск и структура экрана среды MathCAD

Mathcad - это универсальная программа для выполнения численных и аналитических вычислений, сопровождаемых текстовыми пояснениями и графическим отображением результатов.

Документ Mathcad состоит из отдельных прямоугольных участков, называемых *блоками*. Типы блоков соответствуют отдельным элементам решения задач: текстовый, вычислительный, графический, программный, символьный. Блоки автоматически обрабатываются в порядке «сверху-вниз, слева-направо», так что **результат работы любого блока можно использовать в других блоках ниже и правее его**. Пользователь создает нужные блоки в порядке, необходимом для решения задачи.

Для запуска программы достаточно выбрать имя программы в списке

Пуск – Программы – MathSoft – Mathcad15

В результате открывается окно Mathcad, имеющее все стандартные элементы Windows-приложения.

Панели инструментов в среде MS и их назначение. Основные команды, управляющие работой системы, реализованы в виде *кнопок* графического интерфейса и собраны в *палитры*, расположенные в верхней части экрана (рисунок 1).



Рисунок 1 – Панель инструментов Mathcad

Помимо стандартных кнопок Windows-приложения (на Рисунке 1 – номера 1-10), Mathcad содержит ряд кнопок палитры, связанных непосредственно с вычислениями:

- 11 – горизонтальное расположение блоков
- 12 – вертикальное расположение блоков
- 13 – вставка функции (из списка)
- 14 – вставка физических единиц (из списка)
- 15 – выполнение вычислений
- 19 – вызов Resource Center (таблицы, примеры)
- 20 – вызов справочной системы

Все необходимые для проведения вычислений элементы собраны в отдельные палитры кнопок. Каждой палитре соответствует одна управляющая кнопка на основной *математической панели*, которая вызывается в меню <Вид> - <Палитры> - <Математика> (Рисунок 2). Для вызова на экран нужной палитры следует нажать кнопку с ее изображением. Повторное нажатие кнопки удаляет палитру с экрана.

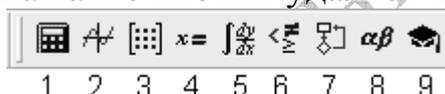


Рисунок 2 – Управляющие кнопки математической панели

Назначение управляющих кнопок математической панели:

- 1 - вызов палитры арифметических вычислений («Калькулятор»)
- 2 - вызов палитры графических шаблонов
- 3 - вызов палитры команд обработки векторов и матриц
- 4 - вызов палитры команд определения и вычисления величин
- 5 - вызов палитры шаблонов операций высшей математики
- 6 - вызов палитры знаков логических операций (boolean)
- 7 - вызов палитры операторов языка программирования
- 8 - вызов палитры греческого алфавита
- 9 - вызов палитры команд аналитических вычислений

1.2 Создание текстовых блоков

Любой Mathcad-документ удобно начинать с текстового блока, содержащего краткое описание документа. Кроме того, отдельные этапы выполняемых вычислений и получаемые результаты полезно сопровождать текстовыми пояснениями, и комментариями.

Для создания текстового блока в документе следует:

– указать курсором место в документе, где должен появиться текстовый блок и выполнить команду меню <Вставка> – <Регион текста>.

На экране появится шаблон текстового блока с текстовым курсором 

– переключить клавиатуру на русский шрифт и набрать нужный текст внутри блока.

Например:

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1		
«АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ		
В СРЕДЕ MATHCAD»		
Выполнил:	Группа:	Вариант: ...

Границы текстового блока автоматически раздвигаются при наборе текста. Важно помнить, что пока курсор находится в текстовой области, все вводимые символы, в том числе математические формулы, воспринимаются как текст. Для перехода к вычислениям нужно вывести курсор из текстового блока.

Создайте в начале документа текстовый блок, наберите в нем название и цель лабораторной работы и свои данные (группа, фамилия, номер варианта).

Далее создайте новый текстовый блок с надписью «Повторение примеров».

При чтении текста повторите все вычисления в своем MS-документе.

4 Ввод данных и вывод результатов

Каждой *переменной* соответствует место (ячейка) в оперативной памяти, где можно хранить ее численное значение, изменять его и использовать его в последующих вычислениях. Доступ к этой области памяти выполняется по имени переменной.

Имя переменной – это последовательность символов (букв и цифр), начинающаяся с буквы. Для задания числовых значений, которые будут использованы в вычислениях, используют переменные и *команду присваивания*, которая имеет вид :=

Набираем на клавиатуре :	a:3	b:=5
Вид на экране в Mathcad :=	a := 3	b := 5

При наборе чисел дробная часть отделяется от целой части точкой.

Для выполнения арифметических действий нужно указать имена переменных и набрать соотношение с использованием знаков [+ - * /] на экране.

Для вывода на экран численного значения любой переменной или выражения достаточно набрать знак равенства «=». Таким образом, знак [=] является в Mathcad командой вывода численного значения.

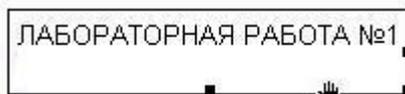
$$a + b = 8 \quad a - b = -2 \quad a \cdot b = 15 \quad \frac{a}{b} = 0.6$$

Если числовые значения в определениях переменных изменить на экране, то Mathcad сразу пересчитает все последующие результаты.

Использование переменных составляет основу работы в вычислительной среде Mathcad, так как позволяет хранить все промежуточные результаты и при необходимости использовать их в дальнейших вычислениях, указав только имя нужной переменной.

$$c := 4.8 \quad z := c^2 + 2.7 \cdot \sqrt{\pi} \quad w := (\sqrt{c} - 1) \cdot (z + 2) \quad w = 35.519$$

Перенос и копирование и блоков. Отдельный блок перетаскивается по документу с помощью мыши. При установке на границу блока курсор принимает вид руки, держащей блок. При нажатой левой клавише мыши блок передвигается по документу.



Фрагмент документа, состоящий из нескольких блоков любого типа, можно выделить мышью и затем быстро удалить, скопировать, перенести в другое место.

Перетаскивание и перенос блоков используют для удобного оформления документа.

5 Набор формул и выполнение простейших расчетов

Обозначения алгебраических операций (возведение в степень, извлечение корня и т.д.) можно набирать с помощью соответствующих кнопок палитры «Calculator» или с помощью клавиатуры:

Математическое обозначение	Набрать на клавиатуре	Шаблон
$\frac{a}{b}$	a/b	
()	,	
x	x	
x^y	x^y	
\sqrt{x}	\x	
$\sqrt[n]{x}$	[Ctrl] \ x	

Следует учитывать, что формула может содержать несколько уровней (числитель, знаменатель, показатель степени, индексы), так что курсор необходимо установить на нужный уровень, а затем продолжить набор. Перевод курсора на другой уровень выполняется при нажатии клавиши «пробел» (при необходимости – многократно).

$$\frac{12}{(3.4^2 + 1.2)} \quad \frac{12}{(3.4^2) + 1.2} \quad \frac{12}{3.4^2 + 1.2} \quad \frac{12}{3.4^2 + 1.2}$$

При наборе математических выражений, содержащих скобки, рекомендуется вначале создать пару скобок клавишей [()], а затем заполнить ячейку ввода заключенного в скобки выражения.

Пример 1. Отдельные этапы вычисления результата

$$\frac{12.5}{7.3} \quad \frac{12.5}{7.3} \quad \frac{12.5}{7.3} \quad \frac{12.5}{7.3} = 1.712$$

Пример 2. Арифметические вычисления

$$2.7 \cdot \left(13.2 + \frac{64.5}{7.4} \right) = 59.174 \quad \frac{15.6(3.28 + 11.2)}{1.5 \cdot 1.6 \cdot 1.7 + 5} = 24.878$$

Формат результата. По умолчанию все результаты выводятся с 3 цифрами после десятичной точки. Если нужен более подробный вывод результатов, следует указать требуемое количество десятичных цифр в пункте меню **<Формат>-<Результат>-<Количество десятичных знаков>**

Пример 3. Результат вычислений с выводом 5 разрядов в дробной части

$$\frac{23.6125(\pi^2 - 4.7845)}{12 + 3.8528} = 7.57418 \quad \frac{4}{177^3} = 993.79702$$

Встроенные константы и переменные. Mathcad содержит *встроенные* (то есть, уже определенные и имеющие значение) константы и переменные.

Константа	Значение	Клавиатура	Палитра
π	3,1415926	[Ctrl]+[Shift]+[p]	«Greek»
	...		
e	2,71828...	e	
%	0,01	%	
∞	10^{307}	[Ctrl]+[Shift]+[z]	«Calculus»

Символом ∞ обозначается «компьютерная бесконечность» - наибольшее число, реализованное в Mathcad.

Пример. Вычисления с использованием встроенных констант

$$\frac{1.92 \cdot 15.3}{3.45 + 4.56} = 3.667 \quad \frac{\pi - 1}{e + 1} = 0.576 \quad \frac{14.60 \cdot 144}{1.9\pi + 7.982.7} = 0.076$$

Примечание. При реализации численных методов рекомендуется в самом начале документа переопределить переменную TOL в сторону повышения точности расчетов, например, $TOL:=10^{-6}$.

6 Встроенные функции среды Mathcad

Mathcad содержит множество встроенных функций, относящихся к алгебраическим, статистическим, численным расчетам.

Назначение функции - выдача результата в соответствии со значением аргументов. *Обозначение* функции состоит из имени и (в скобках) списка аргументов. Аргументы в обозначении функции называются формальными, они показывают, сколько элементов и какого типа необходимо указать при вызове функции.

Математическое обозначение	Mathcad	Математическое обозначение	Mathcad
<i>Алгебраические функции</i>		<i>Различные функции</i>	
e^z	exp(z)	случайное число [0;x]	rnd(x)
$\ln z$	ln(z)	функция ошибок	erf(x)
$\log_a z$	log(z,a)	остаток от деления x на y	mod(x,y)
$\lg z$	log(z)	угол радиус-вектора точки (радиан)	angle(x,y)
отбрасывание дробной части	trunc(x)		
замена дробной части на +1	ceil(x)	символ Кронекера δ_{ij}	$\delta(i,j)$
замена дробной части на -1	floor(x)	Полностью антисимметричный тензор ε_{ijk}	$\varepsilon(i,j,k)$
<i>Тригонометрические функции</i>		<i>Гиперболические функции</i>	
$\sin z$	sin(z)	sh x	sinh(x)
$\cos z$	cos(z)	ch x	cosh(x)
$\operatorname{tg} z$	tan(z)	th x	tanh(x)
$\operatorname{ctg} z$	cot(z)	cth x	coth(x)
arcsin x	asin(x)	arsh x	asinh(x)

$\arccos x$	$\text{acos}(x)$	$\text{arch } x$	$\text{acosh}(x)$
$\text{arctg } x$	$\text{atan}(x)$	$\text{arth } x$	$\text{atanh}(x)$
$\text{arcctg } x$	$\text{acot}(x)$	$\text{archth } x$	$\text{acoth}(x)$

Примечание. Аргумент тригонометрических функций должен быть выражен в радианах.

Для использования (вызова) функции необходимо в записи вычислительного блока набрать имя функции, а в качестве параметров указать те элементы, которые должны быть использованы в данном вычислении (фактические параметры). Например:

$$\log(1.2) = 0.079$$

$$a := \cos(0.34 + \exp(-0.8))$$

$$\text{floor}(1.99) = 1$$

$$\sinh(a) + \text{atan}(a^2 + 9.345) = 2.234$$

$$\text{ceil}(3.01) = 4$$

Примечание 1. В среде МС различаются большие и малые буквы и символы разных шрифтов, например, $a1$ и $A1$ – разные переменные. Поэтому имена встроенных функций следует набирать так, как они приведены в таблице.

Примечание 2. Аргумент функции всегда записывается в скобках (это и есть признак функции). Без скобок написание рассматривается как имя новой переменной, например: $\sin x$ – переменная, $\sin(x)$ – функция.

Для алгебраических функций имя функции можно вставить из палитры «Калькулятор». При наведении курсора на кнопку выводится клавишная команда, соответствующая ей. При наборе формул использование клавишных команд экономит время.

Полный список встроенных функций можно просмотреть в режиме вставки функции.

- или меню:	<Вставка> - <Функция> (Insert-Function)	
- или кнопка:		

В отдельном окне функции собраны по категориям, для выделенного имени функции выводится краткое пояснение. Имя нужной функции с ячейками для указания аргументов будет вставлено в документ по нажатию клавиши [ОК].

Примечание 3. Важно помнить, что имя и список фактических аргументов образуют единое обозначение вызова функции

имя(параметры). Поэтому при возведении функции в степень показатель степени ставится после скобок, в которых заключен аргумент.

Математическое обозначение	Выражение в МС
$\sin x^2 + \sin^2 x$	$\sin(x^2) + \sin(x)^2$

Использование встроенных функций позволяет выполнять достаточно сложные вычисления.

Диапазонные переменные в среде МС. Во многих случаях вычисления необходимо выполнить для нескольких значений аргумента, изменяющихся регулярным образом. Для этого в среде Mathcad используют диапазонные переменные, определение которых состоит из следующих элементов:

ИМЯ := Начальное значение, Следующее значение . . Последнее значение

Знаки := и .. на клавиатуре набираются клавишами [:=] и [;]

Если следующее значение не указано, то переменная изменяется на 1.

Все последующие блоки, содержащие диапазонную переменную, выполняются для каждого ее значения. Например:

$x := 1, 1.2..2$		$k := 1..4$		
$x =$	$\sin(x) =$	$k =$	$k^2 =$	$k^3 =$
1	0.841	1	1	1
1.2	0.932	2	4	8
1.4	0.985	3	9	27
1.6	1	4	16	64
1.8	0.974			
2	0.909			

Комплексные числа в среде МС. Практически все вычисления и функции (Табл. 1) в Mathcad могут выполняться и для комплексных чисел.

Мнимая единица по умолчанию обозначается «i». Есть возможность переобозначить ее «j». Если буква i использовалась для задания имени переменной (например, $i:=2$), то можно вернуться к ее использованию в качестве мнимой единицы, определив $i = \sqrt{-1}$.

При определении комплексного числа мнимая единица не умножается, а сразу записывается после значения мнимой части (без знака * перед i): $z:=2.5+1.7i$. Если мнимая часть равна 1, это значение также следует указать перед i (1 исчезает, когда курсор уходит из блока): $d:=5+1i$. При определении собственных функций мнимая единица используется со знаком умножения.

Операции над комплексными числами и встроенные функции:

Математическое обозначение	Обозначение в МС
$ z $ - модуль числа	$ z $
z^* - комплексное сопряжение	\bar{z}
Rez – вычисление вещественной части	$Re(z)$
Imz – вычисление мнимой части	$Im(z)$
α - угол (радиан), образованный радиус-вектором точки $Rez+iImz$ с осью OX	$arg(z)$

Для выполнения операции комплексного сопряжения следует имя переменной или формулу подчеркнуть курсором полностью и выполнить клавишную команду [Shift “].

При наборе имени функции важно соблюдать регистр.

$$\begin{array}{lll}
 z := 5 + 4i & d := 7 - 2i & w := -12 + 7i \\
 |z| = 6.403 & \bar{z} = 5 - 4i & \sin(d) = 2.472 - 2.734i \\
 z \cdot d = 43 + 18i & \overline{(z \cdot d)} = 43 - 18i & z^3 = -115 + 236i \\
 Re(z - d) = -2 & Im(z - d) = 6 & arg(w) = 2.614
 \end{array}$$

Содержание задания

Задача 1. Создать новый документ МС и выполнить самостоятельно указанные действия:

1. Вычислите результат для следующих примеров: $456 * 12 =$ $1.5^3 =$
 $123 - 34 * 6 =$ $4.5 + 3.1 * 4.2 =$
2. Получите на экране значения встроенных переменных, набрав для каждой имя и знак равенства после имени.
3. Используя перенос блоков, расположите их в документе наиболее удобным образом.
4. Вычислить значения функции \sqrt{x} для всех значений x на отрезке $[2; 6]$ с шагом 0,4.
5. Вычислить значения функции $\cos^2 x$ для всех значений x на отрезке $[-\pi; \pi]$ с шагом $\pi/8$.
6. Вычислить $k = m^2 \operatorname{tg}(\mu + \pi/8)$, если: $x = 1.625$; $y = -15.4$; $z = 0.232$,

$$\mu = (\sqrt{x} + 1.8)^2, \quad m = \frac{\cos(2x + y) - \frac{x + y}{y + z}}{\sqrt{2x^3 + 3y^2 + 4z + 3.67z^3}} + \left(\frac{\cos^2 y + 3.456x}{\sin^2 x + z^2} \right)^{2/3};$$

7. Вычислить $\varepsilon = \sin(\ln k + 4.12d)$, где $d = \frac{\text{ctg}(x + y + z + 8)}{x^2 + y^2 + z^2 + 6}$; $k = e^{|z-y|}(\cos^2 z + 1,5x^4)$; и значения $x = -4,673$; $y = 0,373$; $z = 0,823$.

Задача 2. Выполнить вычисления с использованием шаблонов палитры математических операций (дифференцирование, интегрирование и др.). Результаты выведите в формате 6 цифр после десятичной точки.

Варианты вычислений берутся из книги:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М., 1990. А) стр. 127-129; Б) стр. 132-134; В) стр. 137-138.

2 ОБРАБОТКА ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и практическое применение правил вычислений с использованием векторов и матриц, изучение способов построения графиков функций

Внимательно прочитайте описание новых элементов Mathcad. Создайте новый документ и при чтении обязательно самостоятельно повторите все примеры. Затем выполните задание, приведенное в конце текста. Такой подход к изучению материала позволяет наиболее быстро получить навыки практических вычислений.

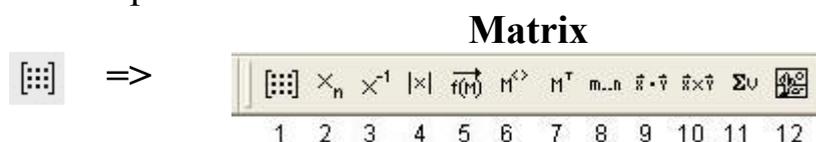
В документе текстовыми блоками выделите разделы «Повторение примеров» и «Выполнение задания».

1 Определение векторов и матриц в MS-документе

В среде MS вектором считается *столбец* (но не строка) чисел (одномерный массив), а матрицей - прямоугольная *таблица* чисел (двумерный массив). Кроме того, вектор можно рассматривать как матрицу, состоящую из одного столбца, а матрицу - как набор столбцов-векторов.

По умолчанию элементы вектора и строки матрицы нумеруются сверху вниз, а номера столбцов слева направо, **начиная с 0**.

Шаблоны математических действий для обработки матриц содержатся в палитре “Matrix”, которая вызывается при нажатии кнопки  на главной палитре.



Назначение кнопок палитры:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1 – создание вектора или матрицы | 7 – транспонирование матрицы |
| 2 - создание индекса элемента | 8 – шаблон диапазонной переменной |
| 3 – вычисление обратной матрицы | 9 – скалярное произведение векторов |
| 4 - модуль вектора или матрицы | 10 – векторное произведение векторов |
| 5 – операция векторизации | 11 – суммирование элементов вектора |
| 6 – выделение столбца матрицы | 12 – графическое отображение величины элементов матрицы |

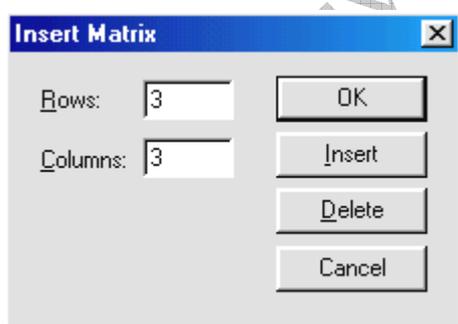
Определить вектор или матрицу *явным образом* - значит указать место в документе, записать нужное имя матрицы, команду присваивания и вставить шаблон матрицы. Затем шаблон заполняется числами.

Имя := Шаблон

Вставить шаблон матрицы можно несколькими способами:

- или выбрать в меню <Вставить> – <Матрица>
- или нажать клавиши [Ctrl]+[M]
- или щелкнуть по кнопке 1 палитры «Matrix»

На экране появится окно диалога, в котором нужно указать количество строк (Rows) и столбцов (Columns). Для вектора Rows обозначает количество элементов, а Columns=1.



Шаблон

$\left(\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$ [Tab]
<—

Переход к следующей ячейке выполняется при нажатии клавиши [Tab] или клавишами управления курсором. Пример определения вектора и матрицы:

$$\text{Res} := \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{W2a} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Отдельный элемент вектора или матрицы обозначается нижним индексом. Переход в режим набора индекса:

- или клавиша “[”,
- или кнопка 2 палитры «Matrix».

Возврат в основной уровень - клавиша «Пробел». Для элемента матрицы указывают в индексе номер строки и номер столбца через запятую. (Например, нажатие клавиш M[1,2] дает в документе M_{1,2}).

Отдельный элемент вектора или матрицы используется как обычная переменная: его значение можно вывести на экран, ему можно присвоить новое значение, его значение можно использовать в вычислениях. Например:

набрать на клавиатуре:	Res [1= W2a [2, 2= z : Res [2+3*W2a [1, 1 Z=
вид на экране:	Res ₁ = 48 W2a _{2,2} = 9 z := Res ₂ + 3 W2a _{1,1} z = 8

Неявный способ определения вектора или матрицы состоит в определении отдельного элемента. Как только определяется хотя бы один элемент нового вектора или матрицы, то его номер автоматически считается максимальным, а все предыдущие элементы считаются равными 0. Таким способом можно изменить размер и существующих матриц, например:

$$\begin{aligned}
 Fa_2 &:= 20 & Matr_{1,3} &:= 99 & Fa &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} & Matr &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix} \\
 W2a_{2,4} &:= 50 & W2a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 50 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Неявный способ можно использовать и для вычисления всех элементов, если задать выражение, в котором используется диапазонная переменная, логически соответствующая номеру элемента

$$\begin{aligned}
 k &:= 0..3 & V_k &:= (k+2)^3 & W_k &:= \sin\left(\frac{\pi}{k+2}\right) & V &= \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ 64 \\ 125 \end{pmatrix} & W &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.707 \\ 0.588 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Зачастую бывает нужно вычислить вектор значений аргумента и вектор значений функции

$$\begin{aligned}
 \text{fun}(x) &:= x \cdot \cos(x) & a &:= 2 & h &:= 0.1 \\
 j &:= 0..20 & x_j &:= a + h \cdot j & y_j &:= \text{fun}(x_j) & x &= & y &=
 \end{aligned}$$

при этом имена вектора и функции должны быть различными.

После определения вектора или матрицы их можно обрабатывать как самостоятельные элементы, указывая только имя, или же изменять отдельные элементы (указывается индекс – номер элемента).

Используя определенные в документе векторы и матрицы, можно вычислять новые результаты, выполняя нужные команды палитры «Matrix», например:

$$W1 := \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} \quad W2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \quad W1 \times W2 = \begin{pmatrix} 24 \\ -150 \\ 78 \end{pmatrix}$$

$$|W1| = 23.043 \quad |W2| = 18 \quad W1 \cdot W2 = 378$$

$$U := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad U^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad U^2 = \begin{pmatrix} 30 & 32 & 36 \\ 58 & 81 & 96 \\ 88 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

$$|U| = 6 \quad U^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ 1 & -5 & 3 \\ -0.5 & 3.667 & -2.167 \end{pmatrix}$$

Примечания:

1) Векторное произведение определено только для трехэлементных (трехмерных) векторов.

2) При выводе на экран матриц большого размера отображается часть матрицы, причем остальные элементы можно просмотреть с помощью полос горизонтальной и вертикальной прокрутки.

3) Для изменения начального номера элементов следует переопределить встроенную переменную ORIGIN. Например, для отсчета элементов от 1 определяют ORIGIN:=1.

4) Структуру вектора можно использовать для одновременного определения нескольких переменных.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 12 \\ 45 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad n := 1..6 \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.2x_{n-1} + y_{n-1} \\ x_{n-1} + 0.1y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Матричную структуру могут иметь и функции пользователя.

$$\alpha(x) := \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ \sin(x + 1) \end{pmatrix} \quad \alpha(2.8) = \begin{pmatrix} 6.84 \\ -0.612 \end{pmatrix}$$

$$f(p, s) := \begin{pmatrix} p + s & p \cdot s \\ \sqrt{p} + \sqrt{s} & p - s \end{pmatrix} \quad f(3, 5) = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 3.968 & -2 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений можно сохранять как самостоятельный вектор

$$res := \alpha(2.8) \quad res = \begin{pmatrix} 6.84 \\ -0.612 \end{pmatrix}$$

или как вектор отдельных переменных

$$\begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix} := \alpha(2.8) \quad ta = 6.84 \quad tb = -0.612$$

Эти примеры отражают возможности Mathcad по созданию и обработке сложных структур данных.

Операция векторизации. Во многих случаях бывает необходимо вычислить функцию, параметром которой является числовая переменная, от каждого элемента вектора или матрицы, например: $\sqrt{V_1}$; $\sqrt{V_2}$; $\sqrt{V_3}$.

Последовательное перечисление всех элементов громоздко, поэтому в среде MS введено понятие векторизации функции, смысл которого заключается в вычислении функции от каждого элемента вектора или матрицы.

Для включения векторизации следует набрать имя и параметры функции, курсором подчеркнуть обозначение функции и нажать [CTRL -] или выбрать кнопку палитры “Matrix” $\overrightarrow{f(x)}$. Режим векторизации функции указывается стрелкой над обозначением функции (но это не обозначение вектора!).

$$\text{Dan} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\sqrt{\text{Dan}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.414 \\ 1.732 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\tan(\text{Dan})} = \begin{pmatrix} 1.557 \\ -2.185 \\ -0.143 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cm} := \begin{pmatrix} 0.1 \cdot \pi & 0.2 \cdot \pi \\ 0.3 \cdot \pi & 0.4 \cdot \pi \end{pmatrix} \quad \text{Res} := \overrightarrow{\cos(\text{Cm})} \quad \text{Res} = \begin{pmatrix} 0.951 & 0.809 \\ 0.588 & 0.309 \end{pmatrix}$$

При попытке вычислить алгебраическую функцию от вектора или матрицы без включения операции векторизации появляется сообщение об ошибке «non-scalar value».

2 Встроенные функции для обработки векторов и матриц

При описании встроенных функций обрабатываемый вектор обозначен именем V, обрабатываемая матрица – именем M. На практике пользователь при вызове функции указывает имя вектора или матрицы, которые необходимо обработать в данном месте документа. Конечно, вектор или матрица должны быть определены до выполнения функции.

Параметры векторов и матриц

Получение минимального элемента вектора или матрицы	min(V) min(M)
Получение максимального элемента вектора или матрицы	max(V) max(M)
Количество элементов вектора	length(V)
Номер последнего элемента вектора	last(V)
Количество строк матрицы	rows(M)
Количество столбцов матрицы	cols(M)

Вычисление <i>следа</i> квадратной матрицы (суммы диагональных элементов)	tr(M)
--	-------

Примеры:

$$\begin{aligned}
 Wa &:= \begin{pmatrix} 12 & 15 & 19 \\ -3 & 5 & 7 \\ 21 & 23 & 38 \end{pmatrix} & Vect &:= \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} & \text{length}(Vect) &= 3 \\
 \min(Wa) &= -3 & \text{rows}(Wa) &= 3 & \text{last}(Vect) &= 2 \\
 \max(Wa) &= 38 & \text{cols}(Wa) &= 3 & \min(Vect) &= 10 \\
 & & & & \max(Vect) &= 30 \\
 & & & & \text{tr}(Wa) &= 55
 \end{aligned}$$

Формирование новых матриц

Формирование единичной квадратной матрицы размера n*n	identity(n)
Формирование квадратной матрицы, на диагонали которой расположены элементы вектора V, остальные элементы =0	diag(V)
Объединение двух или более матриц, имеющих одинаковое число строк, в одну	augment(M1,M2)
Объединение двух матриц, имеющих одинаковое число столбцов, в одну	stack(M1,M2)
Выделение части матрицы в пределах r1,r2,c1,c2	submatrix(M,r1,r2,c1,c2)

Примеры:

$$\begin{aligned}
 RR &:= \text{identity}(2) & Z &:= \text{diag}(Vect) \\
 RR &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & Z &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} & \text{Num} &:= \text{submatrix}(Z, 0, 1, 1, 2) \\
 & & & & \text{Num} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{New1} &:= \text{stack}(\text{Num}, RR) \\
 \text{New2} &:= \text{augment}(RR, \text{Num}) \\
 \text{New2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 0 \end{pmatrix} & \text{New1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Для многих численных методов решение системы линейных уравнений является одним из этапов. Как известно, систему линейных уравнений можно представить в матричной форме

$$AX=B,$$

где A – матрица коэффициентов системы, B - вектор правых частей уравнений.

Для решения системы линейных уравнений можно использовать метод обратной матрицы. Этот метод, являющийся достаточно громоздким, в МС реализуется одной строкой. В соответствии со свойством обратной матрицы $A^{-1}A=I$, где I – единичная матрица, получаем, что столбец неизвестных

$$X := A^{-1}B.$$

Выполнив вычисление по этой формуле, далее в документе нужно вывести результат на экран и выполнить проверку (правая часть должна совпасть с вектором b).

Пример. Решение системы трех уравнений. По условию формируем матрицу коэффициентов и вектор правых частей

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$	$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$
--	---

вычисляем результат, выполняем проверку результата

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.352 & -0.037 & -0.13 \\ 0.093 & 0.148 & 0.019 \\ -0.241 & -0.185 & 0.352 \end{pmatrix}$	$X := A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
---	---

Для решения системы уравнений можно использовать встроенную функцию $lsolve(A,B)$. Матрицы A и B определяются так же, а затем находится вектор неизвестных $Y := lsolve(A, B)$.

Универсальный характер векторов и матриц в среде МС. В МС реализован принцип вложенности структур данных различного типа. Это означает, что элементами вектора или матрицы могут быть другие векторы или матрицы, или функции. Функция, в свою очередь, может иметь матричную структуру, и так далее.

Это позволяет экономично описывать исходные данные, планировать вычисления и группировать результаты. Вложенность данных используется также при разработке программных блоков в среде МС.

При выводе на экран таких векторов или матриц МС показывает не численные значения, а структуру элемента (в фигурных скобках), например

$$u := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad Z := \begin{pmatrix} 12 & u \\ 24 & w \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 12 & \{2,1\} \\ 24 & \{2,2\} \end{pmatrix}$$

$$fun1(x) := x^2 + 1 \quad fun2(x) := \sin(2 \cdot x - 1)$$

$$vf(x) := \begin{pmatrix} fun1(x) \\ fun2(x) \end{pmatrix} \quad vf(Z) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.141 \end{pmatrix}$$

Содержание задания

Выполнить (по вариантам) вычисления в задачах №1, №2, №3, №4.

Задача 1. Выполнить действия по обработке заданных векторов и матриц с выводом на экран всех промежуточных результатов (векторы определять как столбцы чисел).

1) $ra3=(1.2, -2.3, 6.05)$; $cz4=(-0.4, 3.1, 8.2)$;

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 35 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix};$$

- вычислить скалярное произведение $ra3$ и $cz4$;
- вычислить модуль вектора $a=2*ra3-3*cz4$;
- вычислить векторное произведение векторов $2*cz4$ и $3*ra3$;
- вычислить определитель матрицы $2*A-3B$
- вычислить произведение матриц $A^{(-1)}$ и B^2
- вычислить новую матрицу $A1$ путем возведения элементов исходной матрицы A в куб;
- вычислить след матрицы $(A+5B)^{(-1)}$;

2) $kq3=(3.6, -2.3, 9.45)$; $uv4=(-5.1, 5.8, -8.4)$;

$$T = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ 9 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \quad S = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 41 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

- вычислить векторное произведение $kq3$ и $uv4$;
- вычислить модуль вектора $a=6*kq3-2.3*uv4$;
- вычислить скалярное произведение векторов $kq3$ и $uv4$;
- транспонировать матрицу $5*T-3*S$
- вычислить произведение матриц T^2 и S^4
- вычислить след матрицы $T^{(-1)}$;

3) $vx3=(6.6, -3.1, 8.36)$; $ca4=(-6.3, 8.5, -3.3)$;

$$G = \begin{vmatrix} 9 & 5 & -2 \\ 13 & -3 & -3 \\ 6 & 7 & 4 \end{vmatrix}; \quad H = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 51 & 11 & 4 \\ 5 & -2 & 14 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль векторного произведения $4*vx3$ и $-ca4$;
- вычислить максимальный элемент вектора $b=4*vx3+2.3*ca4$;
- вычислить скалярное произведение векторов b и $vx3$;
- вычислить определитель матрицы $3*G-4*H^3$
- вычислить произведение матриц $(G-H)^3$ и $(2G+H)^{(-1)}$
- получить новую матрицу $G1$ путем вычисления функции \sin от элементов исходной матрицы G ;
- вычислить след матрицы $(G+H)^2$;

4) $dy3=(4.6, -2.7, 2.48)$; $se4=(-8.1, 5.4, -9.3)$;

$$W = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 2 \\ 25 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 11 & -4 & -8 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix};$$

- упорядочить элементы вектора $c=6*dy3-4.3*se4$;

- вычислить скалярное произведение (dy_3+c) и se_4 ;
- вычислить модуль векторного произведения векторов;
- вычислить определитель матрицы $-4*W+3*D$;
- получить матрицу $D1$ путем вычисления функции ch от элементов матрицы $W/9$;

5) $qn_3=(4.3, -7.3, 7.21)$; $um_4=(-4.1, 7.2, -7.9)$;

$$R = \begin{vmatrix} 31 & 5 & -7 \\ -5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 61 & -4 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора $d=2.9*qn_3-5.3*um_4$;
- вычислить векторное произведение d и um_4 ;
- вычислить скалярное произведение векторов qn_3 и um_4 ;
- вычислить определитель произведения матриц R^4 и G^2 ;
- вычислить матрицу $G1$, обратную матрице G ;
- вычислить матрицу $R1$, вычислением функции \cos от элементов матрицы R ;

6) $fa_3=(7.6, 3.2, 8.02)$; $hi_4=(-1.4, 5.6, -6.4)$;

$$V = \begin{vmatrix} 24 & 7 & 8 \\ 15 & 14 & -9 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 54 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix};$$

- вычислить минимальный элемент вектора $w=3.6*fa_3-1.3*hi_4$;
- вычислить векторное произведение hi_4 и $2*w$ и его модуль;
- вычислить скалярное произведение векторов w и fa_3 ;
- вычислить определитель матрицы V^2-3*B ;
- вычислить произведение матриц V^{-1} и B^2 ;
- вычислить новую матрицу $V1$ путем вычисления функции sh от элементов матрицы $V/5$;

7) $wa_3=(3.6, -2.1, 9.45)$; $ek_4=(-5.1, 5.8, -8.4)$;

$$P = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ 15 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \quad R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 31 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix};$$

- упорядочить элементы векторного произведения wa_3 и ek_4 ;
- вычислить модуль вектора $s=6*wa_3-2.3*ek_4$;
- вычислить скалярное произведение векторов s и wa_3 ;
- вычислить определитель и след матрицы $5*R-3*P$;
- вычислить минимальный элемент объединения матриц R и P ;
- вычислить новую матрицу $R1$ путем деления всех элементов исходной матрицы R на ее определитель;
- упорядочить элементы 1-го столбца матрицы P^5 ;

8) $bt_3=(4.6, -3.1, 4.45)$; $up_4=(-5.1, 6.8, -7.8)$;

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 17 \\ 11 & 6 & -9 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}; \quad K = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 27 & 4 & -3 \\ 3 & 13 & 8 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора $g=6*bt_3-2.3*up_4$;

- вычислить векторное произведение bt_3 и g ;
- вычислить скалярное произведение векторов g и (bt_3-up_4) ;
- вычислить определитель матрицы $0.5*A-0.3*K$
- вычислить произведение матриц A^3 и K^{-1}
- вычислить новую матрицу K_1 путем возведения в куб матрицы, обратной матрице K ;
- вычислить след матрицы $(4*A-K)^6$;

Задача 2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы. Результаты вывести на экран с точностью 0.0001. Проверить результаты подстановкой. Варианты условия задачи берутся из книги:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. А) стр. 32-33; Б) стр. 39-40.

3 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель работы: изучение и практическое применение правил создания и оформления графиков функций одной переменной в среде Mathcad

Внимательно прочитайте информацию об элементах Mathcad. При чтении текста обязательно сразу самостоятельно повторите те действия и вычисления, которые описываются.

Состав графической палитры. МС позволяет строить самые разнообразные графики в декартовой и полярной системах координат. Шаблоны графиков в МС собраны в графической палитре. Каждая кнопка палитры выполняет действие - вставка шаблона в документ в то место, которое указано курсором. После вставки шаблона следует заполнить его элементы, указав имена аргумента, функции, пределы из изменения. Положение графика в документе и размеры графика изменяются с помощью мыши.



1 – шаблон графика функции одной переменной в декартовых координатах

2 – инструмент ‘Zoom’

3 – инструмент ‘Trace’

4 – шаблон графика функции одной переменной в полярных координатах

5 – шаблон «поверхность» для функции двух переменных

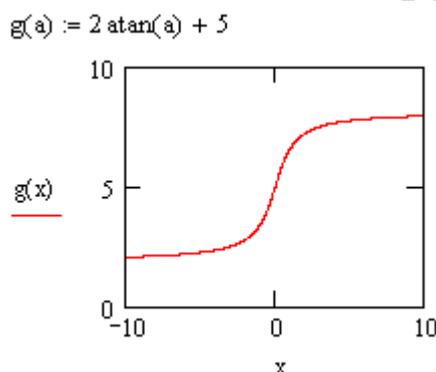
- 6 – шаблон «линии уровня» для функции двух переменных
- 7 – шаблон «объемная гистограмма» для функции двух переменных
- 8 – шаблон «точки в пространстве» для функции двух переменных
- 9 – шаблон «векторное поле» для функции двух переменных

Шаблон графика можно также вставить, используя пункты меню <Вставка> - <График>.

Способы построения графика функции одной переменной.

Существует несколько способов построения графиков, различающихся возможностями управления изображением. В каждом из них в документ вставляется шаблон графика, заполняются его ячейки, настраиваются параметры изображения графика.

А) Быстрое построение графика. В шаблоне указывается только имя аргумента и имя функции (встроенной или собственной). После вывода курсора из области шаблона автоматически будут выбраны пределы аргумента $[-10;10]$, вычислены пределы изменения функции и построен график.



Примечания:

1. Пределы изменения аргумента можно изменить прямо в шаблоне графика.

2. Если параметры графика изменены, график можно обновить нажатием клавиши F9.

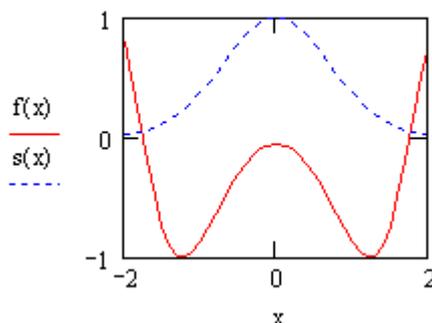
3. Для изображения **графика нескольких функций** достаточно перечислить имена функций на вертикальной оси через запятую.

4. Если функция $f(x)$ определена аналитическим выражением, можно построить и график ее производной, набрав в списке функций при вертикальной оси $df(x)/dx$.

Б) График для значений аргумента в заданном диапазоне. В этом случае необходимо: а) определить функции, для которых строится график; б) определить диапазонную переменную, задающую значения аргумента (в дальнейшем легко изменить ее параметры); в) вставить в документ шаблон графика и в нем указать диапазонную переменную в качестве аргумента и имя функции. Так как график строится по точкам, которые

соединяются отрезками прямых, то для получения плавной кривой следует брать малый шаг между точками.

$$f(x) := \sin(x^2 + 3.2) \quad s(x) := \exp(-x^2) \quad x := -2, -1.9..2$$

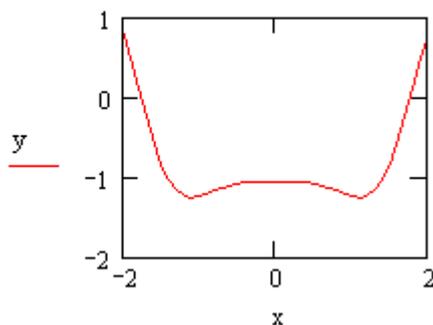


В) График с использованием векторов значений аргумента и функции.

Этот вариант используется для отображения результатов вычислений или экспериментальных данных. При этом значения функции для отдельных значений аргумента могут быть известны, даже если явный вид функции неизвестен. Последовательность действий в этом случае:

- определить (вычислить) вектор значений аргумента
- определить (вычислить) вектор значений функции
- вставить в документ шаблон графика
- в шаблоне графика указать имена векторов

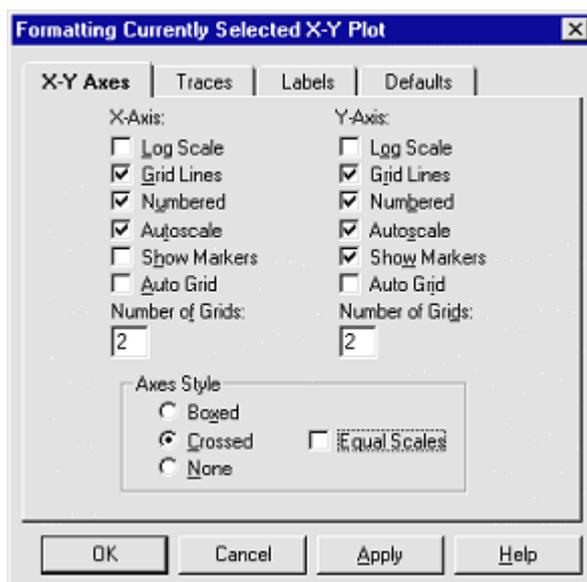
$$k := 0..40 \quad x_k := -2 + k \cdot 0.1 \quad y_k := f(x_k) - s(x_k)$$



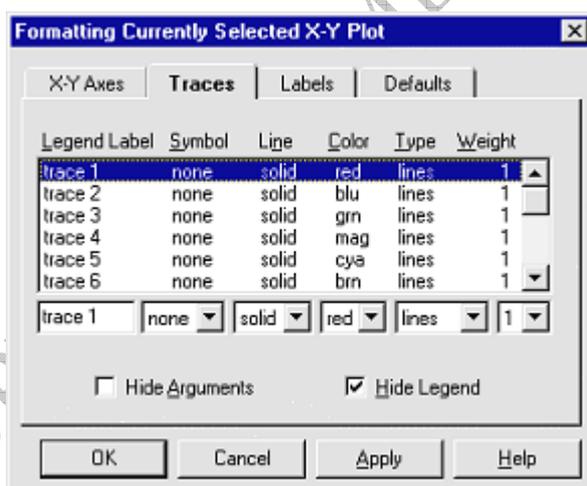
Управление формой и параметрами графика. График функций одной переменной имеет широкие возможности оформления. В частности, можно изобразить график: с масштабной сеткой и без нее, с линейным и логарифмическим масштабom осей, с отметками точек графика различными значками (прямоугольниками, ромбами и т.д.).

С помощью мыши можно изменить размеры графического блока или перенести его в другое место документа. При оформлении отчетов график можно скопировать в буфер и вставить в документ редактора Word.

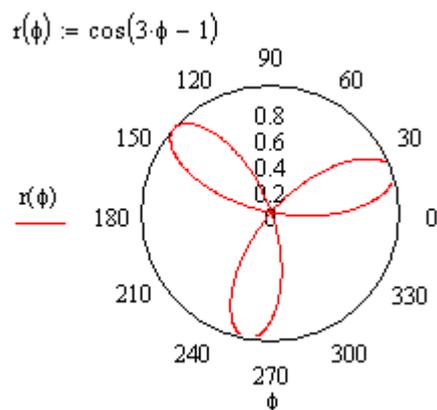
Для изменения внешнего вида графика используется диалоговое окно «Формат графика» (вызывается или правой клавишей мыши, или в меню «Формат – график»).



Для изображения оси OX на графике достаточно включить вспомогательные линии по оси OY , одна из которых пройдет вдоль оси OX (при значении $Y=0$), или определить вспомогательную функцию $f_0(x):=0$ и указать ее в списке функций графика.



Построение графика функции одной переменной в полярных координатах. Параметры физических систем, имеющих осевую симметрию, удобно отображать в полярных координатах. Аргументом при этом является направление на плоскости, - угол φ относительно оси OX , а функцией - расстояние точки графика от начала координат в этом направлении. В шаблоне графика достаточно указать имя аргумента и имя функции.



На графике указываются значения полярного угла и расстояния r . При необходимости можно задать полярный угол как диапазонную переменную, или использовать векторы значений аргумента и функции.

Содержание задания

Задача 1. Построить график функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (свой и предыдущий варианты) в области $[0;10]$ с шагом 0.1. По графику определить количество корней для каждой функции в заданной области.

- 1 $(x + 1)^2 \cdot \sin(x - 0.3) + 6.2 = 0$
- 2 $x^2 \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \cos(x) + 4x - 3 = 0$
- 3 $x \cdot \sin(x) - \exp\left(\frac{x}{4}\right) + 2.7 = 0$
- 4 $\cos(2x + 0.1) - \exp(2 - x) + x \cdot \sin(x + 1.1) + 3 = 0$
- 5 $0.4x^2 - 5.2x \cdot \sin(x) - \frac{1}{x + 1.5} + 3.3 = 0$
- 6 $2 \cdot \cos(x - 1) + \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) + 0.4x - 2.5 = 0$
- 7 $(\sin(x + 0.5))^2 - 0.3x + \ln(3x + 1) - 2.1 = 0$
- 8 $5 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + 0.5\right) \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \ln(2x + 1) - 1.2 = 0$
- 9 $12 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} + 0.5\right) \cdot \sin(x - 1) - 0.5 \cdot \exp(-0.2x) = 0$
- 10 $2x^2 + 8(x + 1) \cdot \cos(x) - \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 0.5 = 0$

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Цель работы: изучение и практическое применение правил использования встроенных в среду Mathcad единиц измерения физических величин при решении физических задач

Внимательно прочитайте описание новых элементов МС. Создайте новый документ МС и при чтении обязательно самостоятельно повторите все примеры. Цель работы с этой частью – практическое освоение описанных элементов МС.

1. Встроенные обозначения единиц измерения физических величин

В среде МС имеется обширный набор единиц измерения физических величин, что позволяет решать физические задачи в привычной форме. Каждая единица измерения имеет свое имя, и при наборе исходных данных просто приписывается после числового значения. МС поддерживает выполнение вычислений с учетом физической размерности величин.

При определении физической величины можно указать, в каких единицах она выражена, например:

S (sec) – секунда; m – метр; kg – килограмм.

Размерность *приписывается* к числу, поэтому набирается $p:=20kg$.

Требуемую единицу измерения можно выбрать из полного списка, который вызывается:

- или в меню:	«Вставка» → «Размерность»
- или кнопкой:	

При вызове появляется окно диалога, в котором можно выбрать категорию физической величины и ее единицу измерения

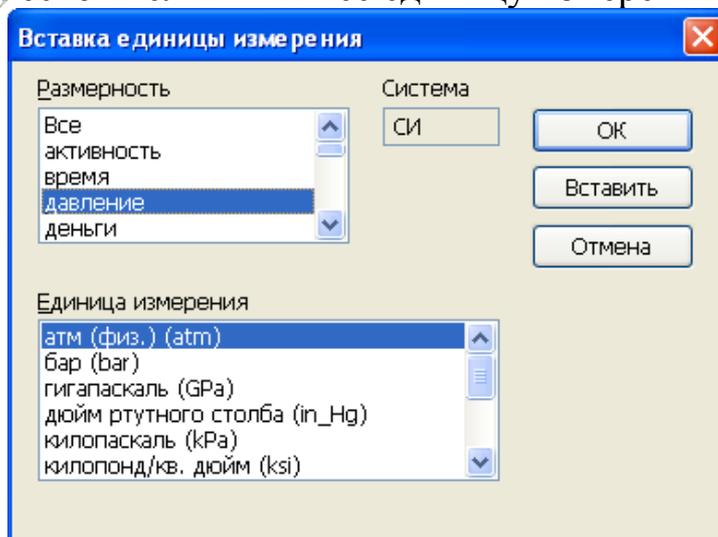


Таблица основных физических единиц

метр	<i>m</i>	секунда	<i>s или sec</i>
миля	<i>mi</i>	минута	<i>min</i>
ярд	<i>yd</i>	час	<i>hr</i>
сантиметр	<i>cm</i>	день	<i>day</i>
километр	<i>km</i>	год	<i>yr</i>
дюйм	<i>in</i>	Герц	<i>Hz</i>
атмосфера	<i>atm</i>	лошадиная сила	<i>hp</i>
Паскаль	<i>Pa</i>	Джоуль	<i>J</i>
Ампер	<i>A</i>	Кельвин	<i>K</i>
Калория	<i>cal</i>	килограмм	<i>kg</i>
Кулон	<i>C</i>	км/час	<i>kph</i>
Градус	<i>deg</i>	моль	<i>mol</i>
Дина	<i>dine</i>	Ньютон	<i>N</i>
Эрг	<i>erg</i>	Ом	<i>Ohm</i>
Фарада	<i>F</i>	Вольт	<i>V</i>
Генри	<i>H</i>	Ватт	<i>W</i>
Радан	<i>rad</i>	тонна	<i>ton</i>
Тесла	<i>T</i>		

При выполнении вычислений автоматически выполняется проверка на совпадение размерности всех элементов формулы. Если в каком-то слагаемом размерность отличается от остальных, появляется сообщение об ошибке: «*uncompatible dimensions*».

Результат вычислений показывается вместе с его единицами измерения в системе СИ.

Пример:

$$v1 := 50\text{mph} \quad v2 := 100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \quad v1 + v2 = 23.352 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Имеется возможность преобразования полученного результата к другим единицам измерения. Для этого нужно установить курсор на ячейку ввода после результата и ввести имя нужной единицы. MS автоматически преобразует результат в эти единицы.

A:=2.345kg - определение переменной

A=2.345kg ■ - вывод значения переменной (результата)

└набрать имя новой единицы измерения gm

A=2345gm - значение результата в других единицах

Щёлкните на поле
и введите 'deg'

$$\text{asin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.785 \Rightarrow \text{asin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45 \text{ deg}$$

Примечание 1. Не рекомендуется использовать имена встроенных единиц для обозначения физических переменных. Это приведет к переобозначению единицы измерения и, как следствие, к получению неконтролируемых результатов. Например

$$\begin{aligned} m &:= 5\text{kg} & L &:= 100\text{m} & t &:= 20\text{s} \\ v &:= \frac{L}{t} & v &= 25 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

В данном случае вместо метров в качестве m будет подставлено значение 5kg и при вычислении L , и при вычислении v .

Примечание 2. При решении физических задач с применением численных методов стандартным этапом анализа задачи является переход к безразмерным переменным и параметрам. На этом этапе способность среды МС работать с единицами измерения физических величин оказывается весьма полезной для проверки того, что введенные переменные и параметры действительно являются безразмерными.

2. Применение системы МС для решения задач с учетом единиц измерения

Использование встроенных функций и размерностей физических величин позволяет получить решение большинства задач по курсу общей физики. При этом рекомендуется такая последовательность действий в системе МС:

- создать новый файл;
- в текстовом блоке записать название и номер лабораторной работы и номер задачи;
- в текстовом блоке записать словесное условие задачи;
- определить используемые единицы измерения (или использовать стандартные);
- записать текстовый заголовок «Исходные данные:»
- определить переменные, соответствующие известным физическим величинам, в заданных единицах;
- записать текстовый заголовок «Решение:»
- определить выражения для расчета промежуточных и искомых величин;
- записать текстовый заголовок «Результаты:»

- получить результаты вычислений и выразить их в единицах СИ
- проанализировать полученный численный результат.

Пример: Какую скорость v приобретает последняя ступень космического корабля массой $M=12$ т к моменту, когда израсходовано $M_{\text{топл}}=193$ т горючего при скорости истечения газов $u=3,75$ км/с ?

Лабораторная работа 3

Пример оформления решения задачи

Словесная формулировка условия задачи: вычислить скорость и кинетическую энергию конечной ступени ракеты, имеющей массу $M=12$ кг, если использовано $M_1=193$ кг ракетного топлива, а скорость истечения газов $U=3.75$ км/сек.

Исходные данные:

- Massa: 12 • kg -масса конечной ступени
- $M_{\text{топл}}$: 193 • kg -использовано ракетного топлива
- u : 3.75 • km/sec -скорость истечения газов

Решение: конечную скорость v можно рассчитать по формуле Циолковского

$$v = 2.3 \cdot u \cdot \log(1 + M_{\text{топл}} / \text{Massa})$$

$$ke = 1/2 \cdot \text{Massa} \cdot v^2$$

Результаты решения:

$$v = \quad ke =$$

Получив на экране результат $v=10,6$ км/с, делаем вывод, что при данных условиях ракета превысила 1-ю космическую скорость.

Содержание задания

Решить с помощью системы МС физические задачи. Решение сопровождать текстовыми пояснениями. Полученные в ходе решения физические величины выразить в различных единицах, используемых для их измерения (например, энергию - в Джоулях, эргах, калориях; расстояние - в м, км и см; плотность - в кг/м³ и г/см³; скорость - в м/с, км/час, км/сек и т.п.).

При решении задач можно использовать справочную литературу по физике и математике, находящуюся в папке D:_Физикам-справочники.

Задача 1. Решить с помощью системы МС физическую задачу (по вариантам).

1. Определить среднее значение плотности вещества Земли, считая $R=6,37E3$ км, $M=5,976E21$ тонн. Результат выразить в кг/м³; г/см³.

2. В цилиндр заключено 1,675 кг кислорода при температуре 17°C и давлении $4,8 \cdot 10^5$ Па. До какой температуры нужно нагреть кислород, чтобы работа по расширению была равна $4 \cdot 10^4$ Дж.
3. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью $L=1.24$ мГн и переменного конденсатора, емкость которого может меняться в пределах от 9.75 до 92,5 пФ. В каком диапазоне длин волн может принимать сигналы этот приемник ?
4. Электрон переместился в ускоряющем поле из точки с потенциалом 215 В в точку с потенциалом 325 В. Найти кинетическую энергию электрона и приобретенную скорость.
5. Сопротивление нагревательного элемента электрического кипятильника 41,5 Ом. Через сколько времени закипит 2,52 кг воды, если начальная температура воды 18°C , напряжение в сети 220 В, КПД нагревателя 82% ? Ответ выразить в секундах, а затем пересчитать в минуты и в часы.
6. Излучение какой длины волны следует направить на поверхность пластины из калия (работа выхода 2 эВ), чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была равна 1000 м/с.
7. Поезд массой 5235 т после прекращения тяги паровоза останавливается под действием силы $1,2 \cdot 10^5$ Н через 1,6 минуты. С какой скоростью шел поезд до момента прекращения тяги паровоза ?
8. Определить длину математического маятника, совершающего 32 полных колебаний за 1,25 минуты. Во сколько раз нужно изменить длину маятника, чтобы частота его колебаний увеличилась в 2,4 раза.

Задача 2. Решить с помощью системы МС физическую задачу (по вариантам).

1. На какой высоте H вектор скорости тела, брошенного под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с, будет составлять с горизонтом угол 30° ? Сопротивлением воздуха пренебречь.
2. Период обращения искусственного спутника Земли 88 мин, а его линейная скорость движения по орбите 7,8 км/с. На каком расстоянии от поверхности Земли расположена орбита спутника? (№ 1.20)
3. Чему равна линейная скорость движения точек земной поверхности на широте 54° ?
4. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Чему равно угловое ускорение колеса?
5. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением 0,1 м/с². При этом линейная скорость вращения точки к концу пятого оборота стала равной 79,2 см/с. Чему равен радиус окружности?
6. Найти угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса, к концу первой секунды после начала движения. Радиус колеса 10 см. Оно вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с².
7. Необходимо с земли попасть камнем в цель с расстояния 5 м. Цель расположена на высоте $h=2.8$ м. При какой наименьшей и какой наибольшей начальной скорости камня можно это сделать?

8. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $0,1$ длины окружности после начала движения.

5 АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и практическое применение элементов среды Mathcad, реализующих аналитические вычисления.

Внимательно прочитайте информацию о символьных вычислениях в Mathcad. При чтении текста обязательно сразу самостоятельно выполните все примеры вычислений.

1. Палитра аналитических вычислений

Программные системы аналитических (символьных) вычислений (САВ) все шире используются в научных и технических исследованиях при решении задач, требующих громоздких аналитических выкладок или получения точного, а не приближенного результата.

Многие математические операции (дифференцирование, интегрирование и другие) используют ограниченный набор правил, которые могут быть запрограммированы и выполнены компьютером. Например, операция дифференцирования полинома $P(x) = ax^2 + bx + c$ сводится на практике к замене степенной функции ее производной по правилу $x^k \rightarrow kx^{k-1}$ и отбрасыванию константы.

Основной способ выполнения аналитических вычислений в Mathcad связан с применением символьного оператора вывода \rightarrow и команд символьных вычислений, собранных в палитре «Symbolic». Этот способ является наиболее удобным и наглядным.



Symbolic		
\rightarrow	$\blacksquare \rightarrow$	Modifiers
float	complex	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
$M^T \rightarrow$	$M^{-1} \rightarrow$	$ M \rightarrow$

Для выполнения простых вычислений достаточно набрать нужную математическую операцию и задать вывод результата в символьном виде (вставить команду \rightarrow из палитры), например

$$\frac{d}{dx} x^8 \rightarrow 8 \cdot x^7 \quad \frac{d^3}{dx^3} x^8 \rightarrow 336 \cdot x^5 \quad \int x^8 dx \rightarrow \frac{1}{9} \cdot x^9$$

$$f(x) := x^2 \cdot \sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 2 \cdot \sin(x) + 4 \cdot x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$$

2. Специальные команды символьных вычислений

При необходимости можно указать специальный способ обработки математического выражения с помощью шаблона подходящей команды, вставляемого из палитры.

К специальным командам относятся следующие:

– Complex (В комплексном виде) — выполнить преобразование с представлением в комплексном виде.

– Simplify (Упростить) — упростить выделенное выражение с выполнением таких операций, как сокращение подобных слагаемых, приведение к общему знаменателю, использование основных тригонометрических тождеств и т. д.

Упрощение означает замену более сложных фрагментов выражений на более простые. Для определенных интегралов ищется соответствующее аналитическое выражение. В результате преобразований могут появляться специальные функции — как встроенные в систему (функции Бесселя, гамма-функция, интеграл вероятности и др.), так и ряд функций, дополнительно определенных при загрузке символьного процессора (интегральные синус и косинус, интегралы Френеля, эллиптические комплексном виде).

– Float (С плавающей точкой) – выполнить арифметические операции в выражении с результатом в форме числа с плавающей точкой.

– Expand (Разложить по степеням) — раскрыть выражение [например, для $(X+Y)(X-Y)$ получаем $X^2 - Y^2$].

– Factor (Разложить на множители) — разложить число или выражение на множители [например $X^2 - Y^2$ даст $(X+Y)(X-Y)$].

– Collect (Разложить по подвыражению) — собрать слагаемые, подобные выделенному выражению, которое может быть отдельной переменной или функцией со своим аргументом (результатом будет выражение, полиномиальное относительно выбранного выражения).

– Substitute (Заменить переменную) — заменить указанную переменную содержимым буфера обмена. Эта операция возвращает новое выражение, полученное путем подстановки на место указанной переменной некоторого другого выражения. Последнее должно быть подготовлено и скопировано (операциями Cut или Copy) в буфер обмена. Наряду с получением результата в символьном виде эта команда позволяет найти и числовые значения функции некоторой переменной путем замены ее на числовое значение.

Подстановки и замены переменных довольно часто встречаются в математических расчетах, что делает эту операцию весьма полезной. Кроме того, она дает возможность перейти от символьного представления результата к числовому.

– Parfrac (Разложить на элементарные дроби) — разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной.

Примеры выполнения аналитических вычислений:

$$e^{a \cdot x} + b \text{ solve, } x \rightarrow \frac{\ln(-b)}{a} \quad x^2 - 2 \cdot x - 5 > 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} x < 1 - \sqrt{6} \\ 1 + \sqrt{6} < x \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \exp(x) \cdot (1 - \exp(-x))$$

$$17 \cdot x^4 + 2 \cdot x^5 + 22 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 \text{ factor} \rightarrow x^2 \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot (x + 7) \cdot (x + 1)$$

$$\sin(x) \text{ series, } x, 8 \rightarrow x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7$$

$$(5 \cdot x + 5 \cdot y - 4 \cdot x - 4 \cdot y)^3 \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{expand} \end{array} \rightarrow x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$$

Содержание задания

1. Повторить приведенные в тексте расчетные примеры.

2. Вычислить аналитически первые и вторые производные функций:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad y = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x); \quad y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1});$$

$$y = \arccos \sqrt{1-x^2}; \quad y = \cos x \operatorname{ch} x; \quad y = e^x \sin x.$$

3. Получить результат с использованием аналитических вычислений

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x + 4}{(x-3)(x+2)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x};$$

$$\text{б) } \int \frac{x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} dx; \quad \int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx; \quad \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$$

6 СОЗДАНИЕ ПРОГРАММНЫХ БЛОКОВ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и практическое применение правил создания и использования программных блоков в Mathcad-документах

Внимательно прочитайте информацию об элементах Mathcad. При чтении текста обязательно сразу самостоятельно повторите те действия и вычисления, которые описываются.

1 Структура программных блоков и команды палитры «Программирование»

Вычислительные блоки MS-документа позволяют выполнить действия, записанные одной строкой. Однако реализация любого численного метода требует выполнения нескольких вычислительных блоков, а его применение в ходе исследования физической системы – многократного повторения вычислений при различных значениях параметров задачи.

В таких случаях удобно организовать вычисления с помощью **собственных функций**, содержащих **программные блоки**.

Преимущества такого подхода заключаются в следующем:

а) действия, заключенные в функции, можно описать любым количеством строк, в том числе с применением операторов выбора и цикла;

б) определение функции не выполняет никаких действий и не влияет на последующие вычисления в документе. Действия, записанные в функции, выполняются только в момент обращения к функции;

в) определение функции имеет достаточно общий характер, так как вычисления описываются с помощью параметров. При вызове функции подбором параметров функцию можно приспособить для решения текущей задачи.

Основные элементы программных блоков:

а) программный блок состоит из отдельных строк, ограниченных слева вертикальной чертой.

б) каждая строка содержит отдельную команду, причем команда не набирается, а в строку вставляется шаблон команды из палитры «Программирование»;

в) в программном блоке можно использовать внутренние (локальные) переменные. Переменные, определенные в документе, (глобальные) доступны в программном блоке, но переменные программного блока не известны в документе;

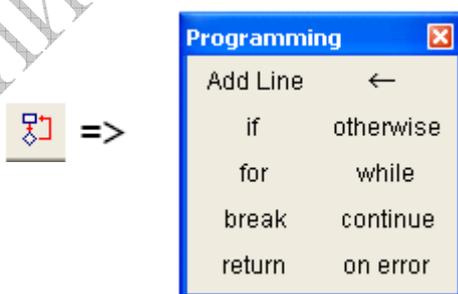
г) операция присваивания значения локальной переменной обозначается в программном блоке знаком «←»;

д) в качестве результата работы из программного блока в документ передается значение той переменной, которая указана в *последней строке* программного блока.

Имя(Параметры) := оператор
оператор
.....
результат

Переменные документа для программного блока являются глобальными, т.е. известны. Все переменные документа, определённые выше программного блока, доступны в нём. Все переменные, использованные в ПБ являются локальными, они не влияют на переменные документа.

Шаблоны команд собраны в палитре «Программирование», вызов которой на экран выполняется нажатием кнопки на главной математической палитре.



Для создания программного блока следует указать курсором место в документе и нажать кнопку «Add Line» («добавить строку»). Полезно создать сразу несколько строк, далее их заполнить командами, а ненужные затем удалить. Каждая строка содержит ячейку ввода, в которую можно вставить шаблон команды. Чтобы добавить строку, следует полностью выделить курсором предыдущую строку и выполнить команду «Add Line».

Команда локального присваивания. Шаблон команды в строку программного блока вставляется нажатием кнопки  или клавишной командой [Shift + { }. Затем ячейки шаблона заполняются: слева указывается имя локальной переменной, справа – формула для ее вычисления с использованием переменных документа и параметров функции.

Пример 1. Простейшая функция - программный блок

$$W(a) := \left[\begin{array}{l} \blacksquare \leftarrow \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \right. \quad W(a) := \left[\begin{array}{l} z \leftarrow a^2 + a^3 + a^4 \\ z \end{array} \right. \quad W(3) = 117 \quad W(5) = 775$$

Выдача нескольких результатов из программного блока. Для этого все результаты нужно объединить в общий вектор. Объединять можно даже элементы, имеющие различную матричную структуру.

Несколько матриц, имеющих одинаковое число строк (или столбцов) можно объединить в одну матрицу – результат с помощью функций *augment* или *stack*.

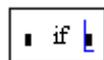
Пример 2. Два скалярных результата – вычисление гипотенузы и площади прямоугольного треугольника по заданным двум его катетам.

$$f(a, b) := \left[\begin{array}{l} c \leftarrow \sqrt{a^2 + b^2} \\ s \leftarrow \frac{a \cdot b}{2} \\ \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad f(3, 4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{res1} \\ \text{res2} \end{pmatrix} := f(4.5, 7.2) \\ \text{res1} = 8.491 \quad \text{res2} = 16.2$$

2 Операторы палитры «Программирование» и их применение

Рассмотрим отдельные операторы, содержащиеся в палитре «Программирование». Каждый оператор содержит некоторую команду, которую выполняет Mathcad, с необходимым содержанием. Важно помнить, что операторы программирования не набираются, а вставляются в ячейки программного блока.

Оператор выбора имеет шаблон

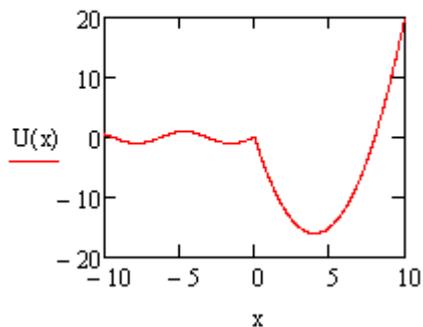


В левую ячейку шаблона записывают действие, в правую – условие. Действие выполняется, когда условие истинно.

Примечание. Знаки сопоставления величин (<, > и другие) вставляются в шаблоны операторов из палитры «Булева алгебра».

Пример 3. Кусочно-непрерывная функция

$$U(x) := \begin{cases} R \leftarrow x^2 - 8 \cdot x & \text{if } x \geq 0 \\ R \leftarrow \sin(x) & \text{if } x < 0 \\ R \end{cases}$$



Оператор альтернативного действия otherwise содержит действия, выполняемые при нарушении условия оператора if, записывается и действует соответственно с оператором if.

Пример 4. Программирование двух вариантов вычисления

$$\text{modul}(x) := \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{modul}(3) = 3 \quad \text{modul}(-3) = 3$$

```
for i ∈ I
  .
```

Оператор арифметического цикла имеет шаблон `for i ∈ I`. После слова for указывается диапазон значений переменной цикла, ниже – повторяющиеся действия.

Пример 5. Расчет таблицы значений функции:

$$\text{Tablica}(a, b, N, \text{fun}) := \begin{cases} h \leftarrow \frac{b-a}{N} \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \begin{cases} x_1 \leftarrow a + i \cdot h \\ y_1 \leftarrow \text{fun}(x_1) \end{cases} \\ \text{augment}(x, y) \end{cases}$$

$$S(x) := x^2$$

$$R := \text{Tablica}(1, 2, 5, S)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.2 & 1.44 \\ 1.4 & 1.96 \\ 1.6 & 2.56 \\ 1.8 & 3.24 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

С помощью оператора **for** удобно выполнять обработку элементов векторов и матриц. При этом переменная цикла одновременно является номером элемента вектора, строки или столбца матрицы.

Пример 6. Сумма квадратов элементов вектора (пределы изменения индекса определяются автоматически, поэтому программный блок может обрабатывать векторы любого размера)

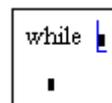
$$\text{Sum2}(V) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0.. \text{last}(V) \\ S \leftarrow S + (V_k)^2 \\ S \end{cases} \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Sum2}(A) = 14$$

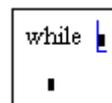
Пример 7. Подсчет количества элементов, больших 2, в матрице (пределы изменения индексов определяются автоматически, поэтому программный блок может обрабатывать матрицы любого размера.)

$$\text{Prog1}(M) := \begin{cases} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0.. \text{rows}(M) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. \text{cols}(M) - 1 \\ \quad \quad k \leftarrow k + 1 \text{ if } M_{i,j} \geq 2 \\ k \end{cases} \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Prog1}(H) = 5$$

Пример 8. Нахождение минимального элемента вектора

$$\text{min_elem}(V) := \begin{cases} \text{vmin} \leftarrow V_0 \\ \text{for } i \in 1.. \text{last}(V) \\ \quad \text{vmin} \leftarrow V_i \text{ if } V_i < \text{vmin} \\ \text{vmin} \end{cases} \quad D := \begin{pmatrix} 2.4 \\ 6.8 \\ 9.2 \\ 1.9 \end{pmatrix} \quad \text{min_elem}(D) = 1.9$$



Оператор цикла с предусловием while имеет шаблон . Справа записывается условие, при выполнении которого действия повторяются, внизу – сами действия.

При использовании этого оператора следует помнить, что сам оператор не формирует полного цикла. Полный цикл состоит из 4-х обязательных элементов:

- установка начальных значений параметра цикла и величин, участвующих в расчете
- проверка условия повторения действий
- рабочая область - действия, выполняемые каждый раз
- изменение параметра цикла

Оператор while содержит только второй и третий элементы цикла.

Пример 9. Вычисление суммы ряда с заданной точностью

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}; \quad \varepsilon = 10^{-7}.$$

Решение. Расчет начинается со значения $k=0$, $S=1$. Далее повторяем вычисление нового номера $k=k+1$ и нового слагаемого $a_k=1/(k^2+1)$. Слагаемые добавляем к сумме, пока величина слагаемого больше, чем требуемая точность получения результата $|a_k| > \varepsilon$.

$\text{SumW}(\varepsilon) := \left \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ a \leftarrow 1 \\ S \leftarrow 0 \\ \text{while } a > \varepsilon \\ \quad \left \begin{array}{l} S \leftarrow S + a \\ k \leftarrow k + 1 \\ a \leftarrow \frac{1}{k^2 + 1} \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$	$\text{SumW}(10^{-4}) = 2.066624$ $\text{SumW}(10^{-6}) = 2.075674$
--	---

Оператор досрочного завершения цикла break. С помощью этой команды можно моделировать оператор repeat...until, который отсутствует в МС. Для предыдущего примера конструкция выглядит следующим образом (не нужно вычислять a_k перед циклом).

Пример 10.

$\text{SumR}(\varepsilon) := \left \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ S \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left \begin{array}{l} a \leftarrow \frac{1}{k^2 + 1} \\ S \leftarrow S + a \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } a < \varepsilon \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$	$\text{SumR}(10^{-4}) = 2.066724$ $\text{SumR}(10^{-6}) = 2.075675$
--	---

Оператор назначения результата return используется для вывода нужного элемента. Это может быть число, вектор, строка символов в апострофах.

Пример 11. Функция – программный блок для вычисления вещественных корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по заданным коэффициентам

$\text{roots}(a, b, c) := \left \begin{array}{l} \text{diskrim} \leftarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ \text{if } \text{diskrim} \geq 0 \\ \quad \left \begin{array}{l} x1 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{\text{diskrim}}}{2 \cdot a} \\ x2 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{\text{diskrim}}}{2 \cdot a} \\ \text{return } \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ \text{return "Вещественных корней нет"} \end{array} \right. \text{ otherwise}$	$\text{roots}(1, -2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\text{roots}(1, -2, -15) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
--	--

$\text{roots}(4, 3, 2) = \text{"Вещественных корней нет"}$

Оператор перехода в конец цикла т.е. досрочного завершения отдельного шага цикла, **continue** обычно используется совместно с оператором **if** внутри цикла.

Оператор выполнения вспомогательного действия в случае возникновения ошибки `on error` позволяет предусмотреть два варианта расчёта. Один основной и запасной, который выполняется при ошибке в основном варианте.

Пример 12.

$$a(x) := \begin{cases} a \leftarrow \frac{1}{x + 0.01} & \text{on error } a \leftarrow \frac{1}{x} \\ a \end{cases}$$

$a(0) = 100$
 $a(2) = 0.5$

Поиск ошибок в программном блоке. При наличии ошибок в программном блоке МС выдает сообщение об ошибке в том месте документа, в котором программный блок вызывается. Если программный блок используется для определения собственной функции, то сообщение об ошибке выдается в месте вызова функции-программного блока. Команда поиска ошибок находится в контекстном меню, вызываемом нажатием правой клавиши мыши.

Организация вычислений в МС-документе при проведении вычислительного эксперимента. Программные блоки удобно использовать для определения в виде собственных функций отдельных этапов вычисления. Это удобно по причинам:

- 1) Определение функции не влияет на вычисление в документе до тех пор пока функция не будет вызвана.
- 2) Функция обладает свойствами универсальности т.к. подбором параметров её можно приспособить для решения многих задач, причём при вызове используются те имена параметров, которые нужны в данный момент.
- 3) Функции – программные блоки, которые реализуют стандартные действия можно собрать в отдельный файл, который хранится отдельно от документа и в документе указывают только имя.

Подключение к документу других МС-документов. МС предоставляет возможность использовать в рабочем документе все элементы, записанные в другом документе, хранящемся на диске.

Для этого в текщий документ вставляется блок ссылки Reference to..

«Insert» - «Reference» («Вставка» - «Ссылка»).

После блока ссылки все действия в документе выполняются так, как если бы содержимое вставленного документа полностью набрано в текущем документе.

Примечание. Если содержимое библиотечного файла изменилось, то в открытом документе это не отображается. Для учета этих изменений нужно перезагрузить документ.

Механизм ссылок позволяет собрать в отдельном библиотечном файле все часто используемые константы, функции и другие элементы и использовать их для решения различных задач, подключая в случае необходимости. При этом рабочий файл разгружается, в нем остаются блоки, связанные с решением конкретной задачи.

Это позволяет расширять возможности МС, создавая новые библиотечные файлы.

Содержание задания

ЗАДАЧА 1. Составить функцию - программный блок, выполняющую заданные действия (параметры задачи являются параметрами функции). Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты вектора результатов. Проверить работу функции на 2 тестовых примерах (ответ легко проверить), подобранных самостоятельно. Показать использование функции на 3 различных примерах, подобранных самостоятельно.

1. В треугольнике известны сторона a и углы A , B и C (в градусах). Найти площадь треугольника, радиус вписанной окружности и полупериметр, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}; \quad r = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}}, \quad \text{где } p = \frac{S}{r}.$$

2. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания a и угол α (в градусах) наклона боковой грани к плоскости основания. Найти объем и площадь полной поверхности пирамиды, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$V = S_{\text{осн}} H; \quad S_n = S_{\text{осн}} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right), \quad \text{где } S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad H = \frac{a \sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \alpha.$$

3. В треугольнике известны три стороны a , b , c . Найти (в градусах) углы этого треугольника, используя формулы:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a}; \quad C = 180^\circ - (A + B).$$

4. В треугольнике известны стороны a , b , c . Найти радиус вписанной окружности и угол A (в радианах), используя формулы:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

5. В треугольнике известны три стороны a , b , c . Найти радиус описанной окружности и угол A (в радианах), используя формулы:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

6. В треугольнике известны две стороны a и b и угол C (в градусах) между ними. Найти сторону c и площадь треугольника, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \quad S = p(p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

7. В треугольнике известны две стороны a и b и угол C (в радианах) между ними. Найти сторону c , углы A и B (в радианах) и площадь треугольника, используя формулы:

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}; \quad \sin B = \frac{b \sin C}{c}; \quad S = \frac{bc \sin A}{2}; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

8. В треугольнике известны сторона a и два угла B и C (в градусах). Найти угол A (в градусах), радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$A = 180^\circ - B - C; \quad R = \frac{a}{2 \sin A}; \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

ЗАДАЧА 2. Составить функцию - программный блок, выполняющий указанные действия по обработке вектора произвольного размера. Проверить работу функции на 2 тестовых примерах, подобранных самостоятельно (векторы из 4 и 5 элементов). На экран вывести исходные векторы и результаты их обработки. Показать использование функции на 3 различных примерах, подобранных самостоятельно (во всех случаях - векторы разного размера).

Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты вектора результатов.

1. Проверить, имеется ли в данном векторе хотя бы одна пара чисел, совпадающих по величине.
2. Найти количество и сумму квадратов положительных элементов вектора, имеющих четные номера.
3. Получить новый вектор путем умножения всех элементов исходного вектора на его наибольший положительный элемент.
4. Найти минимальное и максимальное из значений вектора.
5. Вычислить сумму всех положительных и сумму всех отрицательных элементов вектора.
6. Определить количество элементов, больших среднего арифметического элементов вектора.
7. Вычислить количество и сумму квадратов отрицательных элементов вектора.
8. Вычислить произведение ненулевых элементов вектора.

ЗАДАЧА 3. Составить функцию-программный блок, выполняющий указанные действия по обработке матрицы произвольного размера. Проверить работу функции на 2 тестовых примерах, подобранных самостоятельно (матрицы 3×3 и 4×4). На экран вывести исходные матрицы и результаты их обработки. Показать использование функции на 3 различных примерах, подобранных самостоятельно (во всех случаях - матрицы разного размера).

Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты вектора результатов.

1. Построить вектор V , каждая координата которого равна сумме элементов, больших 2, в соответствующем столбце матрицы.

2. Найти минимальный элемент в каждом столбце и сумму квадратов этих минимальных элементов для всей матрицы.

3. Найти минимальную из сумм элементов каждого столбца матрицы.

4. Вычислить сумму всех элементов матрицы, стоящих в строках, у которых последний элемент положителен.

5. Получить новую матрицу путем умножения всех элементов исходной матрицы на ее элемент, наибольший по абсолютной величине.

6. В каждой строке матрицы найти сумму элементов, не превышающих по модулю 2.

7. Вычислить сумму всех элементов матрицы, расположенных в строках с нечетными номерами.

8. Определить число ненулевых элементов в каждой строке и общее число ненулевых элементов в матрице.

Литература

1. Дьяконов, В.П. Mathcad 2000 в математике, в физике и в Internet. / В.П. Дьяконов, И. Абраменкова. – М.: Нолидж. 2001. – 592 с.
2. Кирьянов, Д.В. Mathcad 12. Наиболее полное руководство. / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005, – 566 с.
3. Макаров, Е.Г. Инженерные расчёты в Mathcad / Е.Г. Макаров. – СПб.: Питер, – 448 с.
4. Поршнева, С.В. Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнева, И. В. Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005, – 456с.
5. Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева, А.Н.Данилова. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.